Рыбаков Александр Борисович
Кандидат физико-математических наук, учитель физики гимназии №144, г. Санкт-Петербург.

Кинематика падающей лестницы

В статье анализируется один тип сложного движения твёрдого тела – движение падающей лестницы. Цель статьи – расширить «репертуар» учителя (и ученика), дать учителю дополнительный материал для профильного курса (или факультатива). Поэтому особое внимание уделено тому «инструментарию», тем приёмам, которые используются при анализе движения.

В школьном курсе кинематики преимущественно рассматриваются задачи о движении точки. Что же касается движений твёрдого тела, то рассматриваются лишь два простых частных случая: поступательное и вращательное движения.

Движение твёрдого тела, не являющееся в «неподвижной» системе отсчёта ни поступательным, ни вращательным, будем называть *сложным*. Лишь один случай такого движения иногда рассматривают в школьном курсе – качение колеса по плоскости без проскальзывания. Здесь мы хотим рассмотреть ещё один случай сложного движения твёрдого тела, который, как оказалось, можно проанализировать вполне элементарно. В частности, будут описаны такие приёмы анализа движения, как введение *мгновенного центра вращения* и переход в систему отсчёта, где рассматриваемое движение оказывается *простым*. Мы хотим иметь возможность, зная движение какой-то точки тела, определять траектории, скорости и ускорения всех его точек. Напомним, что траектории точек катящегося колеса оказываются весьма сложными (циклоиды!), а расчёт скоростей и ускорений (если воспользоваться указанными приёмами) – очень простым.

«Ой, лестница падает!»

Мы будем вести речь о движении твёрдого стержня, своими концами скользящего по взаимно перпендикулярным направляющим. Если пользоваться житейскими ассоциациями, то можно говорить о «падении» лестницы. Используя лестницу в быту, мы обычно прислоняем её к стенке так, чтобы трение о пол (и о стену) удерживало её от падения. Если же трение недос-

татoчно велико, то лестница будет «падать», т. е. скользить своими концами по стене и по полу. Именно такое движение мы и будем ниже рассматривать. Реальная лестница при больших скоростях скольжения по полу может оторваться от стены. Мы ниже предполагаем, что эта скорость не слишком велика, так что отрыва от стены не происходит.

Поставим самые напрашивающиеся вопросы о параметрах движения разных точек лестницы и ответим на них. Подчеркнём, что речь идёт о кинематике, так что силы, действующие на лестницу, нас здесь не интересуют.

Договоримся об обозначениях, которые мы будем ниже использовать. Длину лестницы обозначим L. Будем отсчитывать координаты разных точек лестницы x и y вдоль пола и стенки соответственно (рис. 1). Концы лестницы – A и B, а их координаты – X и Y соответственно. Угол наклона лестницы к полу обозначим φ.

Начнём с простой задачи на расчёт траекторий, по которым движутся точки лестницы.

Задача 1. Котёнок сидит на ступеньке лестницы в точке C, отстоящей от нижнего конца лестницы на расстояние a. По какой траектории он движется при падении лестницы?

Решение. Обозначим расстояние от котёнка до верхнего конца лестницы $b = L - a$ (рис. 1). Легко видеть, что координаты котёнка:

$$x = b\cos\varphi, \qquad (1)$$

$$y = a\sin\varphi. \qquad (1')$$

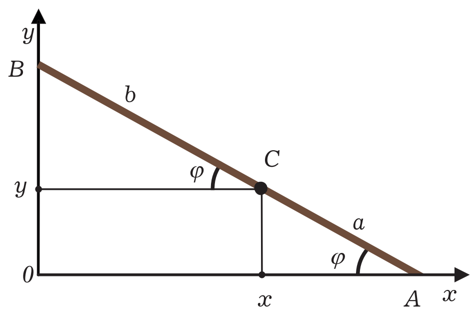

Рис. 1

Возведя эти равенства в квадрат и сложив их почленно, получим:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \qquad (2)$$

Кривую, описываемую уравнением (2), в школьном курсе обычно не рассматривают. На несколько наивном языке можно было бы сказать, что это уравнение окружности, растянутой (или сжатой) вдоль одной из осей.

