Подлесный Дмитрий Владимирович
Заместитель директора по развитию, научный руководитель ГБОУ РМ «Республиканский лицей», кандидат педагогических наук, доцент, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, народный учитель Республики Мордовия.

Катаем колесо по кругу

В статье рассматриваются вопросы, связанные с колесом, катящимся исключительно без проскальзывания по некоторой поверхности. Получено выражение для кинетической энергии колеса, движущегося в одной плоскости и катающегося по кругу. Вопросу об энергии колеса, движущегося в одной плоскости, уделено много внимания в учебной физической литературе, а вот рассмотрение вопроса об энергии движущегося по кругу колеса в литературе для школьников автору не встречалось, за исключением задачи №476, включённой в сборник [1]. Данная задача, составленная автором, предлагалась на Приморской заочной олимпиаде школьников по физике в 2007 году.

Одним из рассмотренных вопросов является эффект увеличения силы давления колеса на поверхность, связанный с движением колеса по кругу. Данный эффект используется в дисковых мельницах [2, стр. 297-298, задача №6], однако он проявляется не всегда (!). Всё зависит от конструктивных особенностей мельницы. Но обо всём по порядку.

1. Движение в одной вертикальной плоскости

1.1. Кинетическая энергия колеса

Рассмотрим колесо, состоящее из тонкого обода массой m и лёгких спиц, катящееся со скоростью V (V – скорость центра колеса) без проскальзывания по некоторой поверхности (рис. 1), и находящееся всё время в одной вертикальной плоскости. Найдём кинетическую энергию K данного колеса.

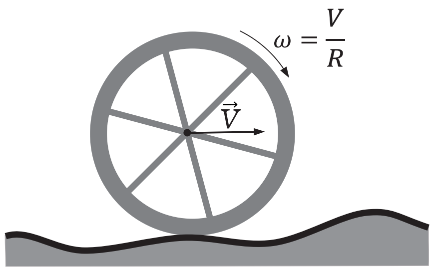

Рис. 1

Данный вопрос не нов и разобран во многих задачниках и методических пособиях. И тем не менее напомним основные рассуждения, приводящие к результату: $K = mV^2$.

В самом деле, кинетическая энергия колеса равна сумме энергий частей (материальных точек), на которые мысленно можно разбить его обод (энергией спиц мы пренебрегаем, так как они лёгкие).

Разобьём мысленно массивный обод на $2N$ равных частей и рассмотрим произвольную пару частей A и B, лежащих на одном диаметре (рис. 2). Пусть α – угол, образуемый этим диаметром с нормалью к поверхности, по которой катится колесо. Тогда для кинетической энергии этой пары частей имеем:

$$K_1 = \frac{m_1 V_A^2}{2} + \frac{m_1 V_B^2}{2},$$

где $m_1 = \frac{m}{2N}$ – масса одной части, а V_A и V_B – скорости частей A и B соответственно.

Принимая во внимание, что точка C колеса (рис. 2), контактирующая с поверхностью, имеет нулевую скорость ($V_C = 0$, так как колесо катится без проскальзывания), нетрудно найти линейную скорость вращательного движения $V_{\text{вр}}$ точек обода колеса в поступательно движущейся со скоростью $\vec{V}$ системе отсчёта. В самом деле, в соответствии с законом сложения скоростей приходим к уравнению: $V_C = V - V_{\text{вр}} = 0$, откуда $V_{\text{вр}} = V$. Кстати, угловая скорость ω вращения колеса при рассматриваемом движении $\omega = \frac{V}{R}$, что символически показано на рис.1.

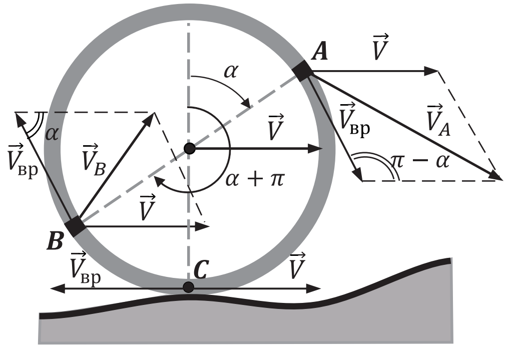

Рис. 2

С учётом этого для скоростей V_A и V_B приходим к соотношениям:

$$V_A^2 = 2V^2(1+\cos\alpha) = 4V^2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

$$V_B^2 = 2V^2(1-\cos\alpha) = 4V^2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

и находим кинетическую энергию рассматриваемой пары частей $K_1 = 2m_1V^2$.

