Мукушев Базарбек Агзашулы
Доктор педагогических наук,
профессор кафедры физики Государственного университета им. Шакарима г. Семей,
обладатель государственного гранта Республики Казахстан «Лучший преподаватель вуза – 2007 и 2012».

Как придумать новые задачи по физике?

О сколько нам открытий чудных
Готовят просвещенья дух,
И опыт, сын ошибок трудных,
И гений, парадоксов друг,
И случай, бог изобретатель.
А.С. Пушкин

Мы привыкли в своей повседневной жизни использовать готовые интеллектуальные продукты различного содержания: читаем стихи других авторов, пользуемся готовыми рецептами всевозможных блюд, создаём компьютерные программы по известному алгоритму, проводим физические эксперименты по описаниям, решаем школьные задачи из различных сборников. Но редко задумываемся о том, что все эти рецепты, правила и задачи являются плодами умственного труда немногих творческих людей.

Творение «нового» было всегда сложно. Также придумать новую задачу гораздо труднее, чем решать задачи, составленные другими авторами. В статье раскрыты эти сложности и изложены некоторые пути создания новых задач по физике.

Введение

Школьные физические задачи описывают условный мир точечных масс, невесомых нитей, идеальных газов и других совершенных тел, чтобы создать простую модель изучаемых физических явлений или объектов. В этом идеальном мире всё ясно до мелочей и конечные результаты всегда предсказуемы. Как метко заметил академик С.П. Капица, у физических задач много общего со сказкой [1]. Действительно, в мире сказок силы добра и зла чётко очерчены и нравственные вопросы отличаются ясностью ответа. В этом мире ярко и однозначно описываются поведение прекрасных принцев и чудовищных персонажей, полёты героев на коврах-самолётах в поисках жар-птиц и другие фантастические явления. В задачах тоже рассматриваются абстрактные физические объекты в идеальных, маловероятных условиях. Если сказки помогают вам познать духовный мир взрослых, то школьные задачи развивают ваше воображение, что первостепенно важно в процессе познания окружающего нас материального мира.

Более сложные задачи (нестандартные, оригинальные, исследовательские, олимпиадные и др.) постепенно приближают ученика к реальному физическому миру, и сам процесс решения требует от человека глубокого знания, воображения, интуиции, смекалки, настойчивости и изобретательности. При работе со сложной задачей, когда обычно вы имеете дело с более продвинутой моделью изучаемого физического явления, её решение возможно при выполнении многих взаимосвязанных между собой факторов и условий.

Один из интересных и полезных и в то же время сложных умственных поисков ученика – это придумывание новых задач по физике. Создание новой задачи сродни сочинению нового художественного произведения (стиха, рассказа, новеллы). Без сомнения, новые задачи рождаются в условиях системного, целенаправленного и кропотливого творческого труда человека.

Однако между простыми и сложными задачами не существует чёткой границы. Школьные или популярные физические задачи можно доводить до уровня более продвинутых, то есть можно создать новые задачи, совершенствуя или переделывая их условия.

Нашим читателям, занимающимся конструированием оригинальных задач, следует прежде всего уметь совершенствовать содержание известных (или базисных) задач, добавив к их условиям новые элементы, и получить новые результаты. Мы ниже рассмотрим пять примеров из механики, которые раскрывают некоторую процедуру эволюции физических задач от уровня простого до уровня сложного, то есть создания новой задачи.

Конструирование задачи с помощью включения новых элементов в её условие

Пример 1. Базисная задача. Автобус первую половину пути проехал со скоростью, в 8 раз большей, чем вторую. Средняя скорость автобуса на всём пути $v_{\text{ср}} = 16$ км/час. Найти значения скорости на каждом участке пути.

Решение. Обозначим через v_1 скорость автобуса на первой половине пути и через v_2 – на второй половине. При этом $v_1 = 8v_2$. Напишем общую формулу средней скорости для этого случая:

$$v_{\text{ср}}=\frac{S_1+S_2}{t_1+t_2}, \qquad (1)$$

где $S_1+S_2=S$ – полный путь. $S_1=S_2=S/2;$ $t_1=\frac{S_1}{v_1}=\frac{S}{2v_1}$ и $t_2=\frac{S_2}{v_2}=\frac{S}{2v_2}$. Подставляя эти значения в уравнение (1), получим $v_{\text{ср}}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}=\frac{16}{9}v_2$. Из последнего уравнения находим $v_2=$ 9 км/час и $v_1=$ 72 км/час.

