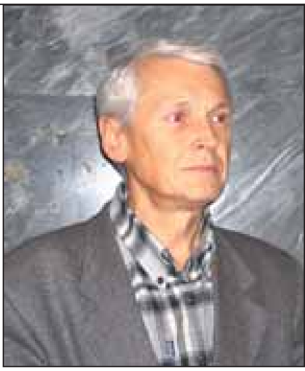

Чивилёв Виктор Иванович
к.ф.-м.н., доцент кафедры общей физики МФТИ,
заслуженный работник высшей школы,
заместитель председателя научно-методического совета ЗФТШ при МФТИ, член жюри Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Колебания

В статье дан общий подход к колебаниям различной физической природы. Вначале вводятся и уточняются понятия *колебание, периодическое колебание, гармоническое колебание*. Затем приводится алгоритм (правило) для доказательства гармоничности и нахождения периода колебаний, имеющих различную физическую природу. На примерах конкретных систем продемонстрировано применение алгоритма.

Для понимания излагаемого материала необходима некоторая математическая культура: знание свойств функций $y(x)=\alpha\sin(\omega x+\varphi)$ и $y(x)=\alpha\cos(\omega x+\varphi)$ и умение дифференцировать сложную функцию, в частности знать, что для функции $y(x)$ справедливо $(y^2)'=2yy'$. Статья подготовлена на базе задания № 4 для 11-х классов ЗФТШ при МФТИ.

§1. Колебательные процессы

Колебаниями называются процессы, в той или иной степени, повторяющиеся во времени.

Когда говорят, что система колеблется, то под этим подразумевается, что некоторая физическая величина, характеризующая систему, совершает колебания, т. е. изменяется, неоднократно принимая одно и то же значение. При колебаниях математического маятника (рис. 1) колеблющимися физическими величинами будут угол α отклонения нити от вертикали, координаты маятника x и y, расстояние вдоль траектории (по дуге окружности) от т. A до т. O и т. д. Когда верхушка дерева качается под действием ветра, то колеблются координаты верхушки. При распространении звука в воздухе колеблется давление и плотность воздуха в каждой точке воздушной среды. При дыхании человека колеблющейся физической величиной может служить объём грудной клетки. В колебательном контуре совершают колебания заряд конденсатора, напряжение на конденсаторе, ток в контуре и т. д. Напряжение на горящей лампочке в квартире и ток через неё тоже колеблются. Такие физические величины, как давление и температура, характеризующие состояние атмосферы, в течение, скажем, месяца, неоднократно принимают одни и те же значения, т. е. совершают колебания.

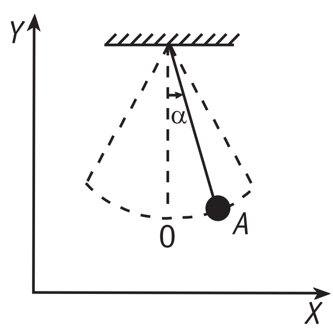

Рис.1

Колебательные процессы встречаются в разнообразных физических явлениях и широко распространены в окружающем нас мире. Несмотря на то, что колебания могут иметь различную физическую природу, они часто подчиняются одним и тем же закономерностям, описываются одинаковыми математическими формулами и уравнениями. Это позволяет с единой точки зрения математически описать отличающиеся по физической природе колебания.

§2. Периодические колебания

Из множества колебаний выделим и рассмотрим *периодические колебания*.

Колебания некоторой физической величины S называются периодическими, если все значения этой величины полностью повторяются через одно и то же время T, называемое *периодом*, т. е. $S(t+T)=S(t)$ для любого значения времени t. Если T – период, то $2T$, $3T$, $4T$, ... тоже периоды. Поэтому в физике под периодом обычно понимают наименьший период, т. е. наименьший положительный отрезок времени, через который физическая величина S повторяется. При этом говорят, что за время одного периода совершается одно колебание.

Частотой периодических колебаний ν называется число колебаний в единицу времени. Легко показать, что

$$\boxed{\nu=\frac{1}{T}.}$$

Действительно, если за время t совершено N колебаний, то частота $\nu=\dfrac{N}{t}$, а период $T=\dfrac{t}{N}$. Отсюда видно, что $\nu=\dfrac{1}{T}$. В системе СИ единицей измерения частоты служит *Герц* (*Гц*), 1 *Гц* $=c^{-1}$.