На строгом же языке, (2) – это уравнение эллипса с осями $2a$ и $2b$. Траектория котёнка от стенки до пола показана на рис. 2. Так что мы неожиданно для себя обосновали простейший способ рисования эллипса с заданными осями. Потому-то рассматриваемую нами систему иногда называют эллипсографом.

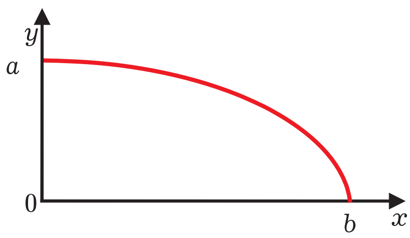

Рис. 2

Теперь, конечно, хотелось бы рассчитать путь котёнка. Увы, длина дуги эллипса через элементарные функции не выражается.

Если учитель сочтёт, что уравнение эллипса рассматривать в школьном курсе не стоит, то можно ограничиться случаем, когда котёнок сидит на середине лестницы. В этом случае уравнение (2) принимает вид

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2. \qquad (3)$$

Ученики должны знать, что (3) – это уравнение окружности радиуса $L/2$. Так что котёнок, сидящий на середине лестницы, проедет от стенки до пола путь $\pi L/4$.

Двинемся дальше.

Задача 2. Известны скорость v_0, с которой нижний конец лестницы скользит по полу, и угол наклона лестницы к полу φ. Найти величину скорости верхнего конца лестницы v_B в этот момент.

Эта задача послужит нам полигоном, на котором мы продемонстрируем разные приёмы анализа движения твёрдого тела.

Если учащиеся уже владеют понятием производной, им наверняка будет интересно ознакомиться со следующим простым, «прямым» способом решения этой задачи.

Решение. Ясно, что по теореме Пифагора для координат X и Y концов лестницы имеем:

$$X^2 + Y^2 = L^2. \qquad (4)$$

Продифференцируем это равенство по времени, получим:

$$X \cdot \dot{X} + Y \cdot \dot{Y} = 0. \qquad (5)$$

Здесь мы производные по времени обозначаем точкой над обозначением функции, как это принято в физике. Ясно, что $\dot{X}$ и $\dot{Y}$ – это проекции скоростей концов лестницы на соответствующие оси координат, т. е. $\dot{X} = v_{Ax} = v_0$, $\dot{Y} = v_{By}$. Поэтому из (5) получаем:

$$v_{By} = -\frac{X}{Y} v_0 = -\frac{v_0}{\mathrm{tg}\,\varphi}, \text{ т. е.}$$

$$v_B = \frac{X}{Y} v_0 = \frac{v_0}{\mathrm{tg}\,\varphi}. \qquad (6)$$

Другие способы решения этой задачи (не использующие понятие производной) мы рассмотрим ниже.

Задавшись какой-нибудь зависимостью $v_0(t)$, можно найти ускорение точки B – просто взяв производную по времени от (6). Впрочем, может оказаться, что проще найти ускорение, продифференцировав соотношение (5) по времени.

Задача 3. Считая, что скорость v_0 не меняется со временем, найти ускорение точки B в тот момент, когда лестница составляет с полом угол φ.

Это простое математическое упражнение. Приведём сразу ответ:

$$a_{By} = \dot{v}_{By} = -\frac{v_0^2}{L\sin^3\varphi}. \qquad (7)$$

Выкладки приведены в конце статьи.

Теорема о проекциях скоростей

Пусть твёрдое тело движется произвольным образом. Выделим в теле две любые точки и прямую, проходящую через них (рис. 3). Скорости точек $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Проекции скоростей на эту прямую будем помечать индексом s.

