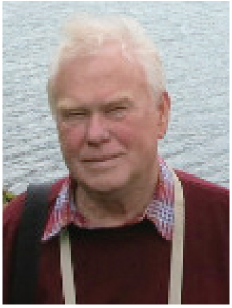

Овчинников Александр Сергеевич
Доцент кафедры общей физики Национального исследовательского университета «МИЭТ».

Плис Валерий Иванович
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Московского физико-технического института (МФТИ).

Характерные задачи на вступительных экзаменах по физике и физических олимпиадах школьников

В настоящее время в издательстве «Азбука-2000» готовится к печати сборник «Задачи по элементарной физике», авторы С.Ю. Куклин, А.С. Овчинников, В.И. Плис, И.В. Федоренко. Сборник ориентирован на учащихся 9 – 11 классов, изучающих физику на профильном уровне, содержит примерно 1500 задач (из них около 300 с решениями) и охватывает все разделы школьного курса физики. Для первоначального ознакомления с методикой решения задач сборник предлагает множество совсем простых упражнений. Основное наполнение сборника – это классические задачи, выдержавшие испытание временем; задачи, ставшие по существу фольклором, предлагавшиеся в разные годы на вступительных экзаменах в МГУ им. М.В. Ломоносова, МФТИ, НГУ и в других ведущих физических вузах РФ. В сборник включено небольшое количество задач, предлагавшихся на различных этапах всероссийских олимпиад школьников по физике. Сборник может заинтересовать учителей, преподавателей подготовительных курсов, руководителей физических кружков и факультативов.

В статье, адресованной старшеклассникам, рассмотрены задачи из упомянутого сборника задач, скорее сложные, чем простые, техника решения которых порой недостаточно подробно обсуждается в школьном курсе физики.

В первом примере представлен векторный метод решения задач кинематики.

Задача 1. Камень брошен под углом к горизонту. На каком расстоянии s от точки старта находится камень через $T = 1$ с, если известно, что векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{v}(T)$ взаимно перпендикулярны? Ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м/с}^2$. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Решение. Движение камня в однородном поле тяжести равнопеременное, следовательно, $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$. При таком движении перемещение за время от 0 до t, равное $\vec{s}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \vec{g}\dfrac{t^2}{2}$, можно, с учётом первого равенства, представить в виде:

$$\vec{s}(t) = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}(t)}{2}t.$$

Искомое расстояние есть величина s вектора перемещения камня за время T полёта

$$s = \left|\vec{s}(T)\right| = \frac{\left|\vec{v}_0 + \vec{v}(T)\right|}{2}T.$$

В момент времени T вектор $\vec{v}(T)$ скорости ортогонален вектору $\vec{v}_0$ и равен $\vec{v}(T) = \vec{v}_0 + \vec{g}T$ (см. рис. 1).

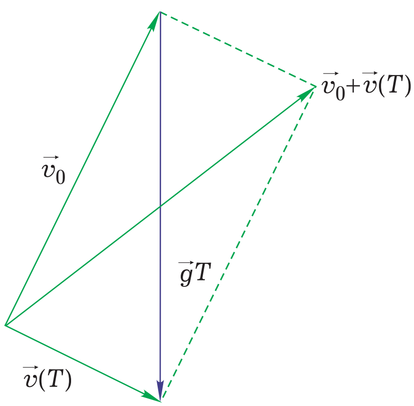

Рис. 1

Диагонали прямоугольника равны

$$\left|\vec{v}_0 + \vec{v}(T)\right| = \left|\vec{v}(T) - \vec{v}_0\right| = \left|\vec{g}T\right| = gT.$$

Тогда искомое расстояние равно

$$s = gT^2/2 \approx 5\,\text{м}.$$

Следующая задача иллюстрирует применение основного закона динамики в прямой ньютоновской формулировке: в инерциальной системе отсчёта приращение импульса пропорционально силе и происходит по направлению силы.

Задача 2. К телу, первоначально покоившемуся на шероховатой горизонтальной плоскости, прикладывают в течение времени $t_1 = 10$ с постоянную горизонтальную силу величиной $F = 5$ Н. После прекращения действия силы тело движется до остановки в течение времени $t_2 = 40$ с. Определите величину $F_{\text{тр}}$ силы трения скольжения, считая её постоянной.