Пусть периодически колеблющаяся величина S изменяется в пределах от S_0-A до S_0+A, где $A>0$. Тогда говорят, что величина S колеблется с *амплитудой* A около значения S_0.

§3. Гармонические колебания

Важным частным случаем периодических колебаний являются *гармонические колебания*, т. е. такие изменения во времени t физической величины S, которые идут по закону

$$S(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0), \qquad (1)$$

где $A>0$, $\omega>0$. Из курса математики известно, что функция вида (1) изменяется в пределах от $-A$ до A, и что наименьший положительный период у неё $\dfrac{2\pi}{\omega}$. Поэтому гармоническое колебание вида (1) происходит с амплитудой A и периодом

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}.}$$

Не следует путать *циклическую (круговую) частоту* ω и частоту ν колебаний. Между ними простая связь. Так как $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ и $\nu=\dfrac{1}{T}$, то $\boxed{\omega=2\pi\nu.}$

В системе СИ размерность как ω, так и ν равна c^{-1}. Наименование *Гц* обычно применяется только для величины ν, а если необходимо указать размерность ω, то пишут просто c^{-1}.

Величина $\omega t+\varphi_0$ называется *фазой колебаний*. При $t=0$ фаза равна φ_0, и поэтому φ_0 называется *начальной фазой*. Начальная фаза для конкретного колебания с некоторой амплитудой (например, колебания координаты груза, подвешенного на пружине) зависит от момента начала отсчёта времени (момента включения секундомера).

Отметим, что при любом t справедливо $A\cos(\omega t+\varphi_0)=A\cos[\omega t+(\varphi_0+2\pi n)]$, где $n=0,\ \pm1,\ \pm2$, ... Видно, что начальная фаза для одного и того же колебания есть величина, определённая с точностью до $2\pi n$. Поэтому из множества возможных значений начальной фазы выбирают обычно значение начальной фазы наименьшее по модулю или наименьшее положительное. Но делать это не обязательно. Например, если дано колебание $S=A\cos(\omega t+\frac{13}{6}\pi)$, то удобнее записать его в виде $S=A\cos(\omega t+\frac{\pi}{6})$ и работать в дальнейшем с последним видом записи этого колебания.

Можно показать, что колебания вида

$$S=a\sin(\gamma t+\alpha_0) \text{ и } S=a\cos(\gamma t+\alpha_0), \qquad (2)$$

где a и γ могут быть любого знака, с помощью простых тригонометрических преобразований всегда приводятся к виду (1), причём $A=|a|$, $\omega=|\gamma|$, а φ_0 не равно α_0 вообще говоря. Таким образом, колебания вида

(2) являются гармоническими, с амплитудой $|a|$ и циклической частотой $|\gamma|$. Не приводя общего доказательства, проиллюстрируем это на конкретном примере.

Пусть требуется показать, что колебание $S=-16\sin(20\pi t-\frac{\pi}{3})$ будет гармоническим и найти амплитуду A, циклическую частоту ω, период T и начальную фазу φ_0 (одно из возможных значений φ_0).

Действительно,

$$S=-16\sin(20\pi t-\frac{\pi}{3})=16\sin(\frac{\pi}{3}-20\pi t)=$$

$$=16\cos(\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{3}-20\pi t))=16\cos(20\pi t+\frac{\pi}{6}).$$

Видим, что колебание величины S удалось записать в форме (1). При этом $A=16$, $\omega=20\pi$, $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{10}$, $\varphi_0=+\frac{\pi}{6}$.

Попробуйте самостоятельно убедиться, что $x=-23\cos(\frac{\pi}{10}-4t)=23\cos(4t+\frac{9\pi}{10})$, $S=7\sin(9t-\frac{\pi}{3})=7\cos(9t-\frac{5\pi}{6})$.

Естественно, что запись гармонических колебаний в форме (2) ничем не хуже записи в форме (1), и переходить в конкретной задаче от записи в одной форме к записи в другой обычно нет необходимости. Нужно только уметь сразу находить амплитуду, циклическую частоту и период, имея перед собой любую форму записи гармонического колебания.

Эквивалентностью записи гармонического колебания через косинус или синус объясняется то, что в одних учебниках дается определение гармонических колебаний через косинус, а в других – через синус.

§4. Производные по времени от колеблющейся величины

Иногда полезно знать характер изменения первой и второй производных по времени от величины S, которая совершает гармонические колебания (колебания по гармоническому закону) с амплитудой A и циклической частотой ω. Если $S=A\cos(\omega t+\varphi_0)$, то дифференцирование S по времени t даёт $S'=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$, $S''=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)$.

