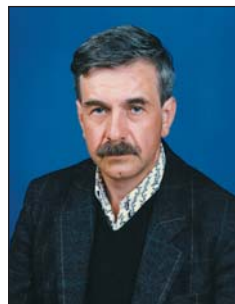


**Рыбаков Александр Борисович**

*Кандидат физико-математических наук, учитель физики гимназии №144, г. Санкт-Петербург.*



## Кинематика падающей лестницы

В статье анализируется один тип сложного движения твёрдого тела – движение падающей лестницы. Цель статьи – расширить «репертуар» учителя (и ученика), дать учителю дополнительный материал для профильного курса (или факультатива). Поэтому особое внимание уделено тому «инструментарно», тем приёмам, которые используются при анализе движения.

В школьном курсе кинематики преимущественно рассматриваются задачи о движении точки. Что же касается движений твёрдого тела, то рассматриваются лишь два простых частных случая: поступательное и вращательное движения.

Движение твёрдого тела, не являющееся в «неподвижной» системе отсчёта ни поступательным, ни вращательным, будем называть *сложным*. Лишь один случай такого движения иногда рассматривают в школьном курсе – качение колеса по плоскости без проскальзывания. Здесь мы хотим рассмотреть ещё один случай сложного движения твёрдого тела,

который, как оказалось, можно проанализировать вполне элементарно. В частности, будут описаны такие приёмы анализа движения, как введение *мгновенного центра вращения* и переход в систему отсчёта, где рассматриваемое движение оказывается *простым*. Мы хотим иметь возможность, зная движение какой-то точки тела, определять траектории, скорости и ускорения всех его точек. Напомним, что траектории точек катящегося колеса оказываются весьма сложными (циклоиды!), а расчёт скоростей и ускорений (если воспользоваться указанными приёмами) – очень простым.

### «Ой, лестница падает!»

Мы будем вести речь о движении твёрдого стержня, своими концами скользящего по взаимно перпендикулярным направляющим. Если пользоваться житейскими ассоциациями, то

можно говорить о «падении» лестницы. Используя лестницу в быту, мы обычно прислоняем её к стенке так, чтобы трение о пол (и о стену) удерживало её от падения. Если же трение недос-









Очевидно, что для катящегося колеса скорость МЦВ совпадает со скоростью оси колеса.

**Решение.** Если обратиться снова к рис. 5, то сразу ясно, что скорость МЦВ (точки  $D$ ) в 2 раза больше, чем

скорость центра лестницы. Подставляя в формулу (10)  $a=b=L/2$  и учитывая  $W=2v_C$ , получаем:

$$W = \frac{v_0}{\sin\varphi}. \quad (14)$$

### В другой системе отсчёта

Совсем кратко скажем ещё об одном способе анализа движения твёрдого тела.

Учащимся знаком этот способ рассуждений – переход в систему отсчёта (СО), в которой движение выглядит проще. В задаче о падении лестницы удобно перейти в СО, которая движется вдоль пола со скоростью  $v_0$ . Будем называть эту СО «скользящей». В ней нижний конец лестницы  $A$  неподвижен, а лестница вращается вокруг точки  $A$ . Будем помечать скорости точек в «скользящей» СО штрихом. Ясно, что в этой СО стенка движется со скоростью  $\vec{v}'_{ст} = -\vec{v}_0$ . Тогда несложно найти и скорость произвольной точки лестницы – вектор скорости любой точки перпендикулярен лестнице (т. е. составляет с вертикалью угол  $\varphi$ ), а его величина пропорциональна расстоянию до оси вращения (рис. 6). Потом,

конечно, надо будет вернуться в «неподвижную» СО по формуле сложения скоростей:  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$ . Очевидно, впрочем, что вертикальные компоненты скоростей в этих двух системах отсчёта совпадают.