Решение. На рис. 2 показаны ИСО и силы, действующие на тело в процессе разгона. По второму закону Ньютона

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}.$$

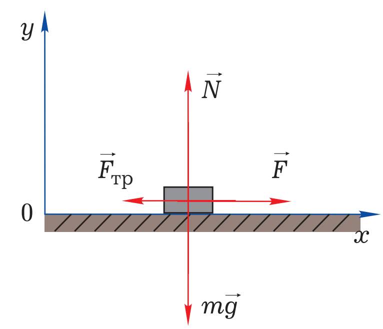

Рис. 2

Переходя к проекциям на горизонтальную ось, находим элементарные приращения импульса в процессе разгона

$$\Delta p_{x1} = (F - F_{\text{тр}})\Delta t$$

и в процессе торможения $(F = 0)$

$$\Delta p_{x2} = -F_{\text{тр}}\Delta t.$$

Просуммируем все приращения импульса тела от старта до остановки:

$$\sum \Delta p_x = \sum_{0 \le t \le t_1} (F - F_{\text{тр}})\Delta t + \sum_{t_1 \le t \le t_1 + t_2} (-F_{\text{тр}})\Delta t.$$

Напомним, что для любой физической величины сумма приращений равна разности конечного и начального значений. Тогда

$$p_{x\,\text{конечн}} - p_{x\,\text{начальн}} = $$
$$= (F - F_{\text{тр}})t_1 + (-F_{\text{тр}})t_2.$$

С учётом равенств $p_{x\,\text{конечн}} = 0$, $p_{x\,\text{начальн}} = 0$ и независимости сил от времени приходим к ответу на вопрос задачи:

$$F_{\text{тр}} = \frac{t_1}{t_1 + t_2} F = 1\,\text{Н}.$$

Задачи динамики криволинейного движения нередко вызывают затруднения у учащихся. Ключевыми элементами техники решения таких задач являются: анализ движения, выбор системы отсчёта, переход из одной системы в другую, выбор направлений, на которых связь проекций сил и ускорения выглядит наиболее просто и т. д.

Задача 3. По длинной проволочной винтовой линии радиуса R с шагом H, ось которой вертикальна, скользит бусинка. Коэффициент трения скольжения бусинки по проволоке равен μ ($\mu < H/2\pi R$). Найдите установившуюся скорость v скольжения бусинки. Ускорение свободного падения g.

Решение. На бусинку действуют силы: тяжести mg, нормальной реакции N и трения $F_{\text{тр}} = \mu N$, при этом $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$, здесь $\vec{N}_1$ – горизонтальная составляющая, а $\vec{N}_2$ лежит в одной плоскости с $m\vec{g}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ (см. рис. 3). По второму закону Ньютона следует, что с ростом величины скорости составляющая $\vec{N}_1$ нормальной реакции и сила трения будут расти по величине, так что естественно ожи-

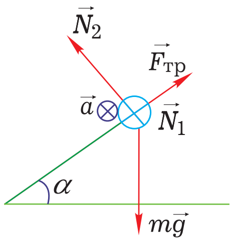

Рис. 3

дать выхода движения на установившийся режим скольжения с некоторой скоростью v. Для определения этой скорости перейдём в инерциальную систему отсчёта (ИСО), движущуюся по вертикали вниз со скоростью $v\sin\alpha$, здесь α – угол наклона вектора скорости к горизонту, $\operatorname{tg}\alpha = H/2\pi R$. В выбранной ИСО бусинка равномерно движется по окружности радиуса R со скоростью $v\cos\alpha$, при этом ускорение бусинки направлено по нормали к оси винтовой линии и по величине равно $(v\cos\alpha)^2/R$. Из второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Переходя к проекциям сил и ускорения на нормальное к оси направление, находим:

$$m\frac{(v\cos\alpha)^2}{R} = N_1.$$

В вертикальной плоскости

$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Переходя к проекциям сил на взаимно ортогональные направления, получаем:

$$F_{\text{тр}} = mg\sin\alpha,$$
$$N_2 = mg\cos\alpha.$$

Из приведённых соотношений с учётом $F_{\text{тр}} = \mu\sqrt{N_1^2 + N_2^2}$ следует:

$$v = (gR/\mu)^{1/2} \times$$
$$\times\left[\left(\operatorname{tg}^2\alpha - \mu^2\right)\left(\operatorname{tg}^2\alpha + 1\right)\right]^{1/4}.$$

При исследовании взаимодействия тел важную роль играют законы сохранения. Рассмотрим характерную задачу.