Видим, что первая и вторая производные по времени t колеблющейся величины S изменяются по гармоническому закону с той же циклической частотой ω и амплитудами $A\omega$ и $A\omega^2$.

Пример. Пусть координата x тела, совершающего гармонические колебания вдоль оси X, изменяется по закону $x=2\sin 6t$, где x – в сантиметрах, время t – в секундах. Требуется записать закон изменения скорости и ускорения тела и найти их максимальные значения.

Для ответа на поставленный вопрос заметим, что первая производная по времени от величины x есть проекция скорости тела на ось X, а вторая производная от x есть проекция ускорения на ось X: $x'=\upsilon_x$, $x''=a_x$. Продифференцировав выражения для x по времени, получаем: $x'=\upsilon_x=12\cos 6t$, $x''=a_x=-72\sin 6t$. Максимальные значения скорости и ускорения $\upsilon_{max}=12\ см/с$, $a_{max}=72\ см/с^2$.

§5. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний Алгоритм нахождения периода гармонических колебаний

Пусть некоторая физическая величина S совершает гармонические колебания:

$$S(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0). \qquad (3)$$

Легко показать, что вторая производная от S по времени t равна $S''=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)$. С учётом (3) получаем, что $S''=-\omega^2 S$, т. е. $\boxed{S''+\omega^2 S=0.}$ (4)

Итак, можно сделать вывод: если величина S изменяется по гармоническому закону (3), то отсюда следует справедливость равенства (4). В математике показывается и обратное: если для величины $S=S(t)$ справедливо равенство (4) при всех допустимых значениях t, то $S(t)$ имеет только вид (3) и никакой другой. Причем A и φ_0 в (3) есть произвольные постоянные, конкретные значения которых зависят от так называемых начальных условий, т. е. от значений S и её производной S' в некоторый момент времени t (обычно при $t = 0$).

Равенства, связывающие функцию, её аргумент и производные функции по этому аргументу, называются в математике дифференциальными уравнениями. Поэтому равенство (4) называют *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*.

Таким образом, мы получили чрезвычайно важное как для теории, так и для решения задач следующее утверждение.

Если с помощью законов физики для физической величины S удалось записать дифференциальное уравнение вида $S'' + \omega^2 S = 0$, то отсюда будет следовать, что S изменяется обязательно по гармоническому закону $S(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ с циклической частотой ω ($\omega = \sqrt{\omega^2} > 0$). Конкретные значения амплитуды A и начальной фазы φ_0 зависят от начальных условий.

Это утверждение может служить *алгоритмом* (правилом) для доказательства гармоничности колебаний и нахождения периода колебаний любых конкретных колебательных систем. Алгоритм можно применять к колебаниям различной физической природы.

Ниже на примерах, представленных в виде задач, показано применение алгоритма.

§6. Пружинный маятник

Задача 1. На гладком горизонтальном столе груз массой m совершает колебания вдоль оси X на лёгкой пружине жёсткостью k, прикрепленной одним концом к грузу, а другим к стене (рис. 2). Показать, что свободные колебания такого пружинного маятника гармонические и найти их период. (*Свободными колебаниями* называются колебания, которые возникают в системе в результате однократного выведения её из состояния устойчивого равновесия).

РЕШЕНИЕ. Начало координат ($x = 0$) поместим в точку, соответствующую равновесному положению груза. За колеблющуюся физическую величину возьмем координату x груза.

<ins>*1-й способ решения. Используется второй закон Ньютона.*</ins>

Пусть груз при колебаниях в некоторый момент времени t имеет координату $x = x(t)$. Тогда проекция на ось x силы $\vec{F}$, действующей на груз со стороны пружины,

$$F_x = -kx \tag{5}$$

при любом знаке x, что легко проверить.

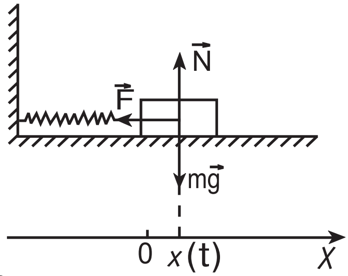

Рис.2

На рис. 2 показано направление силы $\vec{F}$ при $x > 0$. На груз ещё действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормального давления $\vec{N}$ со стороны стола. По второму закону Ньютона $m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N}$, где $\vec{a}$ – ускорение груза.

