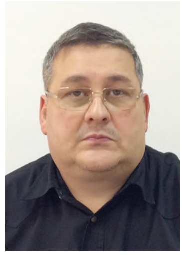

Прохоров Вадим Константинович
Учитель физики
ГБОУ «Школа № 1526 на Покровской» г. Москва.

Как найти работу...

В статье идет речь об определении фундаментального понятия физики – работы силы. Рассмотрение определения проводится в рамках школьного курса. Связь работы с энергией будет рассмотрена в последующих статьях.

Определение механической работы силы

Пусть сила $\vec{F}$ приложена к физическому телу, которое мы можем рассматривать как материальную точку.

Механическая работа силы – *скалярная величина*, определяемая в физике формулой:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \qquad \text{(I)}$$

Здесь выражение $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ – скалярное произведение вектора силы на вектор бесконечно малого перемещения[1]. Напомним, что скалярное произведение двух векторов – это скаляр, равный произведению модулей умножаемых векторов и косинуса угла между этими векторами. В зависимости от значения этого угла скалярное произведение и, соответственно, работа силы может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

В школьном курсе физики операция интегрирования, скажем так, непопулярна, по причине того, что понятие определенного интеграла формально рассматривается в курсе математики средней школы обычно в конце 11 класса.

Попробуем ввести «безынтегральное» определение работы.

Введем вначале *элементарную работу силы* – работу на *малом (элементарном)* перемещении. Поясним что мы будем понимать под малым перемещением. Пусть тело движется по некоторой траектории из точки a до точки b (рис. 1).

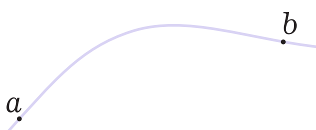

Рис. 1

[1] Знак «точка» здесь и далее обозначает скалярное произведение двух векторов. Символы $\left|\vec{F}\right|$ и F эквивалентны и обозначают модуль вектора силы.

На тело при этом действует сила $\vec{F}$. Вообще говоря, на тело может действовать несколько сил, но мы определяем работу силы $\vec{F}$, а работа этой силы не зависит от действия других сил. При движении тела эта сила, в общем случае, может изменяться по модулю и по направлению. *Малым* мы будем считать такое перемещение тела, на котором можно *пренебречь изменением вектора силы* (т. е. считать вектор силы постоянным на этом участке движения). Таким образом, всю траекторию можно разбить на N участков – малые перемещения – причем на каждом из них, вектор силы будет иметь *свое* постоянное значение, которое будет изменяться при переходе от одного малого участка к другому. На рисунке 2 показано такое разбиение и подробно изображен один из таких (i-ый) участков.

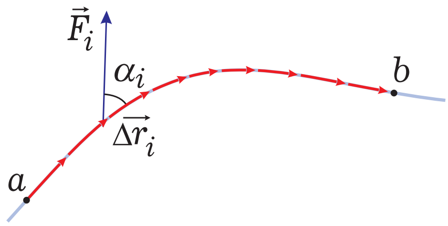

Рис. 2

На любом, произвольно выбранном (i-ом), малом перемещении $\overrightarrow{\Delta r_i}$ вектор силы имеет значение $\vec{F}_i$ и ее работа на этом малом перемещении называется *элементарной* (обозначается ΔA) и равна скалярному произведению векторов $\vec{F}_i$ и $\overrightarrow{\Delta r_i}$:

$$\Delta A_i = \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta r_i} = F_i \cdot \Delta r_i \cdot \cos\alpha_i. \qquad \text{(II)}$$

Здесь α_i – угол между векторами $\vec{F}_i$ и $\overrightarrow{\Delta r_i}$.

Полная работа силы $\vec{F}$ при движении тела от точки a до точки b по заданной траектории является *суммой элементарных работ*, совершаемых этой силой на отдельных малых перемещениях:

$$A_{ab} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta r_i} = \sum_{i=1}^{N} \left(|F_i||\Delta r_i|\cos\alpha\right). \qquad \text{(III)}$$

При $\overrightarrow{\Delta r_i} \to 0$ сумма в (III) как раз и представляет собой определенный интеграл из уравнения (I). Формула (III) является универсальным определением работы силы в рамках школьного курса физики.

Рассмотрим теперь частные случаи.

Случай 1.

