**Мукушев Базарбек Агзашулы**
*Доктор педагогических наук, профессор кафедры физики Государственного университета им. Шакарима г. Семей, обладатель государственного гранта Республики Казахстан «Лучший преподаватель вуза – 2012».*

# Характеристики переменного тока в задачах

В статье представлены основные характеристики переменного тока – мгновенное, амплитудное, действующее и среднее значения тока и напряжения – и взаимосвязь между этими величинами. Рассмотрены примеры на расчёты этих характеристик применительно к переменному, синусоидальному, выпрямленному и различным пульсирующим токам.

Статья предназначена для старшеклассников.

## Введение

Переменным называется такой ток, сила или направление (или то и другое вместе) которого изменяется во времени. Во многих случаях в качестве переменного тока воспринимаются вынужденные электрические колебания, изменяющиеся во времени по гармоническому закону. Это связано с тем, что практически все генераторы вырабатывают электродвижущую силу, изменяющуюся по синусоидальному закону. В действительности, к категории переменного тока относятся и несинусоидальные периодические токи (рис.1).

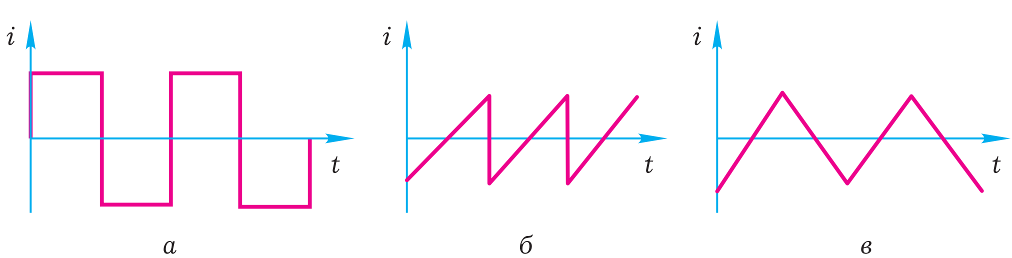


*Рис. 1*

## 1. Основные характеристики переменного гармонического тока

Промышленный переменный ток представляет собой вынужденные электрические колебания с частотой $\nu = 50$ Гц, параметры – напряжение и сила тока – которых изменяются по гармоническому закону:

$$u(t) = U_m \sin\omega t,$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Здесь $u(t)$ и $i(t)$ – мгновенные значения напряжения и силы тока в момент времени $t$, а $U_m$ и $I_m$ – амплитудные значения напряжения и силы тока в цепи, $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота, $\varphi$ – разность (сдвиг) фаз между колебаниями силы тока и напряжения, которая зависит от характера сопротивления, включённого в цепь.

Первая характеристика переменного тока – *мгновенное значение*. Оно всё время изменяется, колеблясь между нулём и максимальным значением. Если в цепь синусоидального переменного тока подключено только активное сопротивление, то мы получим уравнения напряжения и силы тока в следующем виде:

$$u(t) = U_m \sin\omega t,$$

$$i(t) = I_m \sin\omega t.$$

На рисунке 2 представлены соответствующие графики, здесь $T$ – период колебаний.

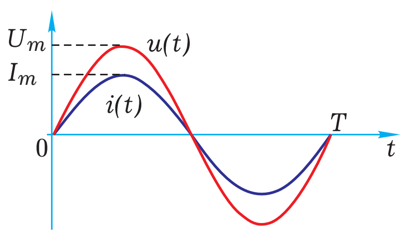


*Рис. 2*

Вторая из величин, характеризующих переменный ток, – его *амплитудное значение*. Оно равно максимальному мгновенному значению тока за период его изменения. Как ни странно, с точки зрения воздействия тока разной формы на различные нагрузки амплитуда тока наименее информативна. Вот почему значение переменного тока определяют сравнением его действия с действием постоянного тока. Можно ли характеризовать величины (сила тока и напряжение) переменного тока его амплитудой? Можно, конечно. Однако практически это очень неудобно, потому что трудно построить приборы, непосредственно измеряющие амплитуду переменного тока.

*Действующее, или эффективное значение* переменного тока – это значение такого постоянного тока, который, проходя через активное сопротивление, скажем, через резистор, выделяет за тот же промежуток времени такое же количество тепла, какое выделит в этой нагрузке переменный ток. Именно эффективное значение тока важно применительно к нагревательным приборам.

Электроизмерительные приборы, изготовленные по принципу магнитного взаимодействия двух последовательно подключённых токов (приборы электродинамической системы), а также тепловые амперметры и вольтметры, включённые в цепь переменного тока, показывают действующие значения тока или напряжения. Эти приборы универсальны, их используют для измерения величин и постоянного тока, и выпрямленных пульсирующих электрических сигналов.

*Среднее значение* переменного тока – это значение такого постоянного тока, который переносит такой же заряд электричества за тот же промежуток времени, что и переменный ток. Это есть *среднее значение изменяющегося тока по времени.*

## 2. Вычисление среднего значения параметров изменяющегося тока с помощью формулы среднего значения функции

Рассмотрим основные характеристики среднего значения *функции*. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной функции $y = f(x)$, осью $Ox$ и вертикальными прямыми $y = a$, $y = b$, равна площади некоторого прямоугольника, построенного на отрезке $[a; b]$. Высота этого прямоугольника является средним значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Эту величину обозначим через $\bar{f}$ (рис. 3).