Это векторное равенство, записанное в проекциях на ось X, имеет вид $ma_x = F_x$. Здесь $a_x = x''$ – проекция на ось X ускорения. Учитывая (5), имеем $mx'' = -kx$. Отсюда $x'' + \frac{k}{m}x = 0$.

Последнее уравнение есть дифференциальное уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и периодом $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

<ins>*2-й способ решения. Используется закон сохранения энергии.*</ins>

В момент, когда груз имеет координату x и проекцию на ось X скорости x', кинетическая энергия груза будет $\frac{1}{2}m(x')^2$, а потенциальная энергия деформированной пружины $\frac{1}{2}kx^2$. Так как полная энергия системы при колебаниях сохраняется, то $\frac{m(x')^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=const$. Продифференцируем последнее равенство по времени:

$$\frac{1}{2}m\cdot 2x'x''+\frac{1}{2}k\cdot 2xx'=0 .$$

Откуда $x''+\frac{k}{m}x=0$.

Как и в первом способе решения, но уже другим путём, мы получили дифференциальное уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ и периодом $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Задача 2. На лёгкой пружине жёсткостью k подвешен груз массой m. Показать, что вертикальные собственные колебания такого пружинного маятника гармонические и найти их период. (*Собственные колебания* – это свободные колебания без затухания, т. е. колебания, когда нет сил (причин), препятствующих свободным колебаниям).

РЕШЕНИЕ. Направим ось X вниз (рис. 3), начало координат поместим в точку, соответствующую равновесному положению груза. В этом положении пружина растянута по сравнению с ненапряжённым состоянием на величину x_0, причём

$$\boxed{kx_0=mg .} \qquad (6)$$

1-й способ решения. Используется второй закон Ньютона.

Если текущая координата $x=x(t)$, то проекция на ось X силы $\vec{F}$, действующей на груз со стороны пружины,

$$F_x=-k(x_0+x) . \qquad (7)$$

Равенство (7) справедливо для любого значения координаты x колеблющегося груза, что, вообще говоря, нужно проверить, т. к. мы хотим получить дифференциальное уравнение колебаний, справедливое не только для одного значения x, а для всех значений.

Запишем уравнение движения груза (уравнение второго закона Ньютона) в проекциях на ось X, учитывая, что проекция на ось X ускорения груза есть вторая производная x'' от координаты по времени:

$$mx''=F_x+mg . \qquad (8)$$

С учётом (6) и (7) уравнение (8) принимает вид:

$$x''+\frac{k}{m}x=0 . \qquad (9)$$

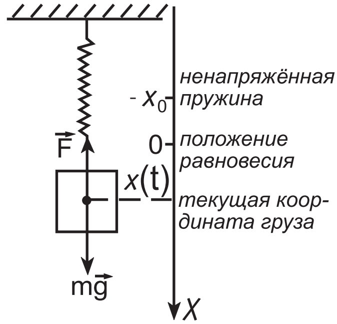

Рис.3

Видно, что это дифференциальное уравнение гармонических колебаний, период которых:

$$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} .} \qquad (10)$$

2-й способ решения. Используется закон сохранения энергии.

За нулевой уровень потенциальной энергии груза в поле тяжести удобно взять положение равновесия. Полная механическая энергия колебаний системы представляет собой сумму кинетической энергии груза $\frac{1}{2}m(x')^2$, потенциальной энергии груза в поле тяжести $mg(-x)=-mgx$ и потенциальной энергии деформации пружины $\frac{1}{2}k(x_0+x)^2$. Здесь x' – проекция скорости груза на ось X, её квадрат равен, естественно, квадрату модуля скорости.

Полная механическая энергия при колебаниях должна сохраняться:

$$\frac{m(x')^2}{2}+\frac{k(x_0+x)^2}{2}-mgx=const . \qquad (11)$$

Дифференцируем (11) по времени:

$$mx'x''+k(x_0+x)x'-mgx'=0 .$$

С учётом (6) после простых преобразований получаем $x''+\frac{k}{m}x=0$, что совпадает с (9). Итак, колебания гармонические с периодом, даваемым (10).

Проанализировав ответы к задачам 1 и 2, приходим к выводу: *собственные колебания пружинного маятника гармонические с периодом*

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.}$$

При этом груз маятника может скользить по гладкому столу или быть подвешенным на пружине.

