Ромашкевич Александр Иосифович
Пенсионер, инвалид, окончил МИФИ в 1964г.,
последнее место работы МИЭТ,
старший преподаватель кафедры общей физики.

Как можно в некоторых случаях упростить расчёты в физических задачах

Принято придерживаться строгого правила при окончательных расчётах в задачах по физике. Сначала выразить данные всех физических величин в системе СИ, а уж потом производить вычисления. Это позволяет избежать досадных ошибок. Образно говоря, на бал надо являться «во фраке и с галстуком бабочкой». На примере нескольких задач мы покажем, что иногда «джинсы с кроссовками» бывают удобнее.

Задача 1. Стеклянную трубку длиной $L = 1\text{м}$, открытую с обоих концов, наполовину погружают в ванну с ртутью. Затем верхний конец закрывают пальцем и вынимают трубку из ванны. Какой длины x столбик ртути останется в трубке? Атмосферное давление $p_\text{а} = 750$ мм рт. ст. Температуру считать постоянной.

Решение. На рисунке 1 а верхняя половина трубки заполнена воздухом при атмосферном давлении (состояние 1).

На рисунке 1 б верхняя часть трубки заполнена тем же количеством воздуха, но уже при другом давлении p (состояние 2). Температура предполагается постоянной.

Решение задачи можно выразить

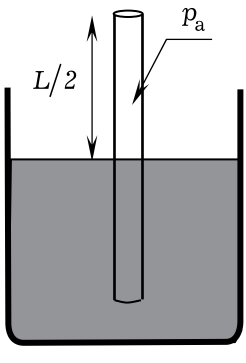

Рис.1 а

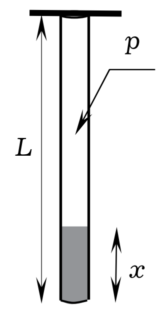

Рис.1 б

тремя утверждениями:

1. В состоянии 1 воздух можно считать идеальным газом,

2. В состоянии 2 воздух можно считать идеальным газом,

3. Столбик ртути длиной x на ри-

сунке 1 б находится в равновесии.

В переводе на язык математики это означает:

$$1.\ p_{\text{а}}\left(\frac{L}{2}S\right)=\frac{m}{M}RT,$$

где S – площадь поперечного сечения трубки, $\left(\frac{L}{2}S\right)$ – объём воздуха в состоянии 1.

$$2.\ p(L-x)S=\frac{m}{M}RT;$$

$(L-x)S$ – объём воздуха в трубке в состоянии 2.

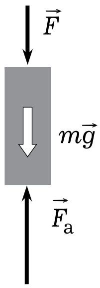

Рис. 2

3. Условие равновесия столбика ртути на рисунке 2 означает, что сумма сил, действующих на столбик по вертикали, равна нулю.

Это сила давления воздуха в верхней части трубки:

$$F=pS,$$

сила давления атмосферного воздуха снизу:

$$F_{\text{а}}=p_{\text{а}}S$$

и сила тяжести:

$$F_{\text{т}}=mg.$$

Запишем условие равновесия:

$$F_{\text{а}}=F+mg,$$

$$p_{\text{а}}S=pS+(xS)\rho g,$$

$$p_{\text{а}}=p+\rho gx.$$

Итак, мы выразили все три физические утверждения в виде трёх уравнений:

$$1)\ p_{\text{а}}\left(\frac{L}{2}S\right)=\frac{m}{M}RT;$$

$$2)\ p(L-x)S=\frac{m}{M}RT;$$

$$3)\ p_{\text{а}}=p+\rho gx.$$

Этого достаточно для решения задачи. Но сначала обсудим, к чему мы пришли. Из первых двух уравнений следует:

$$p_{\text{а}}\left(\frac{L}{2}S\right)=p(L-x)S.$$

Внимательный ученик должен был бы сразу написать это уравнение вместо первых двух, потому что это просто закон Бойля – Мариотта.

Третье уравнение тоже надо научиться писать сразу. Его смысл прост. Давление на самый нижний слой ртути со стороны атмосферы (снизу) уравновешивается (сверху) давлением газа внутри трубки и давлением столба жидкости высотой x.

После сокращения S остаётся решить систему двух уравнений с двумя неизвестными p и x (плотность ртути придётся взять из таблицы):

$$\begin{cases} p_{\text{а}}\dfrac{L}{2}=p(L-x), \\ p_{\text{а}}=p+\rho gx. \end{cases}$$

Избавляясь от p, получаем:

$$p_{\text{а}}L=2(p_{\text{а}}-\rho gx)(L-x),$$

$$2\rho gx^2-(2L\rho g+2p_{\text{а}})x+p_{\text{а}}L=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{2(L\rho g+p_{\text{а}})\pm\sqrt{(L\rho g+p_{\text{а}})^2-8\rho gp_{\text{а}}L}}{4\rho g}.$$

Теперь надо перевести все числовые значения в систему СИ, сделать расчёт, отбросить корень, не имеющий физического смысла, и привести окончательный ответ. Процесс достаточно трудоёмкий, но задача предоставляет нам возможность показать, как иногда физические соображения позволяют сократить путь к результату.