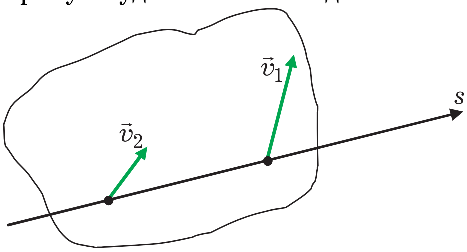

Рис. 3

За малый промежуток времени Δt первая точка сместится вдоль этой прямой на $v_{1s}\Delta t$, а вторая – на $v_{2s}\Delta t$. Но в твёрдом теле расстояние между двумя точками не может измениться, следовательно:

$$v_{1s} = v_{2s}. \qquad (8)$$

Итак, при любом движении твёрдого тела проекции скоростей двух точек тела на соединяющую их прямую должны быть равны. Это утверждение может оказаться очень полезным при решении разных задач. Покажем это на примере задачи 2.

Решение задачи 2. Спроектируем скорости концов лестницы на направление лестницы и воспользуемся сформулированным только что утверждением, получим:

$$v_A\cos\varphi = v_B\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right). \qquad (9)$$

Отсюда сразу следует уже известное нам соотношение (6).

Мгновенный центр вращения и всякое такое

Итак, мы задаёмся значением скорости нижнего конца лестницы v_0 и хотим найти скорости других точек. Есть несколько способов решения такого рода задач.

Один известный приём опирается на использование понятия мгновенного центра вращения (МЦВ). С этим понятием учащихся обычно знакомят при анализе качения колеса по плоскости. Если колесо катится без проскальзывания, то нижняя точка колеса неподвижна относительно земли, т. е. является МЦВ. В этот момент времени скорости всех точек распределены так, как если бы колесо вращалось вокруг этой точки, т. е. векторы скоростей всех точек перпендикулярны радиус-вектору, проведённому из МЦВ в рассматриваемую точку, а величины скоростей пропорциональны длине этого радиус-вектора.

Если тело движется непоступательно, то в любой момент времени существует МЦВ.

Как его найти?

Ясно, что МЦВ лежит на перпендикуляре к вектору скорости любой точки тела. Так что, если мы знаем направление скоростей каких-нибудь двух точек тела, то, восстановив перпендикуляры к этим векторам и найдя точку пересечения, мы и находим МЦВ. При этом, конечно, может оказаться, что МЦВ лежит вне тела.

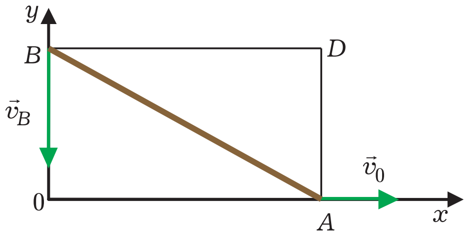

Рис. 4

Для падающей лестницы это построение приводит к точке D (рис. 4).

Снова вернёмся к задаче 2. Покажем, как легко она решается с использованием МЦВ.

Решение задачи 2. Точка B отстоит от МЦВ на расстояние $X = \cos\varphi$, а точка A – на расстояние $Y = L\sin\varphi$. Скорости разных точек тела, как уже сказано, пропорциональны расстояниям до МЦВ. Откуда сразу следует формула (6).

Так же легко найти скорость произвольной точки лестницы.

Задача 4. Известны скорость v_0, с которой нижний конец лестницы скользит по полу, и угол наклона лестницы к полу φ. Найти величину скорости точки C, отстоящей от нижнего конца лестницы на расстояние a.