Видим, что энергия рассматриваемой пары частей не зависит от угла α. Таких пар у нас N штук. Следовательно, искомое значение кинетической энергии:

$$K = NK_1 = 2Nm_1V^2 = mV^2. \qquad (1)$$

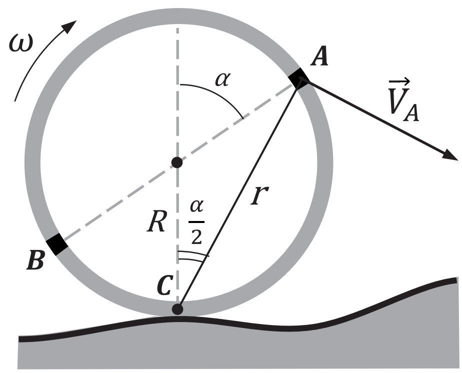

Рис. 3

Заметим, что к выражениям для скоростей точек обода в некоторый момент времени можно прийти и через рассмотрение мгновенного вращения колеса относительно точки C с угловой скоростью ω. Так для точки A (рис. 3) имеем:

$$V_A = \omega \cdot r = \omega \cdot 2R\cos\frac{\alpha}{2} = 2V\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Аналогично нетрудно получить и выражение для скорости точки B $\left(V_B = 2V\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

1.2. Скатывание с горки

Рассмотрим скатывание без начальной скорости и без проскальзывания колеса, описанного выше, с горки высотой h и найдём скорость V центра колеса у подножья горки (рис. 4). Ускорение свободного падения g считаем известным.

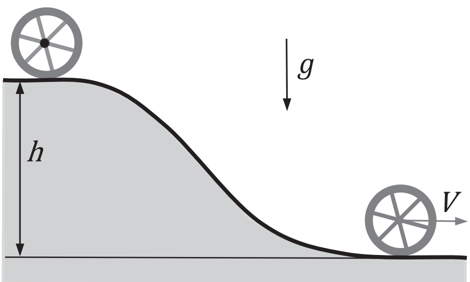

Рис. 4

При движении обруча на него, кроме силы тяжести и силы нормальной реакции, действует сила трения. Однако, при отсутствии проскальзывания сила трения работы не совершает (диссипации энергии не происходит) и, следовательно, мы можем воспользоваться законом сохранения механической энергии: $mgh = mV^2$, откуда находим искомую скорость: $V = \sqrt{gh}$.

В случаях, если с горки без проскальзывания скатывается колесо с массивными спицами, а также диск, шар или другое подобное тело, задача нахождения скорости V аналогично решается при помощи закона сохранения механической энергии. Правда здесь потребуются знания, выходящие за рамки программы средней школы. Впрочем, продвинутый читатель в состоянии с этим разобраться.

Кинетическую энергию катящегося тела следует выразить на основании теоремы Кёнига, записать закон сохранения энергии и найти искомую скорость:

$$mgh = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2} = \frac{mV^2}{2}\left(1 + \frac{I_c}{mR^2}\right),$$

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I_c}{mR^2}}}.$$

Здесь $V_c = V$ – скорость движения центра масс катящегося тела;

$\omega = \frac{V}{R}$ – угловая скорость вращения тела;

I_c – момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через его центр масс.

Так для обруча, например, $I_c = mR^2$ и мы приходим к ранее полученному результату. Для однородного диска: $I_c = \frac{1}{2}mR^2$; для однородного шара: $I_c = \frac{2}{5}mR^2$; для однородной тонкостенной сферической оболочки (например, футбольного мяча): $I_c = \frac{2}{3}mR^2$. Но вернёмся к нашему колесу.

2. Движение по кругу

2.1. Кинетическая энергия колеса, катающегося по кругу

По-прежнему рассматриваем колесо, состоящее из обода массой m, радиуса R и лёгких спиц. Добавим в конструкцию лёгкую жёсткую цилиндрическую втулку O (подшипник), и закрепим её на колесе в точке пересечения спиц. Насадим теперь колесо на один из концов лёгкой горизонтальной оси OP длиной L (ось OP перпендикулярна плоскости колеса), жёстко соединённой с другой втулкой P, насаженной на неподвижную вертикальную ось MQ (рис. 5).