§7. Математический маятник

Задача 3. Показать, что в однородном поле тяжести собственные малые колебания в вертикальной плоскости математического маятника длиной l являются гармоническими и найти их период.

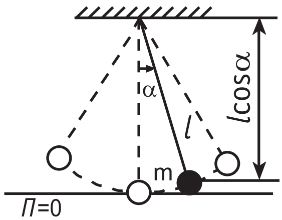

Рис.4

РЕШЕНИЕ. Пусть у маятника длина нити l и масса шарика m. За колеблющуюся физическую величину удобно взять угол α отклонения нити от вертикали (рис. 4). Будем считать α положительным, если маятник отклонён вправо от положения равновесия, и отрицательным, если он отклонён влево. Выразим кинетическую и потенциальную энергии шарика массой m в произвольный момент времени t через угол $\alpha = \alpha(t)$ и производную угла по времени $\alpha' = \alpha'(t)$. Угловая скорость шарика α', его линейная скорость $v = \alpha' l$ и кинетическая энергия

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2(\alpha')^2.$$

Если за нулевой уровень потенциальной энергии ($П = 0$) взять уровень, соответствующий нахождению шарика в положении равновесия маятника, то потенциальная энергия шарика в момент отклонения нити на угол α окажется $П = mg(l - l\cos\alpha)$. Поскольку $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, то $П = 2mgl\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Для малых углов можно считать, что значения их синусов приблизительно равны самим углам (в радианах). Поэтому $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ и можно принять, что

$$П = 2mgl\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}mgl\alpha^2.$$

Полная энергия системы, равная $K + П$, при колебаниях сохраняется. Следовательно

$$\frac{1}{2}ml^2(\alpha')^2 + \frac{1}{2}mgl\alpha^2 = const.$$

Продифференцируем последнее равенство по времени:

$$\frac{1}{2}ml^2 2\alpha'\alpha'' + \frac{1}{2}mgl2\alpha\alpha' = 0.$$

После упрощения имеем: $\alpha'' + \frac{g}{l}\alpha = 0$.

Нами получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний величины α с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ и периодом $T = 2\pi/\omega$.

Итак, *малые колебания математического маятника являются гармоническими с периодом* $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.}$

§8. Колебательный контур

Задача 4. Дан колебательный контур без затухания (сопротивление равно нулю) с постоянными ёмкостью C и индуктивностью L. Показать, что свободные электрические колебания в контуре гармонические и найти их период. (Напомним, что свободные колебания без затухания называются собственными колебаниями).

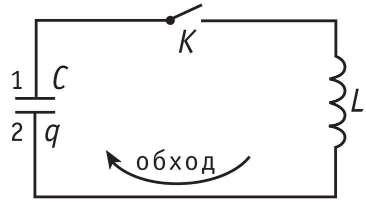

Рис.5

РЕШЕНИЕ. Если зарядить конденсатор и затем замкнуть ключ, то в схеме на рис. 5 возникнут колебания заряда на конденсаторе, колебания тока в цепи, колебания э.д.с. самоиндукции в катушке и т. д. За колеблющуюся величину удобно взять заряд на одной из обкладок конденсатора.

1-й способ решения. Используем закон Ома.

Выберем положительное направление обхода контура, например по часовой стрелке, как показано на рис. 5. Это означает, что ток I положителен, если его направление совпадает с положительным направлением обхода, и отрицателен, если не совпадает. Аналогичное можно сказать и про знак э. д. с. самоиндукции 1, при расчёте которой по формуле $1 = -LI'$ автоматически будет получаться знак у э.д.с., согласованный с направлением обхода.

Обозначим через q заряд той обкладки конденсатора, для которой $q' = I$ (для другой обкладки $q' = -I$, что не очень удобно). Это легко сделать, если учесть, что $q' = \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$. Для схемы на рис. 5 q следует взять на нижней обкладке.

По закону Ома для участка $1 - L - 2$

$$(\varphi_1 - \varphi_2) + 1 = IR .$$

Поскольку сопротивление в контуре

$$R = 0,\ \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C},$$

$$1 = -LI' = -L(q')' = -Lq'' \text{, то имеем:}$$

$$q'' + \frac{1}{LC}q = 0 . \qquad (12)$$

Итак, получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний величины q с циклической частотой $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ и периодом $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Полезно заметить, что при изменении заряда по гармоническому закону $q = q_0\cos(\omega t + \varphi_0)$ ток

$$I = q' = -q_0\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = q_0\omega\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}),$$

э.д.с. самоиндукции

$1 = -LI' = Lq\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$ и напряжение на конденсаторе $U = \dfrac{q}{C} = \dfrac{q_0}{C}\cos(\omega t + \varphi_0)$.