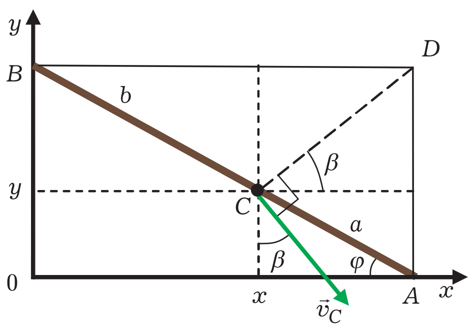

Рис. 5

Решение. Вспомним, что скорость точки пропорциональна расстоянию от этой точки до МЦВ. Найдём длину отрезка CD. Его x-проекция равна $a\cos\varphi$, а y-проекция равна $b\sin\varphi$. Поэтому для скорости точки C имеем:

$$v_C = v_0\frac{CD}{AD} = \frac{v_0}{L}\sqrt{\frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi}} = \frac{v_0}{L}\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{\mathrm{tg}^2\varphi}}. \tag{10}$$

Найдём угол β, который вектор скорости точки C составляет с вертикалью. Этот вектор должен быть перпендикулярен отрезку CD. Пользуясь равенством отмеченных на рис. 5 углов (они равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами), легко получить, что

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{b}{a}\mathrm{tg}\varphi. \tag{11}$$

Задача 5. Известны скорость v_0, с которой нижний конец лестницы скользит по полу, и угол наклона лестницы к полу φ. Найти угловую скорость вращения лестницы ω.

Решение. На малом промежутке времени движение лестницы – это вращение вокруг МЦВ. Об угловой скорости этого вращения и идёт речь. Решение очевидно: поскольку $v_A = \omega Y$, то

$$\omega = \frac{v_0}{L\sin\varphi}. \tag{12}$$

Задача 6. Известны скорость v_0, с которой нижний конец лестницы скользит по полу, и угол наклона лестницы к полу φ. Найти скорость движения МЦВ лестницы.

Здесь надо сначала объяснить, что обычно понимают под скоростью движения МЦВ. Скорость той точки твёрдого тела, которая в данный момент времени является МЦВ, равна нулю, но по истечении малого промежутка времени Δt уже другая точка, отстоящая от первой на Δl, будет являться МЦВ. Величину

$$W = \frac{\Delta l}{\Delta t} \tag{13}$$

и называют скоростью движения МЦВ.

Очевидно, что для катящегося колеса скорость МЦВ совпадает со скоростью оси колеса.

Решение. Если обратиться снова к рис. 5, то сразу ясно, что скорость МЦВ (точки D) в 2 раза больше, чем скорость центра лестницы. Подставляя в формулу (10) $a{=}b{=}L/2$ и учитывая $W{=}2v_C$, получаем:

$$W=\frac{v_0}{\sin\varphi}. \qquad (14)$$

В другой системе отсчёта

Совсем кратко скажем ещё об одном способе анализа движения твёрдого тела.

Учащимся знаком этот способ рассуждений – переход в систему отсчёта (СО), в которой движение выглядит проще. В задаче о падении лестницы удобно перейти в СО, которая движется вдоль пола со скоростью v_0. Будем называть эту СО «скользящей». В ней нижний конец лестницы A неподвижен, а лестница вращается вокруг точки A. Будем помечать скорости точек в «скользящей» СО штрихом. Ясно, что в этой СО стенка движется со скоростью $\vec{v}\,'_{\text{ст}}=-\vec{v}_0$. Тогда несложно найти и скорость произвольной точки лестницы – вектор скорости любой точки перпендикулярен лестнице (т. е. составляет с вертикалью угол φ), а его величина пропорциональна расстоянию до оси вращения (рис. 6). Потом, конечно, надо будет вернуться в «неподвижную» СО по формуле сложения скоростей: $\vec{v}=\vec{v}\,'+\vec{v}_0$. Очевидно, впрочем, что вертикальные компоненты скоростей в этих двух системах отсчёта совпадают.