Вектор силы является постоянным ($\vec{F} = const$). Тогда, вынося $\vec{F}$ как постоянную величину за знак суммы, и, учитывая, что векторная сумма элементарных перемещений $\overrightarrow{\Delta r_i}$ равна вектору перемещения $\overrightarrow{\Delta r}_{ab}$ из начальной точки a в конечную точку b:

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{\Delta r}_i = \overrightarrow{\Delta r}_{ab} \text{ (см. рисунок 3)},$$

получаем:

$$A_{ab} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r_i} = \vec{F} \cdot \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{\Delta r}_i =$$

$$= \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r}_{ab} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\Delta r}_{ab}\right| \cdot \cos\alpha. \qquad \text{(IV)}$$

Здесь α – угол между векторами $\vec{F}$ и $\overrightarrow{\Delta r}_{ab}$.

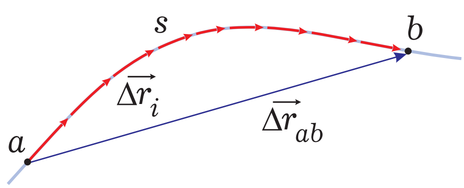

Рис. 3

Случай 2.

Если вектор силы постоянен по модулю ($\vec{F}=const$) и на каждом элементарном перемещении угол между векторами силы и элементарного перемещения также постоянен $(\alpha=const)$, то

$$A_{ab}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}\cdot\overrightarrow{\Delta r_i}=\sum_{i=1}^{N}\left(F_i\,\Delta r_i\cos\alpha_i\right)=$$

$$=F\cos\alpha\sum_{i=1}^{N}\Delta r_i=F\,s\cos\alpha. \qquad \text{(V)}$$

Здесь использован тот факт, что сумма модулей малых перемещений приблизительно равна длине траектории т. е. пути s:

$$\sum_{i=1}^{N}\Delta r_i\approx s.$$

Причем, чем меньше элементы, на которые мы делим траекторию, тем точнее значение суммы равно величине пути.

Случай 3.

Если угол между векторами $\vec{F}$ и $\overrightarrow{\Delta r}$ постоянен и равен 90^0. Тогда:

$$A_{ab}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}\cdot\overrightarrow{\Delta r_i}=\cos 90^\circ\sum_{i=1}^{N}\left|\vec{F_i}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\Delta r_i}\right|=$$

$$=0\cdot\sum_{i=1}^{N}\left|\vec{F_i}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\Delta r_i}\right|=0. \qquad \text{(VI)}$$

Таким образом, если вектор силы перпендикулярен направлению движения, то как бы не менялся модуль силы, работа этой силы равна нулю.

Случай 4.

Графическое определение работы.

Пусть тело движется по прямой под действием нескольких сил, в том числе под действием силы $\vec{F}$, постоянной по направлению $(\alpha=const)$, а модуль которой изменяется $(F\neq const)$. Обозначим через F_x – проекцию вектора силы $\vec{F}$ на направление движения (ось x), так что: $F_x=F\cdot\cos\alpha$. Нарисуем график зависимости $F_x(x)$. Если разбить перемещение тела от точки a до точки b на малые перемещения, то элементарная работа ΔA_i на таком перемещении Δx_i равна:

$$\Delta A_i=F_i\cdot\Delta x_i\cdot\cos\alpha=F_{x\,i}\cdot\Delta x_i.$$

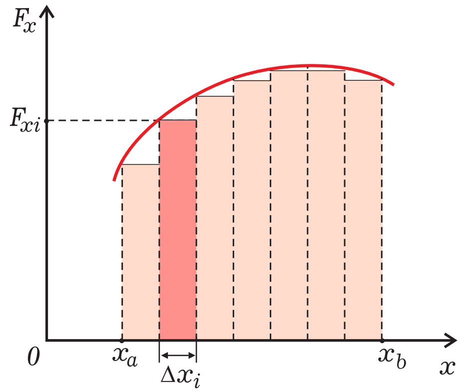

Рис. 4

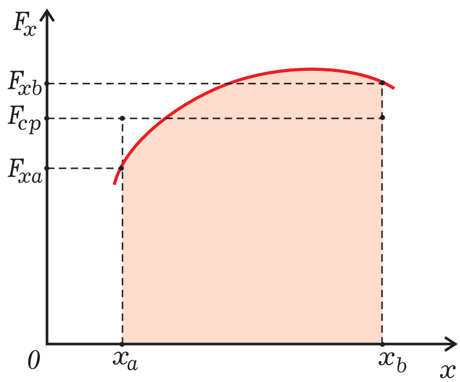

Рис. 5

Произведение величин $F_{x\,i}$ и Δx_i геометрически означает площадь прямоугольника шириной Δx_i и высотой $F_{x\,i}$ (см. рис. 4). Суммарная площадь всех прямоугольников *приблизительно* будет равна площади под графиком $F_x(x)$. «Приблизительность» заключатся в том, что суммарная площадь прямоугольников меньше полной площади под графиком на величину суммарной площади маленьких незакрашенных треугольников (см. рис. 4). Но, делая величины элементарных перемещений Δx_i все меньше и меньше, мы добиваемся того, что эти треугольники так же становятся все меньше и меньше, уменьшается их суммарная площадь, а, следовательно, суммарная площадь прямоугольников приближается к площади под графиком (см. рис. 5). Таким образом, суммарная работа силы на перемещении от точки a до точки b численно равна площади «закрашенной» под графиком $F_x(x)$ в пределах от x_a до x_b. Если, в частности, зависимость $F_x(x)$ является линейной (рис. 6), то работа численно равна площади трапеции:

$$A_{ab} = \frac{(F_{xb} + F_{xa})}{2}(x_b - x_a).$$

В физике нередко используются понятия средних величин – средних по времени, средних по пути и другие. В частности, средняя (по перемещению) сила определяется равенством.

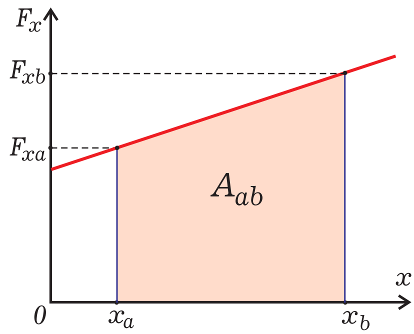

Рис. 6

$$A = \vec{F}_{cp} \cdot \Delta\vec{r}.$$

На рис. 5 проекция силы F_x изменяется с координатой x. Тогда

$$A = (F_x)_{cp} \cdot \Delta x.$$

Графически среднее значение $(F_x)_{cp}$ будет представлять собой высоту прямоугольника с основанием $\Delta x = x_b - x_a$, площадь которого равна площади закрашенной фигуры – «криволинейной трапеции». В случае линейной зависимости силы от координаты

$$A_{ab} = \frac{F_{xb} + F_{xa}}{2}(x_b - x_a),$$

то есть среднее значение силы на участке $\Delta x = x_b - x_a$ равно *среднему арифметическому* от минимального и максимального значений силы на этом участке.

Суммируем вышесказанное.

<table>
<tr><td colspan="2">Общий случай $A_{ab} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta r_i} = \sum_{i=1}^{N} (F_i \, \Delta r_i \cos\alpha_i)$</td></tr>
<tr><td>$A_{ab} = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{\Delta r}_{ab}| \cdot \cos\alpha$, ($\overrightarrow{\Delta r}_{ab}$ – перемещение, α – угол между вектором силы и вектором перемещения)</td><td>если $\vec{F} = const$.</td></tr>
<tr><td>$A_{ab} = |\vec{F}| \cdot s \cdot \cos\alpha$, ($s$ – путь, α – угол между вектором силы и вектором скорости)</td><td>если $|\vec{F}| = const$,
$\alpha = const$.</td></tr>
<tr><td>$A_{ab} = 0$</td><td>если $\alpha = 90°$.</td></tr>
<tr><td>$A_{ab} =$ *площадь под графиком* $F_x(x)$</td><td>если $F_x \neq const$,
$\alpha = const$.</td></tr>
</table>

Примеры решения задач

Пример 1.

Шарик массой m висит на нерастяжимой нити длины L. Нить с шариком отводят от вертикального положения так, что она становится горизонтальной и отпускают.

1) определить работу *силы тяжести* за время движения из начального в положение, когда нить вертикальна;

2) определить работу *силы натяжения нити* за время движения из начального в положение, когда нить вертикальна.

Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение.