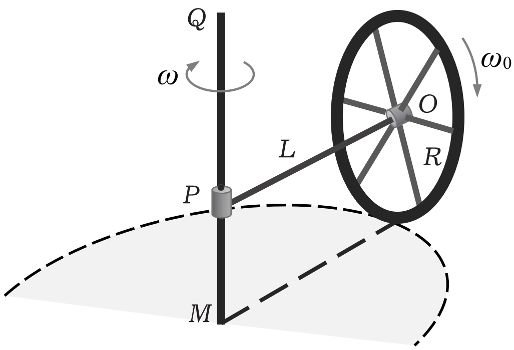

Рис. 5

Найдём кинетическую энергию колеса при его качении без проскальзывания по горизонтальной поверхности с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси.

В подвижной системе отсчёта, вращающейся вместе с горизонтальной осью колеса с угловой скоростью ω, движение колеса представляет собой вращение «на месте» с некоторой угловой скоростью ω_0. Эту угловую скорость можно найти, принимая во внимание, что движение колеса происходит без проскальзывания.

Выражая скорость нижней точки колеса по закону сложения скоростей и приравнивая её к нулю, приходим к уравнению: $\omega L - \omega_0 R = 0$ и находим:

$$\omega_0 = \frac{L}{R}\omega.$$

Выразим теперь скорость произвольной точки A колеса. Пусть α – угол, образуемый радиусом, проведённым к этой точке, с вертикалью. Согласно закону сложения скоростей, скорость точки в неподвижной системе отсчёта равна векторной сумме относительной $\vec{V}_1$ и переносной $\vec{V}_2$ скоростей: $\vec{V}_A = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$

В нашем случае (рис. 6 и рис. 7) для модулей относительной и переносной скоростей имеем:

$$V_1 = \omega_0 R = \omega L;$$

$$V_2 = \omega r = \omega\sqrt{L^2 + (R\sin\alpha)^2}.$$

Найдём проекции скоростей $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ на три взаимно перпендикулярные оси x, y и z, показанные на рисунках 6 и 7 (оси x и z – горизонтальные, ось y – вертикальная):

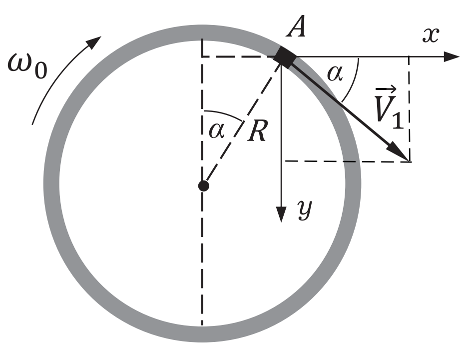

Рис. 6

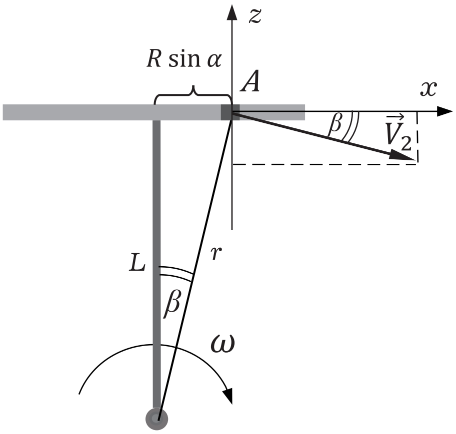

Рис. 7

$$V_{1x} = V_1 \cos\alpha = \omega L \cos\alpha,$$
$$V_{1y} = V_1 \sin\alpha = \omega L \sin\alpha, \quad V_{1z} = 0;$$
$$V_{2x} = V_2 \cos\beta = \omega r \frac{L}{r} = \omega L, \; V_{2y} = 0,$$
$$V_{2z} = -V_2 \sin\beta = -\omega r \frac{R\sin\alpha}{r} = -\omega R \sin\alpha.$$

Выразим квадрат скорости точки A:

$$V_A^2 = V_{Ax}^2 + V_{Ay}^2 + V_{Az}^2 =$$
$$= (V_{1x} + V_{2x})^2 + (V_{1y} + V_{2y})^2 + (V_{1z} + V_{2z})^2.$$