Задача 4. На железнодорожной тележке массой M жёстко закреплён вертикальный щит, повёрнутый на угол α от перпендикулярного рельсам положения (рис. 4). В щит бросают мешок с песком массой m, горизонтальная составляющая начальной скорости которого равна v_0 и направлена вдоль рельсов.

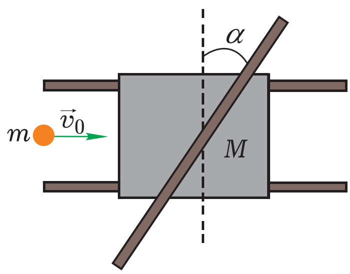

Рис. 4

Найдите скорость тележки в двух случаях:

1) мешок, ударившись о щит, сполз по нему вниз и упал на тележку;

2) мешок, ударившись о щит, сполз по нему вниз и упал с тележки.

Трением мешка о щит и сопротивлением движению тележки можно пренебречь. До удара тележка была неподвижна.

Решение. В первом случае проекции внешних сил (тяжести и нормальной реакции) на направление рельсов нулевые. Тогда в процессе неупругого взаимодействия мешка с тележкой горизонтальная составляющая импульса системы «мешок + тележка» в проекции на ось, параллельную рельсам, сохраняется, отсюда

$$v_1 = \frac{m}{M+m} v_0 .$$

Рассмотрим второй случай. Введём обозначение v' – горизонтальная составляющая скорости мешка в системе отсчёта, связанной с тележкой. Так же как и в предыдущем случае, в лабораторной системе отсчёта (ЛСО) сохраняется импульс системы «мешок + тележка» в направлении, параллельном рельсам:

$$mv_0 = Mv_2 + m\left(v_2 + v' \sin\alpha\right).$$

Кроме того, в ЛСО не может измениться параллельная щиту горизонтальная составляющая импульса мешка, т. к. трения нет и единственная действующая на мешок горизонтальная сила (сила нормальной реакции) перпендикулярна щиту,

$$mv_0 \sin\alpha = m\left(v_2 \sin\alpha + v'\right).$$

Исключая v' из этих соотношений, приходим к ответу на вопрос задачи:

$$v_2 = \frac{m\cos^2\alpha}{M + m\cos^2\alpha} v_0 .$$

Обратимся к задачам по молекулярной физике и термодинамике.

Задача 5. В вертикальном теплоизолированном цилиндре под теплоизолированным лёгким поршнем, на котором находятся две одинаковые массивные гири, содержится одноатомный идеальный газ в количестве $\nu = 1$ моль. Температура газа T_1. Как изменится температура газа, если одну из гирь снять и «подождать»? Поршень может скользить в цилиндре без трения. Давление воздуха вне цилиндра пренебрежимо мало.

Решение. Заметим, что переход газа из начального равновесного состояния в конечное равновесное состояние – это неравновесный процесс в адиабатической оболочке. Такой процесс не является, конечно, квазистатическим адиабатическим процессом.

По условию поршень лёгкий. В начальном состоянии давление газа $p_1 = \dfrac{2mg}{S}$, тогда уравнение Менделеева – Клапейрона принимает вид $\frac{2mg}{S}H_1S = RT_1$. После снятия одной из гирь и установления равновесия давление газа $p_2 = \frac{mg}{S}$, а уравнение состояния $\frac{mg}{S}H_2S = RT_2$. Цилиндр теплоизолирован (оболочка адиабатическая), следовательно, в начальном и конечном состояниях сумма внутренней энергии газа и потенциальной энергии груза одинакова:

$$\frac{3}{2}RT_1 + mgH_1 = \frac{3}{2}RT_2 + mgH_2.$$

Из приведённых соотношений следует $T_2 = \frac{4}{5}T_1$.