Включение новых элементов в задачу.

а) Найдите среднюю скорость автобуса на первых 2/3 пути.

б) Чему равна средняя скорость автобуса за первые 2/3 времени движения?

Решение новой задачи. а) Пусть автобус проехал первую половину пути за время τ_1, а вторую половину пути – за τ_2. Из равенства путей напишем $v_1\tau_1=v_2\tau_2$, откуда следует $\tau_2=8\tau_1$. Продолжительность всего пути равна $t=s/v_{\text{ср}}$, или равна $t=9\tau_1$. Значит, первую половину пути автобус проехал за $t/9$ время, а вторую половину – за $8t/9$. Нарисуем график зависимости скорости автобуса от времени (рис. 1).

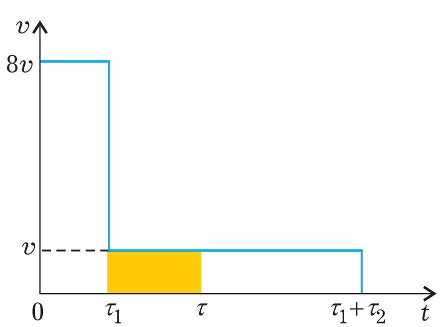


Рис. 1

За время τ_1 автобус проехал $S/2$ пути, а за время τ – $2S/3$. Очевидно, за ($\tau-\tau_1$) автобус проехал $2S/3$ – $S/2=S/6$ (закрашенная часть графика). Поскольку $8v_2\cdot\tau_1=S/2$ и $v_2\cdot(\tau-\tau_1)=S/6$, то $\tau-\tau_1=8\tau_1/3$, или $\tau=11\tau_1/3$. Значит, $u_{\text{ср}}=\frac{2S/3}{11\tau_1/3}=$ $=2S/11\tau_1$. Известно, что

$$S/2=8v_2\cdot\tau_1, \text{ или } S=16v_2\cdot\tau_1.$$

Таким образом, $u_{\text{ср}}=2\cdot16v_2\cdot\tau_1/11\tau_1\approx$ $\approx26{,}2$ км/час.

б) Поскольку продолжительность всего пути равна $t=S/u_{\text{ср}}$, две трети времени путешествия составляют $2t/3=2S/3v_{\text{ср}}=6S/9v_{\text{ср}}$. Как мы отметили выше, в течение времени $\frac{S}{9v_{\text{ср}}}$ автобус ехал со скоростью $8v_2$ и проехал за это время расстояние $S/2$, а в течение времени $\frac{5S}{9v_{\text{ср}}}$ автобус ехал со скоростью v_2 и проехал за это время $\frac{5S}{9v_{\text{ср}}}v_2$. Средняя скорость за первую 2/3 времени движения равна

$$u_{\text{ср}}=\frac{S/2+\left(5S/9v_{\text{ср}}\right)\cdot v_2}{6S/9v_{\text{ср}}}=\frac{39}{32}v_{\text{ср}}=$$
$$=19{,}5 \text{ км/час}.$$

Пример 2. Базисная задача. Каким должен быть наименьший угол крыши дома, чтобы дождевая вода с неё быстрее стекала? Трением пренебречь.

Решение. Нарисуем левую половину крыши дома и сделаем все необходимые обозначения на рисунке 2. Внимательно изучив условие задачи, обращаем внимание на фразу «чтобы вода быстрее стекала». Это словосочетание наводит на мысль, что необходимо изучить уравнение движения тела по наклонной плоскости, что должно содержать путь, ускорение и время. То есть нас интересует формула $l = at^2/2$. Здесь $a = g\sin\alpha$. Тогда

$$t^2 = \frac{2l}{g\sin\alpha}. \qquad (1)$$

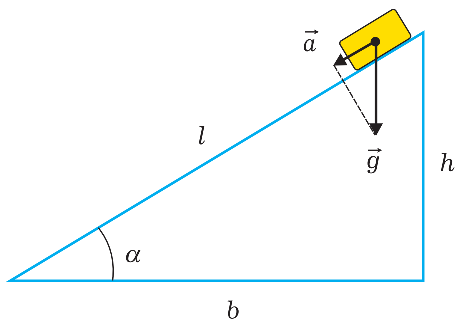


Рис. 2

По условию задачи $t^2 \to \min$. Но исследуемое выражение содержит две переменные (l и α). По этой причине данную функцию не можем исследовать на экстремум. Выразим l через α. Не берём формулу $l = h/\sin\alpha$. (Почему?) Берём $l = b/\cos\alpha$. Это выражение подставим в уравнение (1). Напишем

$$t^2 = \frac{2b}{g\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{4b}{g}\cdot\frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

Таким образом, получили функцию с одной переменной, т.е. значение t^2 зависит от α.