Подставляя сюда ранее найденные проекции скоростей, получим:

$$V_A^2 = (2L^2 + 2L^2 \cos\alpha + R^2 \sin^2\alpha)\omega^2 \qquad (2)$$

Перейдём теперь к выражению кинетической энергии колеса. Напомним, что в пункте 1.1 при нахождении энергии колеса, мы мысленно разбили его обод на $2N$ равных частей. При этом оказалось, что энергия пары частей, лежащих на одном диаметре, не зависела от ориентации этого диаметра в пространстве. Здесь обод колеса мы будем делить на $4N$ равных частей и рассматривать энергию четырёх частей (A и B, D и E), лежащих на двух взаимно перпендикулярных диаметрах. И у нас всё получится! Суммарная энергия K_4 таких четырёх частей не будет зависеть от угла α (рис. 8). В самом деле:

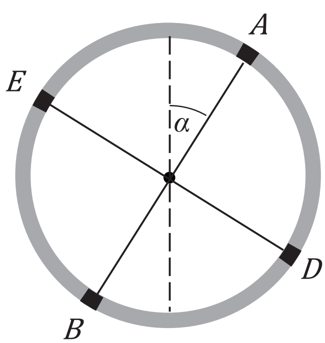

Рис. 8

$$K_4 = \frac{m_1' V_A^2}{2} + \frac{m_1' V_B^2}{2} + \frac{m_1' V_D^2}{2} + \frac{m_1' V_E^2}{2},$$

где $m_1' = \frac{m}{4N}$ – масса одной части, а скорости V_B, V_D и V_E рассчитываются по формуле (2) с учётом соответствующих этим точкам углов $\left(\alpha + \pi;\ \alpha + \frac{\pi}{2};\ \alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$

$$V_B^2 = (2L^2 - 2L^2 \cos\alpha + R^2 \sin^2\alpha)\omega^2,$$
$$V_D^2 = (2L^2 - 2L^2 \sin\alpha + R^2 \cos^2\alpha)\omega^2,$$
$$V_E^2 = (2L^2 + 2L^2 \sin\alpha + R^2 \sin^2\alpha)\omega^2.$$

Таким образом, кинетическая энергия четырёх частей, лежащих на двух взаимно перпендикулярных диаметрах:

$$K_4 = \frac{m}{N}\left(L^2 + \frac{1}{4}R^2\right)\omega^2.$$

С учётом этого окончательно имеем:

$$K = NK_4 = m\left(L^2 + \frac{1}{4}R^2\right)\omega^2. \qquad (3)$$

Принимая во внимание, что центр колеса движется со скоростью $V = \omega L$, для его кинетической энергии получаем выражение:

$$K = mV^2\left(1+\left(\frac{R}{2L}\right)^2\right). \qquad (4)$$

Заметим, что при $L \to \infty$ соотношение (4) переходит в ранее полученное соотношение (1). В самом деле, в этом случае движение колеса можно считать прямолинейным.

Соотношения (3) и (4) используются при решении нижеприведённых задач, оформленных в виде пунктов 2.2 и 2.3 [1, задача №365]. Предлагаем читателю решить эти задачи самостоятельно, используя подход с позиций сохранения механической энергии колеса.

2.2. <u>Колесо на горке катается по кругу</u>

Представьте себе, что в описанной ниже (в пункте 2.3) системе колесо располагают на горке на максимально возможной высоте. После чего колесо без начальной скорости скатывается без проскальзывания по горке. Найдите скорость V центра колеса в момент прохождения нижнего положения, показанного на рис.9.

[Ответ: $V = \sqrt{\dfrac{8L^3 g\sin\alpha}{4L^2 + R^2}}$.]

2.3. <u>Колебательное движение катающегося на горке колеса</u>

Колесо, состоящее из обода массой m и радиусом R, лёгких спиц и втулки O, насажано на лёгкую ось OP длиной L, соединённую через другую лёгкую втулку P с неподвижной осью MQ, находится на наклонной плоскости с углом наклона α (рис. 9). Ось OP параллельна наклонной плоскости и перпендикулярна плоскости колеса; ось MQ перпендикулярна наклонной плоскости. Найдите период малых колебаний колеса при его движении по наклонной плоскости без проскальзывания. Трением в осях пренебречь. Ускорение свободного падения g.

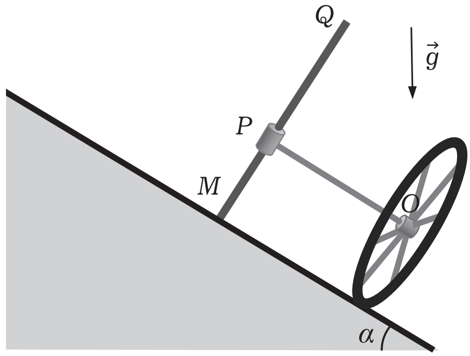

Рис. 9

[Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{4L^2 + R^2}{2Lg\sin\alpha}}$.]

