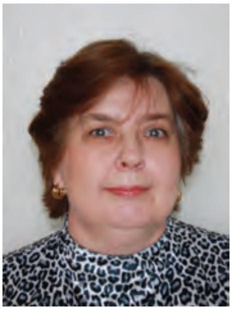



**Ермаков Вячеслав Михайлович**
*Старший преподаватель кафедры естественных наук*
*Центра Международного Образования*
*МГУ им. М.В. Ломоносова.*



**Миронова Галина Викторовна**
*Доцент кафедры естественных наук*
*Центра Международного Образования*
*МГУ им. М.В. Ломоносова.*

# Исследование на устойчивость в задачах статики

В статье рассмотрены задачи на устойчивость в статике – на нахождение положения равновесия для системы тел. С помощью анализа изменения величины потенциальной энергии исследуются виды равновесия: устойчивое, неустойчивое, безразличное. Изменение потенциальной энергии системы анализируется на основе поведения центра масс системы. В качестве наглядной демонстрации различных видов равновесия показаны траектории движения центра масс.

В школьной программе по физике в разделе «Механика» достойное место занимают задачи на нахождение положения равновесия одного тела или системы тел. Такие задачи включены в темы «Статика», «Гидростатика» и «Комбинированные задачи». Как правило, решение предлагается через уравнения движения (2-й закон Ньютона) и уравнение моментов сил или закон сохранения энергии. Определение устойчивости часто сводится к простому вопросу указать, какое это положение равновесия.

Проведём исследование, чтобы ответить на вопрос, почему получается именно такое положение равновесия. Сделаем это с помощью исследования потенциальной энергии системы.

Если система находится в состоянии устойчивого положения равновесия, то она обладает минимумом потенциальной энергии. Если в состоянии неустойчивого равновесия, то – максимумом. В положении безразличного равновесия потенциальная энергия не изменяется.

Рассмотрим одну из задач на равновесие в статике.

**Задача 1.** Стержень $AB$ массой $M$ прикреплён к неподвижной опоре шарниром $A$ и может вращаться в вертикальной плоскости. К концу $B$ стержня прикреплена нить (нить невесома и нерастяжима). Нить перекинута через блок $C$ и к ней подвешен груз массой $m$. Оси блока $C$ и шарнира $A$ расположены на одной вертикали, причём $AC = AB$ (рис. 1). При каком угле $\alpha$ между стержнем и вертикалью система будет находиться в равновесии? Будет ли равновесие устойчивым?

**Решение.** На стержень действуют сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила тяжести стержня $M\vec{g}$. Со стороны опоры $A$ приложена сила $\vec{F}_A$. Направление действия этой силы надо будет определить. Поскольку сила $\vec{F}_A$ приложена в т. $A$, а её направления мы пока не знаем, то составим уравнение моментов относительно левого конца стержня т. $A$:

$$Mg\frac{l}{2}\sin\alpha - Tl\cos\frac{\alpha}{2} = 0,$$

где $l$ – длина стержня.

Момент силы $\vec{F}_A$ относительно точки $A$ равен нулю. Модуль силы натяжения нити равен модулю силы тяжести груза $m$: $T = mg$. Плечо силы $\vec{T}$ получим из треугольника $ABC$ – он равнобедренный ($AC = AB$), и, следовательно, $AD$ – это и высота, и биссектриса. Решаем уравнение и получаем значение угла $\alpha$: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{m}{M}$, и $\alpha = 2\arcsin\frac{m}{M}$.

Если система находится в равновесии, то и относительно т. $C$ сумма моментов сил должна быть равна нулю, т. е. линия действия $\vec{F}_A$ проходит через точку пересечения линий действия сил $\vec{T}$ и $M\vec{g}$ (т. $D$ – см. рис. 1).

*Исследование на устойчивость.* Обозначим точкой $E$ предельное (самое низкое) положение груза (рис. 2). Тогда если угол стержня с вертикалью составляет $\alpha$, то груз находится на высоте $h$ от