Таким образом, *заряд на конденсаторе, ток в контуре, э. д. с. самоиндукции в катушке и напряжение на конденсаторе совершают гармонические колебания с периодом*

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}.}$$

При этом q, 1?U колеблются в фазе, *а* колебания тока опережают колебания заряда по фазе на $\pi/2$.

2-й способ решения. Используется закон сохранения энергии.

Выберем положительное направление обхода контура и обозначим через q заряд той обкладки конденсатора, для которой $q' = I$. По закону сохранения энергии

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = const .$$

Продифференцируем это равенство по времени: $LII' + \dfrac{1}{C}qq' = 0$. Учитывая, что $I = q'$, а $I' = (q')' = q''$, получим $q'' + \dfrac{1}{LC}q = 0$.

Последнее уравнение совпало, что и следовало ожидать, с уравнением (12), и дальнейшие рассуждения те же, что и в первом способе решения.

§9. Движение тела в гипотетическом тоннеле вдоль диаметра Земли

Задача 5. Вообразите, что вдоль диаметра Земли прорыт тоннель и в него сброшен камень. Через какое время камень окажется на противоположной стороне Земли?

Сопротивление воздуха и вращение Земли не учитывать. Плотность Земли считать постоянной по всему объёму, радиус Земли $R = 6400$ км.

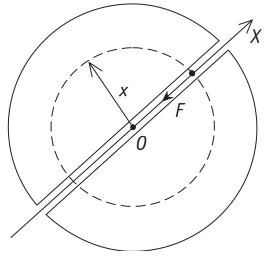

Рис.6

РЕШЕНИЕ. Направим ось X вдоль тоннеля и поместим начало координат в центр Земли (рис. 6). Пусть в произвольный момент времени координата камня x. Разобьём мысленно весь объём Земли на тонкие сферические слои с центром в точке O. Можно показать (сделайте это самостоятельно), что любой слой с радиусом больше x действовать на камень не будет, а слои с радиусом меньше x будут действовать с силой F, равной силе притяжения между шаром радиусом x и камнем. Если плотность Земли ρ, то масса такого шара равна $M = 4\pi x^3 \rho/3$ и по закону всемирного тяготения

$$F = G\frac{Mm}{x^2} = \frac{4}{3}G\pi\rho m x,$$

где m – масса камня, G – гравитационная постоянная. Для любого тела массой m_0 на поверхности Земли можно записать

$$m_0 g = G\frac{m_0(4\pi\rho R^3/3)}{R^2},$$

откуда $$g = \frac{4}{3}G\pi\rho R.$$

Тогда $$F = \frac{mg}{R}x.$$

Запишем уравнение движения камня в проекциях на ось X:

$$mx'' = -F.$$

Подставив сюда выражение для F и упростив, получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний для координаты x камня:

$$x'' + \frac{g}{R}x = 0.$$

Отсюда следует, что камень в тоннеле будет совершать гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

и достигнет противоположной стороны Земли через время

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 42 \text{ мин}.$$

§10. Конструкция из математического маятника и пружины

Задача 6. На лёгком стержне длиной l висит небольшой шарик массой m (рис. 7). К стержню прикреплена лёгкая пружина жёсткостью k на расстоянии $2l/3$ от точки o подвеса. Другой конец пружины прикреплён к стене. Система может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси O. В положении равновесия стержень вертикален, пружина горизонтальна, и не деформирована. Найдите период малых колебаний системы в плоскости чертежа.

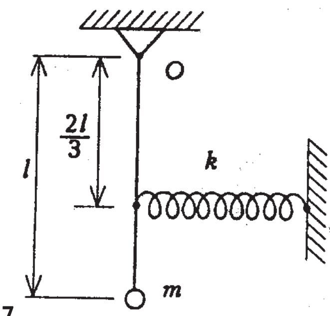

Рис.7

РЕШЕНИЕ. За колеблющуюся физическую величину возьмём угол α отклонения стержня от вертикали (рис. 8). Выразим кинетическую и потенциальную энергии системы в произвольный момент времени t через угол $\alpha = \alpha(t)$ (будем считать его малым) и производную угла по времени $\alpha' = \alpha'(t)$.