1) Определяем работу силы тяжести (рис. 7). Здесь мы имеем *случай 1*, когда вектор силы, работа которой вычисляется, постоянен (сила тяжести постоянна и по модулю, и по направлению), следовательно, применяем формулу (IV):

$$A_{mg} = mg \cdot \Delta r \cos\alpha = mgL.$$

2) При движении шарика на нити сила натяжения изменяется – чем ближе к вертикальному положению, тем сила натяжения больше, при этом эта сила все время перпендикулярна направлению движения (рис. 8) – поэтому (формула (VI) работа силы натяжения равна нулю:

$$A_T = 0.$$

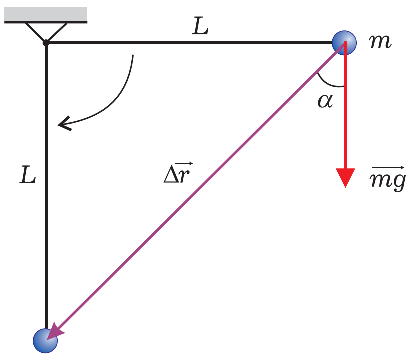

Рис. 7

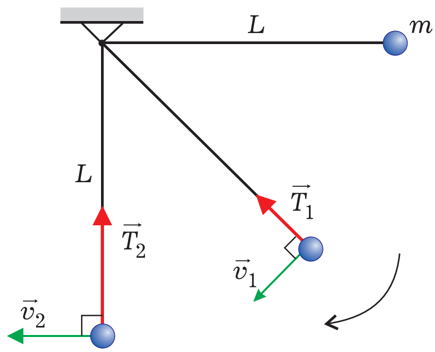

Рис. 8

Пример 2.

Брусок массой m перемещается под действием внешней силы на горизонтальном столе по замкнутой траектории в виде окружности радиуса R. Определить работу, совершаемую силой трения, за один оборот. Коэффициент трения бруска о стол равен μ.

Решение.

Здесь реализуется случай 2. В этом случае вектор силы постоянен по модулю, но по направлению изменяется, при этом угол между силой и скоростью в любой момент постоянен и равен 180° (рис. 9). Работу определяем по формуле (V):

$$A_{mp} = F_{mp} \cdot s \cdot \cos\alpha =$$

$$= \mu mg \cdot 2\pi R \cdot \cos 180° = -\mu mg \cdot 2\pi R.$$

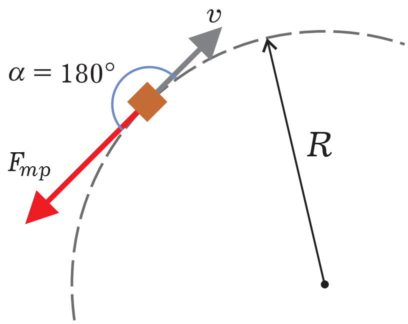

Рис. 9

Пример 3.

Легкая вертикальная пружина жесткости k одним концом прикреплена к потолку, а к другому концу прикреплен груз массой m. Груз стоит на горизонтальной подставке (рис. 10). В начальный момент пружина недеформирована. Подставку медленно опускают. Какую работу совершит сила, действующая на груз со стороны подставки.

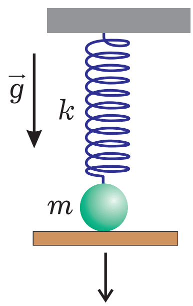

Рис. 10

Решение.

Подставку опускают медленно ($a = 0$), поэтому сумма сил, действующих на подставку (см. рис. 11) равна нулю, следовательно, учитывая закон Гука, сила реакции подставки в любой момент времени определяется выражением:

$$N = mg - kx,$$

где x – деформация пружины. Груз перестанет взаимодействовать с подставкой ($N = 0$), когда деформация будет равна $x_{\max} = \dfrac{mg}{k}$. Работу определим как площадь под графиком зависимости $N(x)$ (рис. 12):

$$A_N = -\frac{1}{2} \cdot mg \cdot \frac{mg}{k} = -\frac{m^2 g^2}{2k}.$$

Знак «минус» появился в связи с тем, что сила реакции подставки направлена в сторону противоположную движению ($\alpha = 180°$).

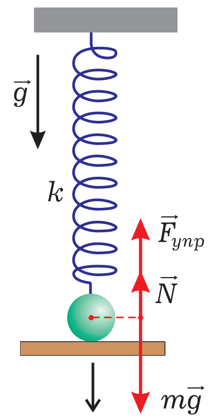

Рис. 11

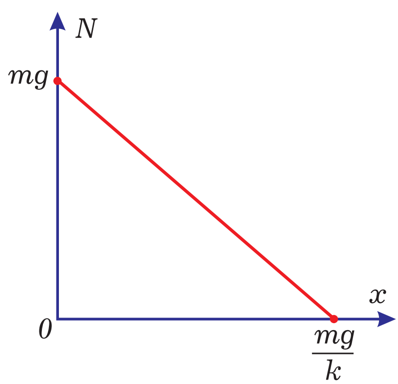

Рис. 12

Пример 4.