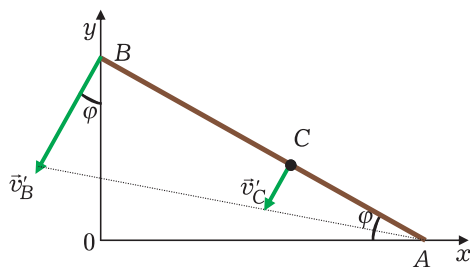


Рис. 6

Очень советую читателю получить формулы (10) и (11), пользуясь этим способом.

И, конечно, решить задачу 2 этим (уже четвёртым!) способом.

### Заключение

Итак, мы проанализировали падение лестницы вдоль вертикальной стены. Но, конечно, продемонстрированные нами приёмы анализа движения будут работать и в близких сюжетах, в похожих задачах. Например, в задачах о скольжении лестницы вдоль наклонной стенки. Или о скольжении лестницы, опирающейся на какой-то выступ.

**Задача 7.** Лестница скользит, опираясь на выступ (рис. 7). Известна скорость нижнего конца лестницы  $v_0$  и угол наклона лестницы  $\varphi$ . Найти скорость  $v$ , с которой лестница скользит по верхней точке выступа.

**Решение.** Что значит, что «лестница скользит по выступу»? Это значит,

что у вектора скорости той точки лестницы, которая в данный момент соприкасается с выступом, нет нормальной (к лестнице) составляющей. Тогда, применяя (8), имеем:

$$v = v_0 \cos\varphi. \quad (14)$$

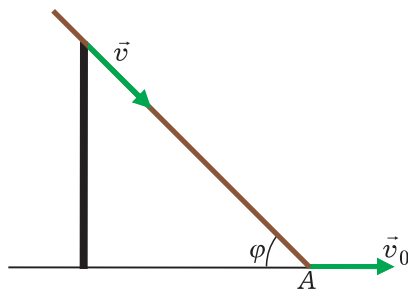


Рис. 7

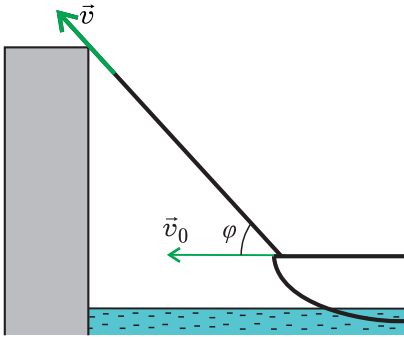


Рис. 8

Читатель, я думаю, увидит полную аналогию между этой задачей и известной школьной задачей о подтягивании лодки к берегу при помощи верёвки (рис. 8). Верёвка, конечно, не твёрдое тело, но она нерастяжима, а следовательно, расстояние между двумя точками верёвки остаётся неизменным. А только это и нужно для справедливости формулы (8).

Читатель может проверить, как усвоен материал статьи, на следующей простой задаче. Её решение основывается только на приёмах, описанных выше (и элементарной геометрии).

**Задача 8.** В условиях задачи 7 найти угловую скорость лестницы.



### Решения и ответы

**К задаче 3.**  $y$ -проекцию ускорения верхнего конца лестницы (точки  $B$ ) найдём, дифференцируя (6) по времени:

$$\begin{aligned} a_{By} &= \dot{v}_{By} = -v_0 \left( \frac{X}{Y} \right)' = \\ &= -v_0 \frac{\dot{X}Y - X\dot{Y}}{Y^2} = -\frac{v_0^2}{Y^2} \left( Y + \frac{X^2}{Y} \right) = \\ &= -\frac{v_0^2 L^2}{Y^2 Y} = -\frac{v_0^2}{L \sin^3 \varphi}. \end{aligned}$$

**К задаче 8.** Уже известным нам способом находим МЦВ. Он расположен на одной вертикали с точкой  $A$ . Несложно установить, что высота МЦВ над полом равна  $H = h/\sin^2 \varphi$ . Поэтому

$$\omega = \frac{v_0}{H} = \frac{v_0}{h} \sin^2 \varphi.$$

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

### Вот такая физика...

- Какие виды механического движения вам известны?
- Железнодорожное, автодорожное и тропиночное.

\* \* \*

- Как движется тело, когда его ускорение равно нулю?
- Потихоньку...