Эта функция может быть минимальной при $\sin 2\alpha \to \max$, что возможно при $\sin 2\alpha = 1$. Итак, $\alpha = 45°$.

Можно считать, что задача решена полностью и пора отдыхать? Нет, сам процесс решения только что начинается! Добавим в содержание задачи новые условия.

Включение нового элемента в задачу. Предположим, что поверхность крыши шероховатая. Пусть коэффициент трения равен μ.

Итак, у нас получилась новая задача.

Решение новой задачи. Заметим, что первоначальный вариант задачи решён с использованием законов кинематики. Новая задача решается на основе законов кинематики и динамики. При наличии трения ускорение капли будет равно

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Тогда $t^2 = \dfrac{2b}{g}\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha\sin\alpha - \mu\cos^2\alpha}$.

Чтобы $t^2 \to \min$, должно быть

$$\cos\alpha\sin\alpha - \mu\cos^2\alpha \to \max.$$

Исследуем

$$f(\alpha) = \cos\alpha\sin\alpha - \mu\cos^2\alpha$$

на максимум. Для этого берём первую производную от этой функции и приравниваем нулю:

$$f'(\alpha) = \cos 2\alpha + \mu\sin 2\alpha = 0$$

и получим $1 + \mu\,\mathrm{tg}\,2\alpha = 0$.

1-й способ решения:

$$\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\mu}\right) + \pi n/2, \ \ n = 1,$$

$$\alpha_1 = \pi/2 - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

2-й способ решения:

$$\mu\,\mathrm{tg}\,2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\mu 2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}\,\alpha = \mu \pm \sqrt{\mu^2 + 1},$$

$$\alpha_2 = \mathrm{arctg}\left(\mu + \sqrt{\mu^2 + 1}\right).$$

Уравнение $\mathrm{tg}\,\alpha = \mu - \sqrt{\mu^2 + 1}$ не имеет физического смысла, т.к. меньше ноля.

Составление новой задачи из материалов общеизвестных задач, или «Новое – это хорошо забытое старое»

Пример 3. Базисная задача. Груз привязан на верёвке к брусу квадратного сечения с ребром a (рис. 3). Длина верёвки $l = na$ (n – целое число). Грузу сообщена скорость v в направлении, перпендикулярном верёвке. За какое время вся верёвка намотается на брус? Брус закреплён на гладкой поверхности.

Решение. Рассмотрим случай, когда в начальный момент верёвка параллельна одной из боковых граней бруса ($\alpha = 0$). Груз начинает двигаться вокруг ребра A по окружности радиуса l с линейной скоростью v. Через четверть оборота верёвка коснётся грани бруса, груз станет двигаться с прежней линейной скоростью по окружности радиуса $l - a$. Ещё через четверть оборота радиус окружности станет $l - 2a$ и т.д. Верёвка намотается на брус за время

$$t = t_1 + t_2 + \ldots + t_n = \frac{2\pi l}{4v} + \frac{2\pi(l-a)}{4v} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{2\pi(l-(n-1)a)}{4v} =$$

$$= \frac{\pi n}{4v}(2l-(n-1)a) = \frac{\pi n}{4v}a(n+1).$$

Если в начальный момент верёвка составляет с плоскостью боковой грани бруса угол α рад, как показано на рис. 3, то время t равно

$$t = \frac{\pi n}{4v}a(n+1) + \frac{\alpha\, an}{4v}.$$

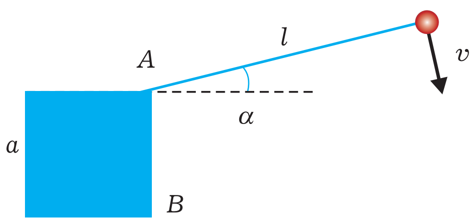


Рис. 3

Эту задачу можно переделывать. Для этого вместо бруса нужно брать цилиндр.

Новая задача. Верёвка, прикреплённая одним концом к боковой поверхности цилиндра у его основания радиуса r, обмотана вокруг цилиндра k раз (k – целое число). К свободному концу верёвки привязан груз. Грузу сообщают скорость v, направленную вдоль радиуса цилиндра (рис. 4). За какое время вся верёвка снова намотается на цилиндр? Цилиндр закреплён на гладкой поверхности [2].