Брусок массой m и длиной L лежит на стыке двух столов (рис. 13). Какую работу надо совершить, чтобы равномерно перетащить волоком брусок с первого стола на второй, если коэффициенты трения между телом и столами μ_1 и μ_2 соответственно.

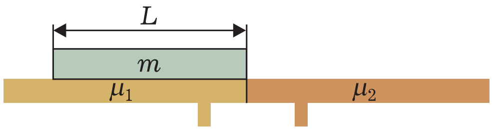

Рис. 13

Решение.

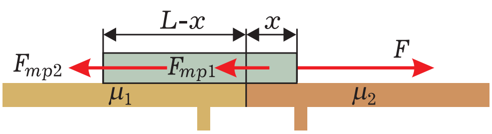

Рис. 14

Чтобы равномерно перетаскивать брусок, к нему нужно прикладывать силу F, равную силе трения скольжения, действующей на брусок. А сила трения не будет постоянной. Определим зависимость $F(x)$. Рассмотрим брусок в произвольный момент времени, когда часть бруска длиной x находится на втором столе, а оставшаяся часть длиной $L-x$ на первом столе (рис. 13). Силу трения можно представить, как сумму сил трения, действующую на разные части бруска:

$$F_{тр} = F_{тр1} + F_{тр2},$$

где $F_{тр1} = \mu_1 m_1 g = \mu_1 \left(\frac{m}{L}\right)(L-x)g,$

$$F_{тр1} = \mu_2 m_2 g = \mu_2 \left(\frac{m}{L}\right)xg.$$

Таким образом

$$F(x) = F_{тр}(x) = \mu_1 mg - \frac{mg}{L}(\mu_1 - \mu_2)x.$$

Построим график этой зависимости (на рис. 15 график построен в предположении $\mu_2 < \mu_1$) и найдем работу как площадь под этим графиком:

$$A_F = \frac{mgL(\mu_1 + \mu_2)}{2}.$$

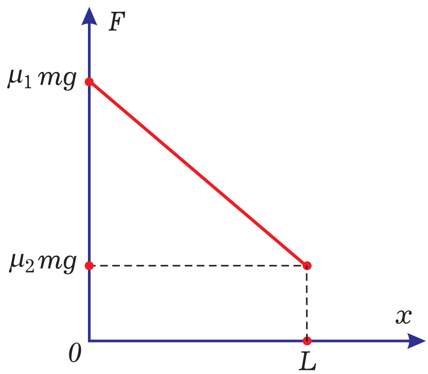

Рис. 15

Получив, что зависимость $F(x)$ – линейная функция, можно было сразу записать

$$A_x = F_{ср} \cdot L = \frac{F(0)+F(L)}{2} \cdot L =$$

$$= \frac{\mu_1 mg + \mu_2 mg}{2} \cdot L = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \cdot mgL.$$

Пример 5.

Небольшое тело массой m равномерно втащили на горку, действуя силой, которая в каждой точке направлена по касательной к траектории (рис. 16). Найти работу этой силы, если высота горки h, длина ее основания L и коэффициент трения между телом и горкой μ.

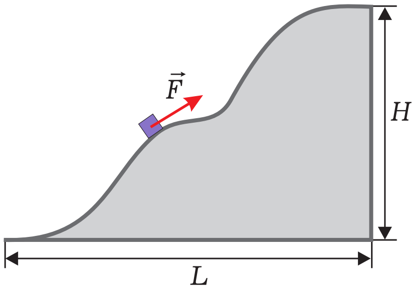

Рис. 16

Решение.

Решаем задачу на основе определения (см формулу (III).

Разобьем траекторию на малые элементы, каждый из которых (рис. 17) представляет собой прямой отрезок, наклоненный под углом α_i к горизонту (i – номер элемента). Элементарная работа ΔA_i силы F_i на таком элементе равна:

$$\Delta A_i = \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta r_i} = F_i \cdot \Delta r_i \cdot \cos 0°. \qquad (1)$$