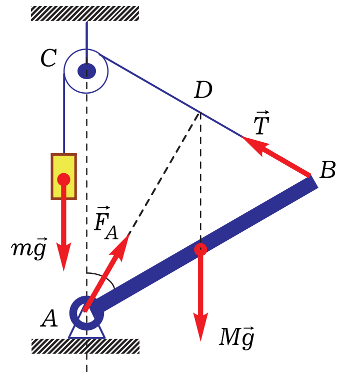



*Рис. 1*

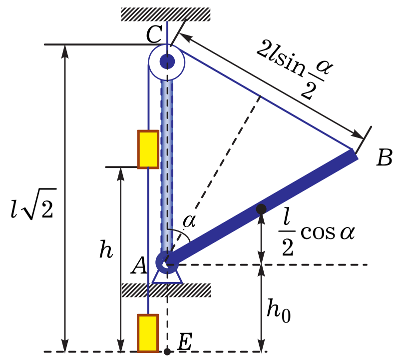



*Рис. 2*

уровня т. $E$, и потенциальная энергия всей системы будет равна

$$E_P = mgh + Mg\left(h_0 + \frac{l}{2}\cos\alpha\right),$$

где $h = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$, $h_0 = \text{const}$ – величина постоянная, зависящая от длины нити.

Когда $\alpha = 0$, $E_P = Mg\left(h_0 + \frac{l}{2}\right)$, а при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (стержень находится в горизонтальном положении, а груз в верхней точке) $E_P = \sqrt{2}mgl + Mgh_0$.

Исследуем выражение для потенциальной энергии

$$E_P = 2mgl\sin\frac{\alpha}{2} + Mg\left(h_0 + \frac{l}{2}\cos\alpha\right)$$

как функцию от $\alpha$.

Найдём производную:

$$\dot{E}_P = \frac{dE_P}{d\alpha} = gl\left(m\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{M}{2}\sin\alpha\right) =$$
$$= gl\cos\frac{\alpha}{2}\left(m - M\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

$\dot{E}_P = 0$ при $m - M\sin\frac{\alpha}{2} = 0$, откуда

$$\sin\frac{\alpha_0}{2} = \frac{m}{M}.$$

При этом значении $\alpha$ потенциальная энергия достигает экстремального значения, т. е. при $\alpha = \alpha_0$ система находится в равновесии.

Исследуем теперь, является ли это состояние устойчивым ($\dot{E}_P$ имеет в этой точке локальный минимум) или неустойчивым ($\dot{E}_P$ имеет в этой точке локальный максимум). Для этого рассмотрим вторую производную от $E_P$, т. е. возьмём производную от $\dot{E}_P$:

$$\ddot{E}_P = \frac{d\dot{E}_P}{d\alpha} = gl\left(-\frac{m}{2}\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{M}{2}\cos\alpha\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}gl\left(m\sin\frac{\alpha}{2} + M\cos\alpha\right).$$

Мы видим, что функция $\ddot{E}_P$ при всех $\alpha \in [0;\ \pi/2]$ отрицательна. Это означает, что $\dot{E}_P$ является убывающей функцией везде на $[0;\ \pi/2]$, что, в свою очередь, говорит о том, что экстремум функции $E_P$ представляет собой локальный максимум.

Таким образом, найденное состояние равновесия является неустойчивым. Это означает, что при малом изменении угла $\alpha$ от состояния равновесия в сторону уменьшения $\alpha$ стержень сразу примет вертикальное положение, а при изменении $\alpha$ от состояния равновесия в сторону увеличения – горизонтальное положение.

В следующих двух задачах найдём условие равновесия для системы из двух бусинок на концах нити, помещённых на разные конструкции из стержней.

**Задача 2.** На неподвижном стержне, согнутом под прямым углом в форме равнобедренного треугольника, находятся две бусинки массами $m_1$ и $m_2$. Бусинки связаны невесомой нерастяжимой нитью длиной $l$ и могут свободно без трения скользить по стержню. Определите угол $\alpha$ между нитью и левой стороной стержня, когда система находится в положении равновесия (рис. 3). Будет ли найденное положение равновесия устойчивым?

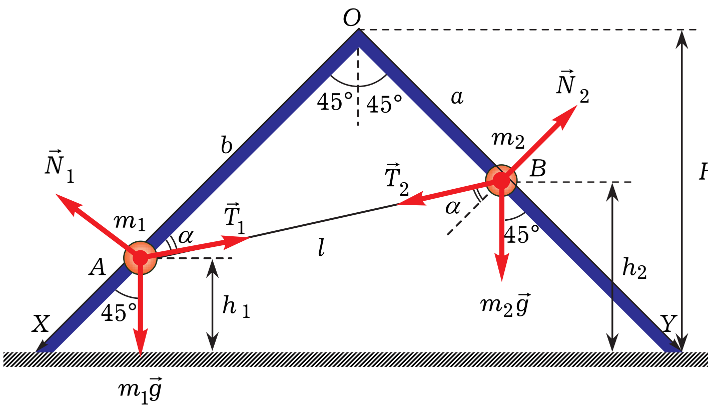



*Рис. 3*

**Решение.** Покажем на рисунке силы, действующие на бусинки: силы тяжести $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$, силы реакции стержня $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ и силы натяжения нити $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$. Заметим, что $T_1 = T_2 = T$.