Вычисление теплоёмкости газа в процессе (на каждом шаге) является одной из важных задач термодинамики, недостаточно освещаемой в школьном курсе. Рассмотрим конкретный пример.

Задача 6. Один моль одноатомного идеального газа расширяется в процессе с линейной зависимостью давления от объёма (рис. 5). Найдите зависимость теплоёмкости газа в процессе от объёма. Вычислите теплоёмкость газа в точке A процесса (см. рис. 5).

В какой точке процесса теплоёмкость наибольшая?

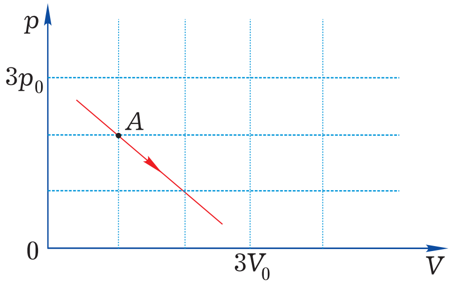

Рис. 5

Решение. Из определения теплоёмкости газа в процессе

$$C_{\text{в проц}} = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_{\text{в проц}},$$

первого начала термодинамики $\Delta Q = \Delta U + \Delta A = \Delta U + p\Delta V$ и зависимости внутренней энергии идеального газа от температуры $U = C_V T$ получаем молярную теплоёмкость газа в процессе, где давление, объём и температура газа получают приращения Δp, ΔV и ΔT:

$$C_{\text{в проц}} = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_{\text{в проц}} = \frac{\Delta U + p\Delta V}{\Delta T} =$$

$$= \frac{C_V\Delta T + p\Delta V}{\Delta T} = C_V + p\left(\frac{\Delta V}{\Delta T}\right)_{\text{в проц}}.$$

Для одноатомного идеального газа $C_V = \frac{3}{2}R$. Приращения Δp, ΔV и ΔT не являются независимыми. Для вычисления $\left(\frac{\Delta V}{\Delta T}\right)_{\text{в проц}}$ перейдём в уравнении состояния $pV = RT$ и уравнении процесса $\frac{p}{3p_0} + \frac{V}{3V_0} = 1$ к малым приращениям переменных. Получим:

$$\frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T},$$

$$\frac{\Delta p}{3p_0} + \frac{\Delta V}{3V_0} = 0.$$

Из приведённых соотношений следует: в любой точке рассматриваемого процесса

$$p\left(\frac{\Delta V}{\Delta T}\right)_{\text{в проц}} = \frac{3V_0 - V}{3V_0 - 2V}R.$$

Тогда

$$C_{\text{в проц}} = C_V + \frac{3V_0 - V}{3V_0 - 2V}R =$$

$$= \frac{8V - 15V_0}{2V - 3V_0}\frac{R}{2}.$$

Отсюда для точки A, в которой $V = V_0$, получим $C = C_V + 2R = \frac{7}{2}R$.

Теплоёмкость газа неограниченно растёт при $V \to \frac{3}{2}V_0 - 0$.

За рамки существующих школьных традиций выходят задачи о переходных процессах в электрических цепях. Проиллюстрируем характерную для ряда таких задач технику решения на следующем примере.

Задача 7. Электрическая цепь (рис. 6) состоит из батарейки с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r, конденсатора ёмкостью C и резистора сопротивлением $R = 4r$. Ключ K замыкают, а затем размыкают в тот момент, когда тепловые мощности в резисторе и батарейке равны. Найдите: 1) ток I через источник сразу после замыкания ключа; 2) ток I_C непосредственно перед размыканием ключа в проводах, подсоединённых к конденсатору; 3) тепловую мощность P_R, рассеиваемую на резисторе сразу после размыкания ключа.

Решение. Сразу после замыкания ключа заряд конденсатора нулевой, тогда равно нулю и напряжение на параллельно соединенных конденсаторе и резисторе (заряд конденсатора, а следовательно и напряжение на нём мгновенно измениться не могут). В рассматриваемый момент времени ток через резистор не течёт, а в цепи, содержащей батарейку и конденсатор, течет ток, величину которого находим по закону Ома: $I = \frac{\mathscr{E}}{r}$.