Решение. Вначале рассмотрим случай, когда сечение бруска является правильным многоугольником. Далее, бесконечно увеличивая число сторон многоугольника, получаем формулу для расчёта общего времени разматывания и наматывания верёвки на цилиндр. Поскольку этот способ решения был очень громоздким, представим другой путь решения.

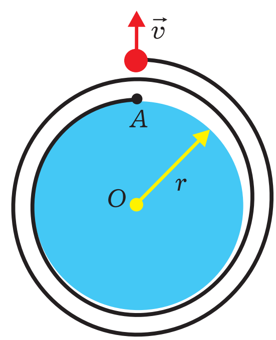


Рис. 4

Сила натяжения верёвки, действующая на груз, направлена перпендикулярно скорости груза. Следовательно, абсолютная величина скорости груза остаётся постоянной и равной v.

Рассмотрим движение в тот момент, когда верёвка полностью смоталась с цилиндра и груз находится в точке C (рис. 5).

За малый промежуток времени Δt груз переместится в точку C'. Поскольку Δt мало, угол α, на который повернётся вся верёвка, мал и

$$\alpha=\frac{v\cdot\Delta t}{l}=\frac{\Delta l}{r}\ \Rightarrow\ rv\Delta t=l\cdot\Delta l=\Delta\left(\frac{l^2}{2}\right).$$

Из последнего равенства находим время, в течение которого вся веревка длины l намотается на цилиндр: $t=\frac{l^2}{2rv}$.

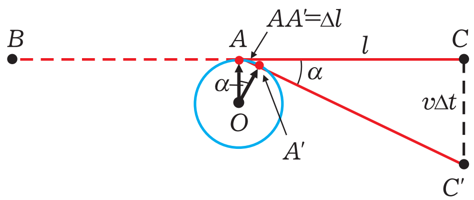


Рис. 5

За такое же время верёвка сматывается с цилиндра и груз оказывается в точке B. Время, за которое груз перемещается из точки B в точку C, равно $\tau=\pi l/v$.

Таким образом, полное время, за которое верёвка длины $l=2\pi rk$ смотается с цилиндра и вновь намотается на него, равно

$$T=2t+\tau\frac{4\pi^2k^2r}{v}+\frac{2\pi^2rk}{v}=$$

$$=\frac{2\pi^2kr}{v}(2k+1).$$

Пример 4. Базисная задача. Почему брёвна, плывущие по реке, ориентированы всегда по течению, а не поперёк ему?

Решение. Действие сил трения приводит к тому, что в русле реки устанавливается определённое распределение скоростей различных частей потока. Тонкие слои жидкости, примыкающие к берегам (и дну реки), неподвижны, а по мере приближения к середине реки (и к поверхности воды) скорость воды непрерывно возрастает (рис. 6).

Если в реку поместить бревно, расположенное под углом к течению, то та часть бревна, которая находится ближе к берегу, будет двигаться с меньшей скоростью, чем часть бревна, которая находится ближе к середине реки. Это приведёт к тому, что бревно начнёт поворачиваться до тех пор, пока ближайший к середине реки торец бревна не окажется впереди, а само бревно не будет ориентировано по течению.

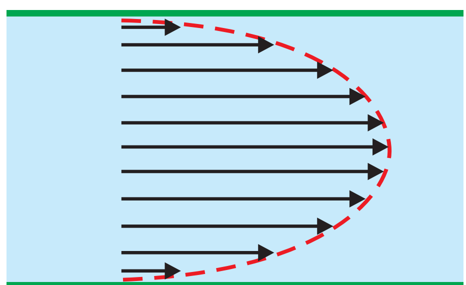


Рис. 6

Новая задача. Вертушку погрузили целиком в ручей так, что её ось расположилась горизонтально и перпендикулярно направлению течения (рис. 7). Будет ли она крутиться[3]?

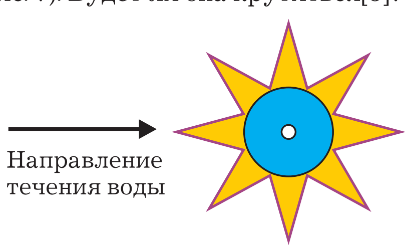
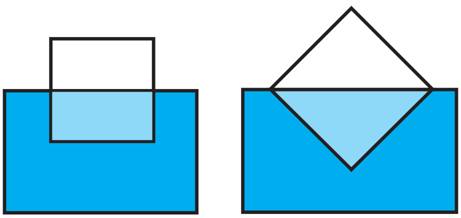


Рис. 7

Решение. Слои воды будут иметь разные скорости вследствие трения между ними и дном. Самый нижний слой воды имеет минимальную скорость, а верхний слой, то есть поверхность воды, – максимальную. Верхняя часть вертушки испытывает большую силу, нежели нижняя часть. Значит, вертушка будет вращаться.