После исключения из системы уравнений давления p мы пришли к уравнению:

$$p_{\text{а}}L = 2(p_{\text{а}} - \rho g x)(L - x),$$

в котором $\rho g x$ – давление столба ртути $p_{\text{рт}}$.

Можно записать:

$$p_{\text{а}}L = 2\left(p_{\text{а}} - p_{\text{рт}}\right)(L - x).$$

Обратите внимание, что теперь в уравнение входят всего две физических величины: длина и давление. Перепишем это уравнение в виде

$$2\frac{p_{\text{а}} - p_{\text{рт}}}{p_{\text{а}}} = \frac{L}{L - x}.$$

В левой части уравнения наблюдаем отношение давлений. А отношение величин не зависит от выбора единиц. В правой – отношение длин. Тоже имеем право выбирать единицу. Это наводит на мысль, что специально для этой задачи можно придумать новую систему единиц, в которой за единицу длины принимается 1см, а за единицу давления – тоже 1см, только ртутного столба. Тогда, согласно условию:

$$p_{\text{а}} = 75 \text{ см рт.ст.}, \ L = 100 \text{ см},$$

$$p_{\text{рт}} = x \text{ см рт.ст.}$$

Подставим в уравнение числовые значения:

$$75 \cdot 50 = (75 - x)(100 - x).$$

Цифры настолько просты, что корни уравнения легко угадываются без решения. Это

$$x_1 = 25 \text{ см и } x_2 = 150 \text{ см.}.$$

Отбрасываем второй корень (столбик ртути не может быть длиннее трубки).

Ответ. $x_1 = 25$ см.

Задача 2. В открытую с обоих концов U-образную трубку наливают ртуть. При этом высота столба воздуха в левом колене трубки $l = 30$ см. Температура окружающей среды $t_1 = 7^\circ$, давление $p_{\text{а}} = 770$ мм рт. ст. Затем верхний конец левого колена плотно закрывают (рис. 3). На сколько поднимется уровень ртути в правом колене, если при неизменном внешнем давлении температура среды повысится до $t_2 = 27^\circ$?

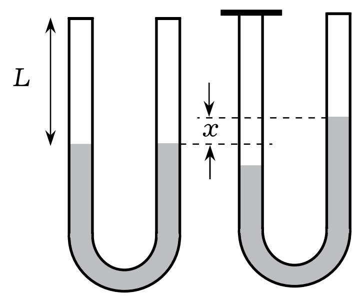

Рис. 3

Решение. В первой задаче пришлось решать уравнение Бойля – Мариотта, в котором остались только две физические величины: давление и длина. Поэтому мысль воспользоваться только одной единицей приходит сразу. Здесь же фигурируют три макропараметра идеального (по умолчанию) газа – добавляется температура. Но поскольку она задана в начальном и конечном состояниях: $T_1 = 280K$, $T_2 = 300K$, в уравнении для решения опять останутся только давление и длина. Сейчас эта путаная мысль станет яснее.

Для двух состояний одного и того же количества молей идеального газа справедливо:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}, \quad \frac{p_1V_1}{p_2V_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Для воздуха в левом колене

$$\frac{p_а lS}{\left(p_а + p_{рт}\right)(l+x)S} = \frac{280}{300}.$$

Оказывается, решать приходится опять уравнение, в которое входят отношение давлений и отношение длин, что позволяет снова воспользоваться только единицей длины – 1см $l = 30\,см$, $p_а = 77см$ рт. ст.

Сократим, что можем, и запишем уравнение «в один этаж»:

$$15p_а l = 14\left(p_а + p_{рт}\right)(l+x).$$

Когда уровень ртути в правом колене поднимается на x сантиметров, в левом он опускается на столько же. Следовательно, разность уровней составляет $2x$ сантиметров. С учётом этого подставляем в уравнение данные из условия

$$15 \cdot 77 \cdot 30 = 14(77+2x)(30+x)$$

и работаем до ответа:

$$15 \cdot 11 \cdot 15 = 77 \cdot 30 + 60x + 77x + 2x^2,$$

$$2x^2 + 137x - 165 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-137 \pm \sqrt{137^2 + 4 \cdot 2 \cdot 165}}{2 \cdot 2}.$$

Отбрасывая отрицательный корень, находим

$$x \approx 1{,}18\ см = 11{,}8\ мм.$$

Ответ. $x \approx 11{,}8мм.$

Задача 3. На горизонтальной поверхности расположены цилиндр и прямая пирамида, положенная на боковую грань. Сечение пирамиды – правильный треугольник со стороной a. Ось цилиндра вертикальна. В нижней части объёмы соединены трубкой небольшого сечения. В призму с открытого конца вставлен свободно скользящий поршень, имеющий форму сечения призмы (рис. 4). В цилиндр наливают воду, придерживая поршень, пока призма целиком не заполнится водой (вода начинает выливаться через верхнее отверстие К). Затем отверстие закрывают, воду в цилиндр перестают доливать, а поршень отпускают. Определить уровень воды в цилиндре, когда поршень остановится и система придёт в положение равновесия. Трением пренебречь.