Выпишем геометрические соотношения из $\Delta AOC$:

$$OB = a = l\sin\alpha, \quad AO = b = l\cos\alpha,$$

$$H = \frac{\sqrt{2}}{2}l.$$

Найдём условия равновесия двумя способами.

1) Условие равновесия сил, действующих на бусинки.

Сумма сил для первой бусинки $m_1$: $\vec{N}_1 + \vec{T}_1 + m_1\vec{g} = 0$.

В проекциях на ось $OX$:

$$-T_1\cos\alpha + m_1 g\cos 45° = 0,$$

откуда $T\cos\alpha = m_1 g\cos 45°$.

Условие равновесия сил для второй бусинки $m_2$:

$$\vec{N}_2 + \vec{T}_2 + m_2\vec{g} = 0.$$

В проекциях на ось $OY$:

$$m_2 g\cos 45° - T_2\sin\alpha = 0,$$

или $T\sin\alpha = m_2 g\cos 45°$.

Решая уравнения для проекций, получим $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{m_2}{m_1}$.

2) Энергетический метод, путём вычисления потенциальной энергии системы.

Обозначим через $H$ высоту, на которой будет находиться бусинка $m_2$, если она окажется в вершине угла $O$, т. е. при $\alpha = 0$. Тогда в положении равновесия для бусинки $m_1$:

$$h_1 = H - \frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{\sqrt{2}}{2}l - \frac{\sqrt{2}}{2}l\cos\alpha.$$

Аналогично для второй бусинки $m_2$:

$$h_2 = H - \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}l - \frac{\sqrt{2}}{2}l\sin\alpha.$$

Таким образом, потенциальная энергия системы, состоящей из двух бусинок, равна сумме потенциальных энергий каждой бусинки:

$$E_P = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 = m_1 g\frac{\sqrt{2}}{2}l -$$

$$-m_1 g\frac{\sqrt{2}}{2}l\cos\alpha + m_2 g\frac{\sqrt{2}}{2}l - m_2 g\frac{\sqrt{2}}{2}l\sin\alpha =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}gl(m_1 + m_2) - \frac{\sqrt{2}}{2}gl\left(m_1\cos\alpha + m_2\sin\alpha\right).$$

Рассмотрим потенциальную энергию $E_P$ как функцию от $\alpha$. Найдём её производную:

$$\dot{E}_P = \frac{dE_P}{d\alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{2}gl\left(-m_1\sin\alpha + m_2\cos\alpha\right).$$

Отсюда понятно, что $\dot{E}_P = 0$ при $m_1\sin\alpha = m_2\cos\alpha$, т. е. при

$$\mathrm{tg}\,\alpha_0 = \frac{m_2}{m_1}.$$

Получили тот же результат, что и при первом способе решения. При этом значении угла $\alpha$ функция $E_P(\alpha)$ имеет локальный экстремум.

Но энергетический метод нахождения условия равновесия удобен ещё и тем, что позволяет определить, устойчиво это положение равновесия или нет.

*Исследование на устойчивость.* Поступим так же, как и в задаче 1, т. е. найдём производную от $\dot{E}_P$ как функцию от $\alpha$:

$$\ddot{E}_P = \frac{d\dot{E}_P}{d\alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{2}gl(-m_1\cos\alpha - m_2\sin\alpha) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}gl(m_1\cos\alpha + m_2\sin\alpha).$$

При всех $\alpha \in [0;\ \pi/2]$, в том числе и при $\alpha = \alpha_0$, $\ddot{E}_P > 0$.

Это означает, что локальный экстремум функции $\dot{E}_P(\alpha)$ $\alpha = \alpha_0$ является локальным минимумом, т. е. положение равновесия устойчивое.

Итак, $\alpha_0 = \mathrm{arctg}\dfrac{m_2}{m_1}$, система имеет минимум потенциальной энергии, положение равновесия устойчивое.