Линейная скорость шарика равна $\alpha'(t)\,l$, кинетическая энергия –

$$E_k = \frac{ml^2(\alpha')^2}{2}.$$

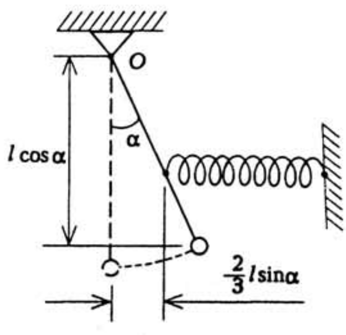

Рис.8

За нулевой уровень потенциальной энергии шарика возьмём уровень, соответствующий положению равновесия шарика. Тогда потенциальная энергия шарика в поле тяжести будет

$$E_{p1} = mg(l - l\cos\alpha) = 2mgl\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{mgl\alpha^2}{2}.$$

Здесь воспользовались тем, что при малых углах $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2$.

При отклонении маятника длина пружины сократится на $x = (2l \sin \alpha)/3 = 2l\alpha/3$ и её потенциальная энергия станет

$$E_{p2} = \frac{kx^2}{2} = \frac{2kl^2\alpha^2}{9}.$$

Полная энергия системы, равная $E_k + E_{p_1} + E_{p_2}$, при колебаниях сохраняется:

$$\frac{ml^2(\alpha')^2}{2} + \frac{mgl\alpha^2}{2} + \frac{2kl^2\alpha^2}{9} = const.$$

Продифференцируем это равенство по времени:

$$ml^2\alpha'\alpha'' + mgl\alpha\alpha' + 4\frac{kl^2\alpha\alpha'}{9} = 0.$$

Отсюда

$$\alpha'' + \left(\frac{g}{l} + \frac{4}{9}\frac{k}{m}\right)\alpha = 0.$$

Видим, что получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний, период которых равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{g}{l} + \frac{4}{9}\frac{k}{m}}}.$$

§11. Колебания жидкости в изогнутой трубке

Задача 7. Тонкая изогнутая трубка постоянного сечения расположена в вертикальной плоскости (рис.9). Каждое колено трубки наклонено к горизонту под углом α. Длина части трубки, занятой жидкостью, равна l. Найдите период колебаний жидкости в трубке. При колебаниях опускающаяся поверхность жидкости не достигает изогнутого участка трубки. Трение между слоями жидкости и жидкости о трубку не учитывать.

РЕШЕНИЕ. За колеблющуюся физическую величину возьмём координату x поверхности жидкости в левом колене, направив ось X вдоль колена и поместив начало координат в равновесное положение поверхности жидкости в этом колене (см. рис.9). Пусть масса единицы длины жидкости в трубке ρ. Тогда масса всей жидкости ρl. При колебаниях скорость жидкости равна производной x' от координаты x по времени. Кинетическая энергия всей жидкости равна

$$E_k = \frac{\rho l(x')^2}{2}.$$

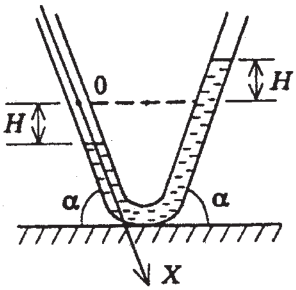

Рис.9

Теперь выразим потенциальную энергию жидкости через координату x. Если в *левом* колене уровень жидкости сместился вдоль трубки на x вниз, то по вертикали он опустился на $H = x \sin \alpha$ в левом колене и поднялся на H в правом. Это эквивалентно тому, что жидкость массой ρx была перенесена из левого колена в правое, поднявшись на высоту H. Потенциальную энергию жидкости в положении равновесия примем за нуль.

Тогда $\quad E_p = \rho xgH = \rho gx^2\sin\alpha.$

Полная энергия жидкости $E_k + E_p$ при колебаниях сохраняется:

$$\frac{\rho l(x')^2}{2} + \rho gx^2\sin\alpha = const.$$

Дифференцируем уравнение по времени:

$$\rho lx'x'' + 2\rho gxx'\sin\alpha = 0.$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний для величины x:

$$x'' + \frac{2g\sin\alpha}{l}x = 0.$$

Итак, колебания жидкости в трубке гармонические с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g\sin\alpha}}.$$