Пример 5. Базисная задача. На поверхности воды плавает деревянный брусок квадратного сечения. Какое из двух положений равновесия, показанных на рисунке 8, будет устойчивым? Плотность бруска равна половине плотности воды.



I II

Рис. 8

Решение. Механическая система, предоставленная самой себе, всегда занимает такое положение, при котором её центр масс находится в самой низкой точке по сравнению с другими возможными положениями. Так как плотность бруска равна половине плотности воды, то в воду в обоих случаях погружена половина бруска, и центры тяжести в двух положениях находятся на одинаковой высоте. Относительно поля тяготения Земли бруски в обоих положениях имеют одинаковые потенциальные энергии.

Кроме поля тяготения Земли, брусок испытывает действие так называемого поля «архимедовой силы», которое мы ввели искусственно. Относительно поля «архимедовой силы» потенциальная энергия – разная. Нулевой уровень потенциальной энергии «архимедовой силы» соответствует поверхности воды. Следовательно, чем выше центр масс подводной части бруска, тем он устойчивее. То есть устойчивое состояние имеет брусок в том случае, если его подводная часть имеет наименьшее значение потенциальной энергии относительно поля «архимедовой силы». Это утверждение называется принципом минимальной потенциальной энергии.

В первом случае центр масс подводной части бруска находится на расстоянии $0{,}25a$ от поверхности, а во втором – на расстоянии, равном $\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}23a$, где a – длина стороны квадратного сечения бруска (центр масс однородного плоского треугольника находится в точке пересечения медиан). Это означает, что во втором случае меньше и потенциальная энергия подводной части бруска относительно поля «архимедовой силы». Значит, второе положение устойчиво, и брусок плавает в положении II.

Новая задача. Разрезали деревянный брусок квадратного сечения с ребром a по линии диагонали квадрата на две равные части и положили одну половину на воду.

а) Нужно найти точки приложения сил, действующих на брусок.

б) Как будет плавать на воде этот брусок?

Плотность бруска равна половине плотности воды.

Решение. а) Предположим, что наш брусок будет плавать так, как на рис. 9. (Наше предположение верно, что докажем более строго позже.) Сечение бруска представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник.

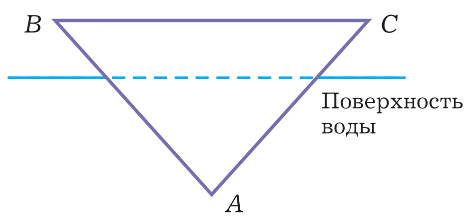


Рис. 9

Введём обозначения: $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $AK = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Отрезок EF, который параллелен стороне BC, делит данный треугольник на две части, равные по площади. То есть $S_{BEFC} = S_{AEF}$. Центр тяжести сечения бруска находится в точке O_1, и на него действует вниз сила тяжести бруска mg (m – масса бруска). А центр тяжести треугольника AEF – в точке O_2. На него действует вверх архимедова сила. Эти силы направлены вдоль вертикали KA (рис. 10).

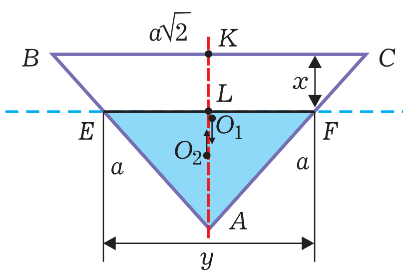


Рис. 10

Вычислим геометрические элементы сечения бруска: нам следует найти отрезки EF, LO_1 и O_1O_2. O_1 – центр масс бруска, O_2 – центр масс подводной части бруска.

Обозначим $EF = y$, $KL = x$. Поскольку $S_{BEFC} = S_{AEF}$, то

$$\frac{y + a\sqrt{2}}{2}x = \frac{y\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - x\right)}{2} = \frac{a^2}{4},$$ и получим

систему уравнений

$$\begin{cases} 2x\left(y + a\sqrt{2}\right) = a^2, \\ 2y\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}} - x\right) = a^2. \end{cases}$$

Внимание, нами попутно решена геометрическая задача! Из этой системы уравнений мы получим $y = a$. То есть отрезок, который делит равнобедренный прямоугольный треугольник на две равные по площади части, равен катету этого прямоугольного треугольника. При этом отрезок параллелен гипотенузе треугольника.