**Задача 3**. Стержень изогнут в виде полуокружности радиуса $R$. На нём находятся две бусинки массами $m_1$ и $m_2$. Бусинки связаны невесомой нерастяжимой нитью длиной $l = R$ и могут свободно без трения скользить по полуокружности (рис. 4). Определите угол $\alpha$ между горизонталью и радиусом, проведённым к бусинке $m_1$, когда система находится в положении равновесия. Устойчиво ли найденное положение равновесия?

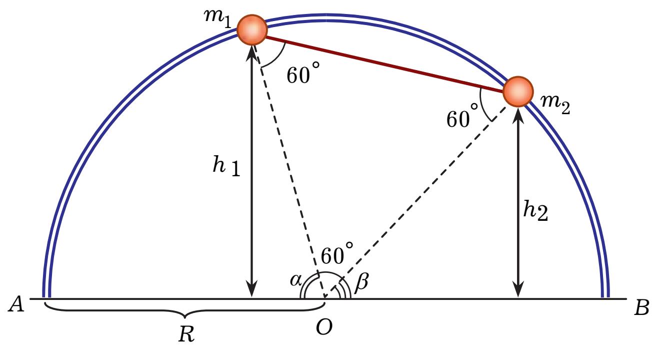



*Рис. 4*

**Решение.** Решим эту задачу энергетическим методом. Рассмотрим потенциальную энергию системы, которая складывается из потенциальных энергий бусинок $m_1$ и $m_2$.

Если угол между горизонталью и радиус-вектором бусинки $m_1$ равен $\alpha$, то для высот относительно уровня $AB$ получим:

$$h_1 = R\sin\alpha,$$

$$h_2 = R\sin\beta = R\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) =$$

$$= R\left(\sin\frac{2\pi}{3}\cos\alpha - \cos\frac{2\pi}{3}\sin\alpha\right) =$$

$$= R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right) =$$

$$= \frac{R}{2}(\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha).$$

Потенциальная энергия системы из двух бусинок:

$$E_P = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 =$$

$$= m_1 g R\sin\alpha + m_2 g\frac{R}{2}(\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha).$$

Найдём первую производную $\dot{E}_P$:

$$\dot{E}_P = \frac{dE_P}{d\alpha} = gR\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)\cos\alpha -$$

$$-m_2 gR\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$$

Функция $\dot{E}_P$ имеет локальный экстремум ($\dot{E}_P = 0$) при

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{1}{2}\right).$$

Чтобы определить, является ли этот экстремум максимумом или минимумом, найдём вторую производную от функции $E_P$:

$$\ddot{E}_P = \frac{d\dot{E}_P}{d\alpha} =$$

$$= -gR\left[\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}m_2\cos\alpha\right].$$

При всех $\alpha \in [0;\ \pi/2]$, в том числе и при $\alpha = \alpha_0$, $\ddot{E}_P < 0$.

Это означает, что в точке $\alpha = \alpha_0$ функция $E_P(\alpha)$ имеет максимум, т. е. положение равновесия является неустойчивым. При небольшом отклонении угла $\alpha$ от положения

$\alpha = \alpha_0$ бусинки сразу будут соскальзывать или в точку $A$, или в точку $B$.

Итак, $\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{1}{2}\right)$, система имеет максимум потенциальной энергии, положение равновесия неустойчивое.

**Замечания к задачам 2 и 3.** Физический смысл результата, полученный в задачах 2 и 3, будет понятен, если рассмотреть, как изменяется положение центра масс бусинок в одной и другой задачах. На рис. 5 и рис. 6 показано положение центра масс для случая $m_1 = m_2 = m$.

Из рисунков видно, что при изменении угла $\alpha$ высота (положение) центра масс бусинок в первом случае увеличивается (потенциальная энергия увеличивается), а во втором – уменьшается. Поскольку любая система стремится к положению с минимумом потенциальной энергии, то из этого следует, что в задаче 2 система имеет устойчивое положение равновесия, а во втором – неустойчивое (задача 3).

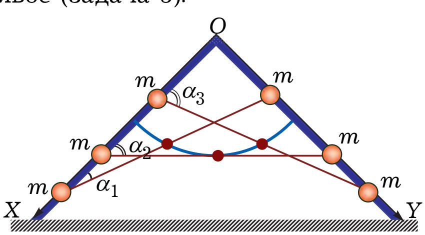



*Рис. 5. Стержень изогнут в виде равнобедренного треугольника с прямым углом при вершине. Система находится в положении устойчивого равновесия*

Кривые, которые описывает центр масс системы, представляют собой дуги окружности: в первом случае часть дуги вогнутая, во втором – выпуклая.