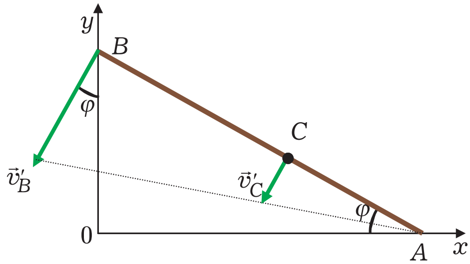

Рис. 6

Очень советую читателю получить формулы (10) и (11), пользуясь этим способом.

И, конечно, решить задачу 2 этим (уже четвёртым!) способом.

Заключение

Итак, мы проанализировали падение лестницы вдоль вертикальной стены. Но, конечно, продемонстрированные нами приёмы анализа движения будут работать и в близких сюжетах, в похожих задачах. Например, в задачах о скольжении лестницы вдоль наклонной стенки. Или о скольжении лестницы, опирающейся на какой-то выступ.

Задача 7. Лестница скользит, опираясь на выступ (рис. 7). Известна скорость нижнего конца лестницы v_0 и угол наклона лестницы φ. Найти скорость v, с которой лестница скользит по верхней точке выступа.

Решение. Что значит, что «лестница скользит по выступу»? Это значит, что у вектора скорости той точки лестницы, которая в данный момент соприкасается с выступом, нет нормальной (к лестнице) составляющей. Тогда, применяя (8), имеем:

$$v{=}v_0\cos\varphi. \qquad (14)$$

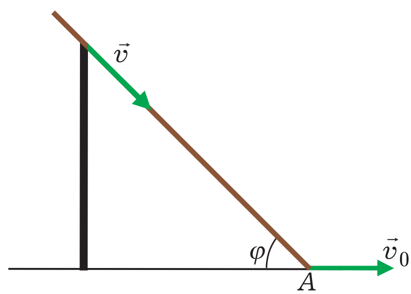

Рис. 7

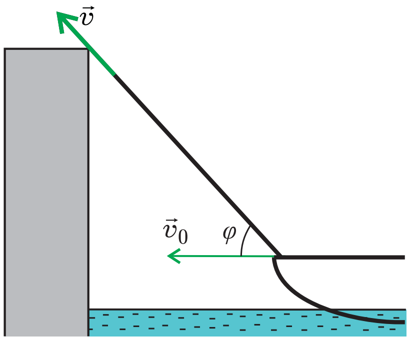

Рис. 8

Читатель, я думаю, увидит полную аналогию между этой задачей и известной школьной задачей о подтягивании лодки к берегу при помощи верёвки (рис. 8). Верёвка, конечно, не твёрдое тело, но она нерастяжима, а следовательно, расстояние между двумя точками верёвки остаётся неизменным. А только это и нужно для справедливости формулы (8).

Читатель может проверить, как усвоен материал статьи, на следующей простой задаче. Её решение основывается только на приёмах, описанных выше (и элементарной геометрии).

Задача 8. В условиях задачи 7 найти угловую скорость лестницы.

Решения и ответы

К задаче 3. y-проекцию ускорения верхнего конца лестницы (точки B) найдём, дифференцируя (6) по времени:

$$a_{By} = \dot{v}_{By} = -v_0 \left(\frac{X}{Y}\right)' =$$

$$= -v_0 \frac{\dot{X}Y - X\dot{Y}}{Y^2} = -\frac{v_0^2}{Y^2}\left(Y + \frac{X^2}{Y}\right) =$$

$$= -\frac{v_0^2}{Y^2}\frac{L^2}{Y} = -\frac{v_0^2}{L\,\sin^3\varphi}.$$

К задаче 8. Уже известным нам способом находим МЦВ. Он расположен на одной вертикали с точкой A. Несложно установить, что высота МЦВ над полом равна $H = h/\sin^2\varphi$. Поэтому

$$\omega = \frac{v_0}{H} = \frac{v_0}{h}\sin^2\varphi.$$

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Вот такая физика...

– Какие виды механического движения вам известны?
– Железнодорожное, автодорожное и тропиночное.

* * *

– Как движется тело, когда его ускорение равно нулю?
– Потихоньку...