2.4. <u>Об эффекте увеличения силы давления колеса на поверхность</u>

Возвращаемся к нашему колесу, катающемуся по кругу на горизонтальной поверхности, и найдём, как обещали в предисловии, силу давления F колеса на поверхность (рис. 10).

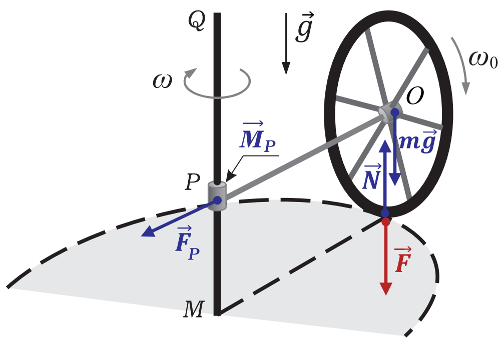

Рис. 10

Забегая вперёд, отметим, что никакого эффекта увеличения силы давления (по сравнению с силой тяжести mg) – так называемого «гироскопического эффекта», в описанной конструкции наблюдаться не будет!

В самом деле, втулка P (рис. 10), обеспечивающая соединение оси колеса с вертикальной осью MQ, может скользить по этой оси без трения. Таким образом, на систему «колесо – ось PO – втулки» в вертикальном направлении действуют только сила реакции поверхности $\vec{N}$ и сила тяжести $m\vec{g}$, а поскольку центр масс системы (центр колеса O) в вертикальном направлении не перемещается, то результирующая этих сил ($\vec{N}$ и $m\vec{g}$) равна нулю: $\vec{N}+m\vec{g}=0$. Тогда для искомой силы давления $\vec{F}$, на основании третьего закона Ньютона, имеем: $\vec{F}=-\vec{N}=m\vec{g}$, то есть сила давления колеса на поверхность в точности равна его силе тяжести и никакого увеличения этой силы, по сравнению с силой тяжести, не происходит. Гироскопический эффект (для нашей конструкции) отсутствует!

А как же быть с изменением момента импульса колеса, обусловленным поворотом его собственной оси вращения PO? Всё очень просто. Необходимый момент сил $\vec{M}_P$ действует на втулку P со стороны оси MQ. Он и обеспечивает постоянное изменение момента импульса рассматриваемой системы. Наряду с моментом сил со стороны оси MQ на втулку P действует и горизонтально направленная сила $\vec{F}_P$, отвечающая за ускорение, с которым движется центр масс колеса в горизонтальной плоскости.

А что же делать с гироскопическим эффектом, описанным во многих вузовских учебниках, в частности, в [2, стр. 297-298, задача №6]? Конечно же он проявляется, например, при шарнирном креплении точки P оси PO. Однако о способах крепления точки Р в источнике [2] не указывается (?!). В шарнире (разумеется, в отсутствие трения) никакого момента сил, действующего на систему, возникнуть не может, однако появляется сила реакции шарнира $\vec{N}_{ш}$, действие которой усиливает давления колеса на поверхность. Сила реакции N уже превосходит силу тяжести mg, и появляется результирующий момент сил относительно точки P, обеспечивающий необходимое изменение момента импульса колеса. Предлагаем читателю разобраться с этим вопросом самостоятельно. Приведём лишь результат расчёта силы давления нашего колеса при шарнирном (!) креплении точки P:

$$F=mg+m\omega^2R.$$

Отметим ещё раз, что в случае крепления оси колеса к вертикальной оси через втулку, способную двигаться без трения, как и предлагалось в рассмотренных выше примерах, увеличения силы давления не происходит:

$$F=mg!$$

Автор искренне благодарен доценту ВГУЭС И.И. Бажанскому – идейному вдохновителю физических олимпиад школьников в Приморском крае в последние десятилетия, за плодотворные обсуждения ряда задач, включённых в статью.

Литература

1. Сборник олимпиадных задач по физике. Том 1. Механика: учебно-методическое пособие/И.И. Бажанский; Центр «Абитуриент»; Владивостокский государственный университет экономики и сервиса – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2015. – 304 с. – ISBN 978-5-9736-0328-1.

2. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Учебное пособие: Для вузов. В 5 т. Т. 1. Механика.– 4-е изд., стереот. М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2002. – 560 с. – ISBN 5-9221-0225-7; 5-89155-078-4.