Далее введём обозначения: I_C – величина тока в цепи конденсатора непосредственно перед размыканием ключа, I_R – величина тока через резистор в этот же момент времени. Тогда равенство рассеиваемых мощностей в резисторе и батарейке $(I_C + I_R)^2 r = I_R^2 R$ с учётом соотношения $R = 4r$ приводит к равенству $I_C = I_R$. В замкнутой цепи, содержащей батарейку и резистор, непосредственно перед размыканием ключа по закону Ома $\mathscr{E} = I_R R + (I_C + I_R) r$. Из приведённых соотношений следует:

$$I_C = I_R = \frac{\mathscr{E}}{R + 2r}.$$

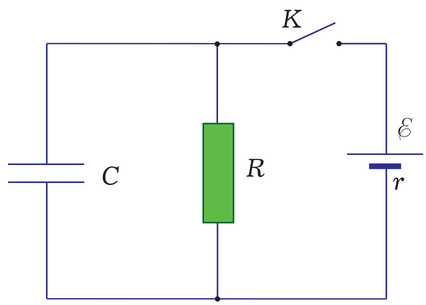

Рис. 6

Сразу после размыкания ключа заряд и напряжение на конденсаторе остаются неизменными. Следовательно, не изменяется и напряжение на резисторе, параллельно присоединённом к конденсатору, тогда в этот момент на резисторе рассеивается мощность

$$P_R = \left(\frac{\mathscr{E}}{R + 2r}\right)^2 R.$$

Следующий пример иллюстрирует динамический метод вычисления периода колебаний механических систем.

Задача 8. Вдали от всех тяготеющих масс находится тонкая однородная спица длины L = 10 м и массой M = 1 кг. По ней без трения может скользить бусинка массой m = = 0,1 кг. В начальный момент бусинка слегка смещена относительно центра спицы и система неподвижна. Через какое время τ бусинка достигнет центра спицы? Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

Решение. В процессе колебаний центр масс системы тел будет оставаться неподвижным. Начало координатной оси OX лабораторной системы отсчёта поместим в центр масс. Начало координатной оси OX' движущейся системы отсчёта свяжем с серединой спицы. В ЛСО ускорение бусинки при малом её смещении x' относительно спицы определяется силой притяжения концевого отрезка спицы, имеющего вдвое большую длину и расположенного на расстоянии $\approx L/2$ от бусинки:

$$a_x = \frac{F_x}{m} = -\frac{Gm(M/L)2x'}{m(L/2)^2} = -\frac{8GM}{L^3}x'.$$

Ускорение стержня при этом смещении бусинки

$$a_{x,c} = -\frac{F_x}{M} = \frac{Gm(M/L)2x'}{M(L/2)^2} = \frac{8Gm}{L^3}x'.$$

Тогда ускорение a'_x бусинки относительно стержня будет равно

$$a'_x = a_x - a_{x,c} = -\frac{8G(M+m)}{L^3}x'.$$

Получено уравнение гармонических колебаний бусинки относительно спицы. Круговая частота этих колебаний

$$\omega = \frac{2}{L}\sqrt{\frac{2G(M+m)}{L}}.$$

Искомое время равно четверти периода гармонических колебаний

$$\tau = (2\pi/\omega)/4 \approx 2{,}0 \cdot 10^6 \text{ с}.$$

В следующей задаче рассмотрено формирование изображения в оптической системе.

Задача 9. Круглую ракушку, лежащую на морском дне на глубине $H = 1{,}4$ м, фотографируют с высоты $h = 2$ м над поверхностью воды и получают резкое изображение. Фокусное расстояние объектива $F = 50$ мм.

Какое расстояние d было установлено на шкале дальности объектива, если диаметр изображения в $k = 60$ раз *меньше* диаметра ракушки?

Найдите показатель преломления n воды.