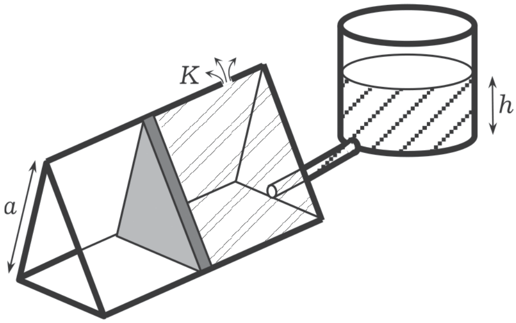

Рис. 4

Решение. По умолчанию подразумевается, что опыт проводится при постоянной температуре. А это означает, что при расчётах опять будут фигурировать только две физические величины: давление и длина. То есть при решении можно использовать только единицу длины. Атмосферное давление (если понадобится) и давление водяного столба будем выражать в сантиметрах водяного столба, а расстояние – просто в сантиметрах.

Чтобы поршень находился в положении равновесия, необходимо равенство сил со стороны атмосферы и со стороны воды:

$$p_а S = F;$$

$p_а$ – атмосферное давление,

S – площадь поршня (правильный треугольник со стороной a),

F – сила давления воды на поршень, которую нам предстоит сосчитать.

Давление (p_1) у дна в цилиндре и призме $p_1 = p_A + h;$

h – давление водяного столба в см в. ст. в цилиндре в положении равновесия.

В призме с высотой давление падает до величины p_2.

$$p_2 = p_а + h - H.$$

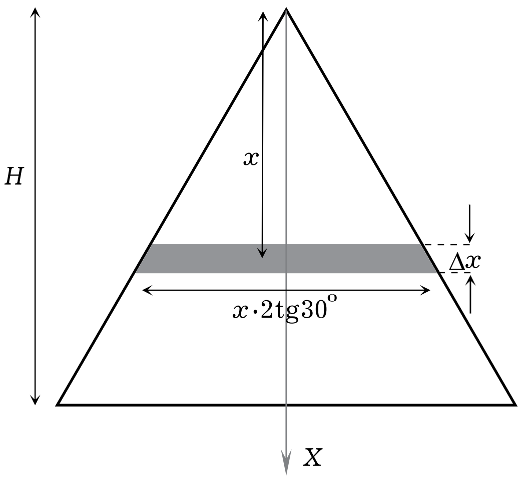

Рис. 5

H – высота правильного треугольника.

Для расчёта силы давления воды придётся воспользоваться элементарным интегрированием.

Разобьём площадь поршня на узкие полоски, параллельные основанию (рис. 2)

Направим ось X вертикально вниз, поместив 0 оси в вершину правильного треугольника.

Выделенная полоска находится выше дна призмы на $(H - x)$. С достаточной точностью можно считать давление воды в районе полоски

$$p = p_а + h - (H - x).$$

Площадь S полоски (см. рис. 5):

$$S = \frac{2}{\sqrt{3}} x \cdot \Delta x.$$

А вот и сила ΔF_i, с которой вода давит нормально на полоску:

$$\Delta F_i = ps = \frac{2}{\sqrt{3}}(p_а + h - H + x)x\Delta x,$$

Осталось сложить все ΔF_i, чтобы получить полную силу F:

$$\sum \Delta F_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum (p_а + h - H + x)x\Delta x.$$

Для точного расчёта делаем полосочки бесконечно тонкими, иными словами, переходим к интегрированию:

$$\int dF_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^H (p_а + h - H + x)x dx,$$

$$F = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^H (p_а + h - H)x dx + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^H x^2 dx,$$

$$F = \frac{2}{\sqrt{3}}(p_а + h - H)\frac{1}{2}H^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{3}H^3 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}(p_а + h)\frac{1}{2}H^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{6}H^3.$$

Приравнивая силу F к силе атмосферного давления на поршень и выражая площадь поршня через высоту, получаем:

$$p_а \frac{1}{2} H \frac{2}{\sqrt{3}} H = \frac{2}{\sqrt{3}} H^2 \left(p_а \frac{1}{2} + h\frac{1}{2} - \frac{1}{6} H \right).$$

$$p_а \frac{1}{2} = \left(p_а \frac{1}{2} + h\frac{1}{2} - \frac{1}{6} H \right), \text{ откуда}$$

$$h = \frac{1}{3} H = \frac{\sqrt{3}}{6} a.$$

Ответ. $h = \frac{\sqrt{3}}{6} a.$

Не стоит принимать приведённые примеры как руководство к действию. Единственная мысль, которую полезно усвоить: отношение значений какой-либо физической величины не зависит от выбора единиц измерения этой величины.