Далее найдём $x = \dfrac{a}{2\left(1+\sqrt{2}\right)} \approx 0{,}21\,a.$

$$AO_1 = \frac{2}{3}\cdot AK = \frac{2a}{3\sqrt{2}} \approx 0{,}47\,a$$

$$\text{и}\quad AO_2 = \frac{2}{3}\cdot AL = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2} = 0{,}33\,a,$$

$$\text{тогда}\quad O_1O_2 \approx 0{,}14\,a$$

$$\text{и}\quad LO_1 = AK - \left(KL + AO_1\right) =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}} - \left(\frac{a}{2(1+\sqrt{2})} + \frac{2a}{3\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}03\,a.$$

б) Проводим опыт. Если опустим брусок на воду, то уровень воды проходит вдоль отрезка EF.

Наш брусок будет плавать устойчиво, то есть грань бруска BC остаётся всегда параллельна поверхности воды. Если немного отклоним брусок из устойчивого состояния, то он стремится к начальному состоянию (рис. 11).

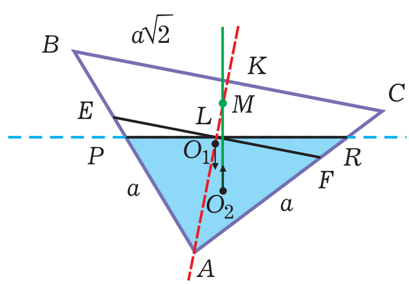


Рис. 11

При отклонении от положения устойчивого равновесия точка приложения архимедовой силы сместится вправо, как показано на рис. 11, и пара сил создаст возвращающий момент. Момент этой силы приводит брусок в равновесие, которое наступает только в том случае, когда грань бруска BC остаётся всегда параллельной поверхности воды.

Отметим, что момент выталкивающей силы чрезвычайно важен при рассмотрении устойчивости плавающих средств (корабля, плота и др.). В кораблестроении вводится специальное понятие о метацентре – точке пересечения линии действия выталкивающей силы в наклонном положении корабля с плоскостью его симметрии. Метацентр нашего «корабля» – точка M. Метацентр не должен опускаться ниже центра тяжести корабля (в нашем случае точка O_1), иначе вращательный момент архимедовой силы не сможет вернуть корабль в вертикальное положение.

Если на воду положим вторую половину так, как на рисунке 12, плавание бруска тоже будет устойчивым. То есть грань бруска BC остаётся всегда параллельна поверхности воды.

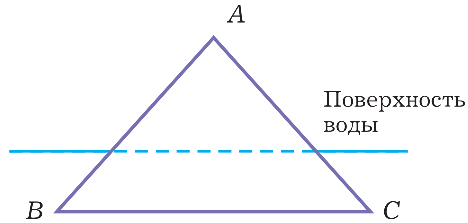


Рис.12

Эту часть задачи оставим для решения читателям.

Заключение

Научно-технический расцвет современной цивилизации есть подлинный триумф человеческого разума. Расцвет цивилизации был возможным благодаря умственным и физическим трудам мыслителей, учёных, изобретателей, инженеров, мастеров, которые жили, творили и открывали новое в науке и технике на протяжении нескольких веков. Главным стимулом продвижения в их научном поиске были стремление к познанию тайн окружающего мира и любознательность.

Известно, что научные открытия всегда начинаются с любопытства человека. Это любопытство обычно начинается со школьной скамьи, поскольку в кабинетах физики или других дисциплин созданы все условия для конструирования вами новых приборов и оборудования, проведения экспериментов, составления и решения различных задач.

Оригинальные задачи – это своего рода модели тех научных проблем, которые повседневно встречаются в исследовательских работах учёных. Поэтому умение составлять задачи является одним из важных черт будущего учёного.

Придумывание новой задачи – это ваш маленький шаг в мир большой науки.

Литература

1. *Козел С.М., Рашба Э.И., Славатинский С.А.* Сборник задач по физике. Задачи МФТИ. – 1978.
2. Задачник «Кванта. Ф734» // Квант 1982. – №1, 8.
3. Квант для младших школьников // Квант 1983. – №2.