Решение. Для ответа на первый вопрос обратимся к формуле линзы:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

По условию $\dfrac{1}{k} = \dfrac{f}{d}$. Из приведённых соотношений находим:

$$d = (1+k)F = (1+60) \cdot 0{,}05 = 3{,}05 \text{ м}.$$

Ход лучей, идущих от произвольной точки источника, показан на рис. 7. Найдём расстояние S_1O от мнимого изображения до поверхности воды. Из геометрии хода лучей следует

$$H \cdot \operatorname{tg}\alpha = S_1O \cdot \operatorname{tg}\beta.$$

По закону преломления

$$n \cdot \sin\alpha = \sin\beta.$$

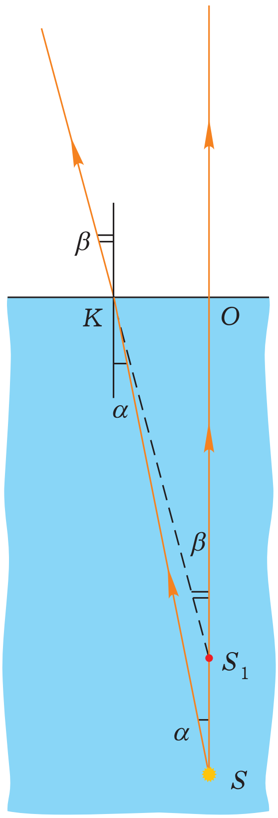

Рис. 7

В рассматриваемой задаче диаметр линзы объектива (обычно это несколько сантиметров) во много раз меньше расстояния от изображения до линзы. Следовательно, изображение формируется узким пучком лучей, образующих малые углы с нормалью к границе раздела сред. Тогда углы α и β на рис. 7 малы: α, β << 1. Для таких углов приближённо можно считать $\sin x \approx \mathrm{tg} x \approx x$.

В этом приближении

$$H \cdot \alpha = S_1O \cdot \beta, \quad n \cdot \alpha = \beta.$$

Из приведённых соотношений находим расстояние от мнимого изображения до поверхности воды $S_1O = \dfrac{H}{n}$, т. е. преломлённые на границе раздела сред световые лучи формируют мнимое изображение ракушки в натуральную величину.

Фотоаппарат следует сфокусировать на мнимое изображение, находящееся от объектива на расстоянии

$$d = h + S_1O = h + \frac{H}{n}, \quad \frac{H}{n} = d - h,$$

$$n = \frac{H}{d-h} = \frac{1,4}{3,05-2,0} = 1,33.$$

Важную роль в физике микромира играют законы сохранения. Рассмотрим конкретный пример.

Задача 10. Неподвижный невозбуждённый атом водорода поглощает фотон. В результате атом переходит в возбуждённое состояние и начинает двигаться. Найдите величину v скорости, с которой стал двигаться атом после поглощения фотона. Энергия возбуждения атома $E_{12} = 1,63 \cdot 10^{-18}$ Дж. Энергия покоя атома водорода $mc^2 = 1,49 \cdot 10^{-10}$ Дж.

Указание. При $x << 1$ можно считать, что $(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x$.

Решение. Поглощение фотона атомом является типичным неупругим столкновением. Проанализируем энергетические превращения. Во-первых, энергия $\dfrac{hc}{\lambda}$ поглощённого фотона идёт на перевод атома в возбуждённое состояние (по условию для этого требуется $E_{12} = 1,63 \cdot 10^{-18}$ Дж), во-вторых, закон сохранения импульса обязывает возбуждённый атом прийти в движение, тогда та или иная часть энергии фотона пойдёт на увеличение кинетической энергии атома. По закону сохранения энергии

$$\frac{hc}{\lambda} = E_{12} + \frac{mv^2}{2}$$

и импульса

$$\frac{h}{\lambda} = mv$$

находим искомую скорость

$$v = c\left[\sqrt{1 + \frac{2E_{12}}{mc^2}} - 1\right] \approx c\frac{E_{12}}{mc^2},$$

которая определяется только отношением энергии возбуждения к массе атома водорода, выраженной в энергетических единицах. При выводе учтено, что дробь под корнем мала ($\sim 10^{-8}$). Это подтверждает нерелятивистское приближение, использованное в решении. При переходе атома водорода из основного состояния в первое возбуждённое величина скорости атома

$$v \approx c\frac{E_{12}}{mc^2} \approx 3,3 \text{ м/с}.$$

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

«Законооткрыватель»

– Когда Ньютон открыл закон всемирного тяготения?
– Когда ему на голову упало яблоко.
– Хорошо, что яблоко. А то вдруг упал бы кирпич?
– Он, наверное, открыл бы закон техники безопасности.