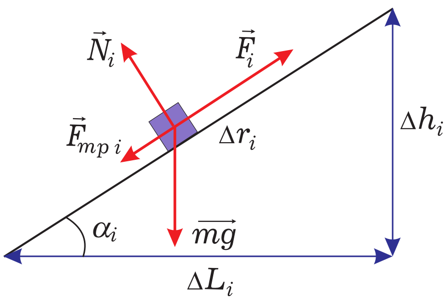

Рис. 17

Так как тело движется равномерно, то величина силы F_i определяется выражением:

$$F_i = mg\sin\alpha_i + \mu mg\cos\alpha_i. \qquad (2)$$

Причем, как видно из рисунка

$$\sin\alpha_i = \frac{\Delta h_i}{\Delta r_i}, \qquad (3)$$

$$\cos\alpha_i = \frac{\Delta L_i}{\Delta r_i}. \qquad (4)$$

Из (1) – (4) получаем:

$$\Delta A_i = \left(mg \cdot \frac{\Delta h_i}{\Delta r_i} + \mu mg \cdot \frac{\Delta L_i}{\Delta r_i} \right) \Delta r_i. \qquad (5)$$

Работа на всей траектории равна:

$$A = \sum_i \Delta A_i = \sum_i (mg\Delta h_i + \mu mg\Delta L_i) =$$

$$= mg\sum_i \Delta h_i + \mu mg\sum_i \Delta L_i = mg(h + \mu L).$$

Здесь учтено, что $\sum_i \Delta h_i = h$ и $\sum_i \Delta L_i = L$.

Ответ: $A = mg(h + \mu L)$.

Пример 6.

Кубик из материала плотностью ρ_0 плавает жидкости плотностью ρ. Сторона кубика равна a. Определить работу, которую надо совершить, чтобы:

а) полностью погрузить кубик в жидкость;

b) полностью вытащить его из жидкости.

Краткое решение.

В состоянии равновесия кубик погружен в жидкость на глубину $h = \frac{\rho_0}{\rho} a$.

а) Для того, чтобы медленно погрузить кубик в жидкость, нужно переместить его вниз на расстояние $a - h$ прикладывая силу, которая линейно изменяется от нуля до значения $(\rho - \rho_0)ga^3$. Работа равна произведению средней силы на перемещение:

$$A_1 = \frac{(\rho - \rho_0)ga^3}{2}(a - h) = \frac{(\rho - \rho_0)^2 ga^4}{2\rho}.$$

b) Вытаскивая кубик из жидкости, мы перемещаем его на расстояние h, прикладывая силу, изменяющуюся линейно от нуля до $\rho_0 g a^3$.

Работа также равна произведению средней силы на перемещение:

$$A_2 = \frac{\rho_0 g a^3}{2} h = \frac{\rho_0^2 g a^4}{2\rho}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Тело массой 10 кг соскользнуло по наклонной плоскости длиной 1,4 м. Определить работу силы тяжести, если угол наклона плоскости к горизонту 30°.

2. Груз массой 7 кг поднимают на веревке с поверхности земли вертикально на высоту 1 м один раз с постоянной скоростью, второй раз с ускорением 2 м/с^2. На какую величину отличается работа силы натяжения веревки в этих случаях?

3. Тело массой 2 кг равномерно поднимается вверх вдоль наклонной плоскости. Определить работу каждой из сил, действующих на тело, к моменту, когда оно поднимется на высоту 10 м. Угол наклона плоскости к горизонту 45°, коэффициент трения 0,2.

4. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы полностью вытащить из воды вертикальную железную сваю длиной 10 м и площадью поперечного сечения 10 см^2? Плотность железа 7800 кг/м^3, плотность воды 1000 кг/м^3. Вначале один конец сваи касается поверхности воды.

5. На брусок, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности, начинает действовать горизонтальная сила F. Зависимость величины этой силы от координаты бруска представлена на графике (рис. 18). Определить работу этой силы при перемещении бруска на 0,3 м.

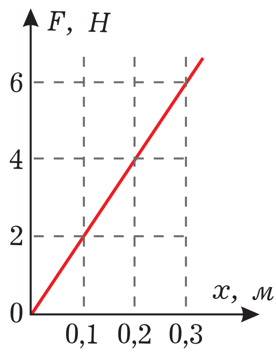

Рис. 18

6. Наклонная плоскость имеет основание 10 м и высоту 2,5 м. На наклонной плоскости стоит коробка. Чтобы передвинуть коробку вниз по наклонной плоскости на некоторое расстояние, нужно совершит минимальную работу 15 Дж, а, чтобы передвинуть на такое же расстояние вверх, необходимо совершить работу не менее 65 Дж. В обоих случаях сила прикладывается параллельно наклонной плоскости. Найти коэффициент трения.

Ответы

1. 70 Дж.
2. 14 Дж.
3. 0 Дж; −40 Дж; −200 Дж; 593 Дж.
4. 7,3 кДж.
5. 0,9 Дж.
6. 0,4.