Покажем, что эти кривые действительно представляют собой части окружностей, и найдём их радиусы.

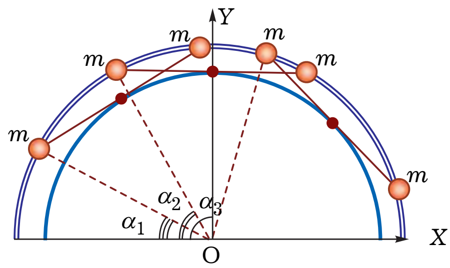



*Рис. 6. Стержень изогнут в виде полуокружности. Система находится в положении неустойчивого равновесия*

На рис. 5 в системе координат $XOY$, центр которой разместим в вершине прямоугольного треугольника, запишем координаты центра масс:

$$x = \frac{l}{2}\cos\alpha, \quad y = \frac{l}{2}\sin\alpha.$$

Для любого прямоугольного треугольника, который образован координатными осями и нитью, соединяющей бусинки, получим:

$$x^2 + y^2 = \frac{l^2}{4}.$$

А это выражение является уравнением окружности с центром в точке $O$ и радиусом $l/2$.

Аналогично сделаем и для 2-го случая, показанного на рис. 6. Начало системы координат совместим с центром полуокружности. Поскольку длина нити равна радиусу окружности ($l = R$), то нить и радиусы окружности образуют равносторонний треугольник. Координаты центра масс:

$$x = \frac{l\sqrt{3}}{2}\left|\cos\alpha\right|, \quad y = \frac{l\sqrt{3}}{2}\sin\alpha,$$

откуда $x^2 + y^2 = \frac{3l^2}{4}$, что является уравнением окружности с центром в т. $O$ (центр совпадает с центром окружности изогнутого стержня) и радиусом $l\sqrt{3}/2$.

Если массы бусинок не равны ($m_1 \neq m_2$), то центр масс системы будет описывать дуги эллипса.

Возникает вопрос: существует ли такая линия, что две бусинки, расположенные на изогнутом по этой линии стержне и связанные нитью длиной $l$, будут находиться в безразличном равновесии?

Оказывается, такая линия существует – это две ветви циклоиды (см. рис. 7). Циклоиду описывает точка на ободе колеса, которое катится горизонтально без скольжения. Если радиус колеса $R$, то нить должна быть длиной $l = 2R$.

Когда система из двух бусинок перемещается по ветвям циклоиды, то центр масс не изменяет своего положения относительно горизонтального уровня. А это значит, что значение потенциальной энергии при перемещении бусинок не изменяется.

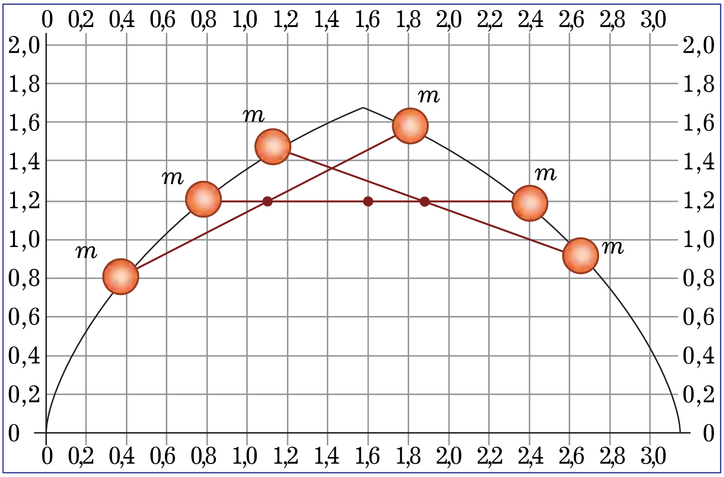



*Рис. 7. Стержень изогнут в виде двух ветвей циклоиды. Система находится в положении безразличного равновесия*

## Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

### «Историческое» происшествие

Сколь примитивными по сравнению с современными были в прошлом веке первые самолёты, начинавшие освоение воздушных просторов, сейчас уже трудно даже вообразить. Представьте себе только такой курьёзный случай, произошедший в 1917 г.

В окрестностях г. Портсмута (Англия) стояла высокая радиомачта. Однажды по направлению к ней из города вылетел самолёт. Управлявший им пилот не сумел обойти мачту стороной (или выше) – самолёт столкнулся с ней и... застрял в её крепёжных тросах. Пилот вылез из машины и спустился по тросу на землю.