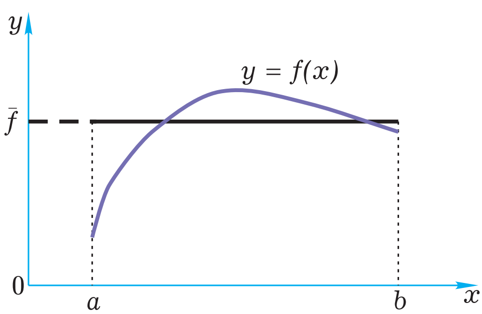


*Рис. 3*

В общем случае она определяется по формуле:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

**Пример.** Скорость материальной точки изменяется в зависимости от времени по закону $v = 2 + t$. Нужно найти среднюю скорость прямолинейного движения точки в интервале времени от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 6$ с.

Из школьного учебника физики известно, что $v_{\text{ср}} = \frac{s}{t}$. Средняя скорость тела – это отношение перемещения тела ($s$) к величине затраченного времени ($t$). Нарисуем график зависимости скорости от времени $v = 2 + t$ (рис. 4). Также известно, что площадь под графиком (зелёный цвет) скорости участка $AB$ численно равна перемещению в интервале времени от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 6$ с. Итак, $s$ есть площадь тапеции:

$$s = \frac{1}{2}(8+4)(6-2) = 24(\text{м}),$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t} = \frac{24}{4} = 6\ (\text{м/с}).$$

Если используем понятие среднего значения функции, то получим такое же значение средней скорости материальной точки, вычисленное графически:

$$v_{\text{ср}} = \frac{1}{6-2}\int_2^6 (2+t)dt = 6\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

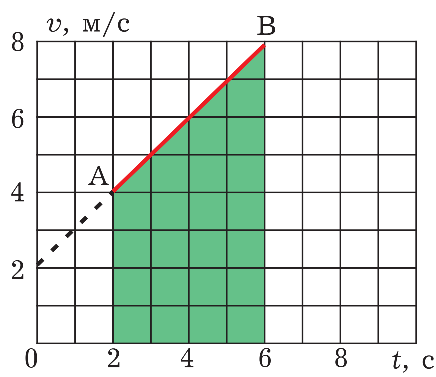


*Рис. 4*

При изучении физических процессов в большинстве случаев мы имеем дело со средним значением изменяющейся величины по времени. Встречается также понятие среднего значения по расстоянию. Скорость, усреднённая по расстоянию, используется в гидродинамике.

Для переменного тока, форма которого симметрична относительно оси времени, например, для синусоидального сигнала, среднее значение тока равно нулю.

Переменный ток в течение периода имеет различные мгновенные значения. Естественно поставить вопрос: какое же значение тока (или напряжения) будет измеряться амперметром (или вольтметром), включённым в цепь? Если в цепь переменного тока включить прибор магнитоэлектрической системы, который предназначен для измерения среднего значения тока в цепи, то этот прибор зафиксирует нулевое значение. Действительно, в течение каждого периода ток полпериода протекает в одном направлении и полпериода – в другом. В цепи такого тока не будет происходить электролиза, и таким током нельзя заряжать аккумулятор.

Однако, когда говорят о среднем значении синусоидальной величины, обычно имеют в виду среднее значение за полпериода. На рисунке 5 изображена кривая изменения синусоидального переменного тока за полпериода (рис. 5).

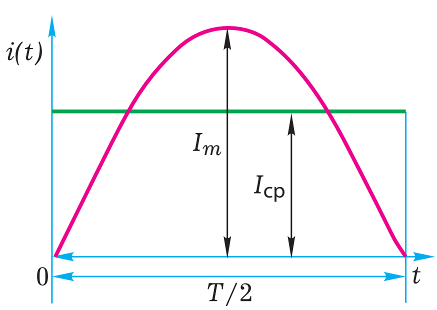


*Рис. 5*

Построим прямоугольник с основанием $T/2$ и площадью, равной площади, заключённой между кривой графика и горизонтальной осью. Высота прямоугольника будет представлять среднее значение тока за полпериода. Используя выражение среднего значения функции (1) находим среднее значение синусоидального переменного тока за полупериод:

$$I_{cp} = \frac{1}{\frac{T}{2} - 0} \int_0^{T/2} i(t)dt =$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} I_m = 0{,}637 I_m. \quad (2)$$

Такая же зависимость существует между средним и амплитудным значениями напряжения:

$$U_{cp} = 0{,}637 U_m.$$

Для осуществления зарядки аккумулятора или электролиза синусоидальный ток выпрямляют. После выпрямления ток протекает в одном направлении, но его нельзя считать постоянным током. Токи, изменяющиеся только по величине, называют *пульсирующими* токами. Для получения постоянного тока этот пульсирующий ток сглаживается с помощью системы всевозможных фильтров. Внизу на рисунке 6 *а* приведены принципиальная схема однополупериодного выпрямителя переменного синусоидального тока и график напряжения на выходе выпрямителя, а на рисунке 6 *б* представлены двухполупериодный выпрямитель (мостик) и форма полученного напряжения.

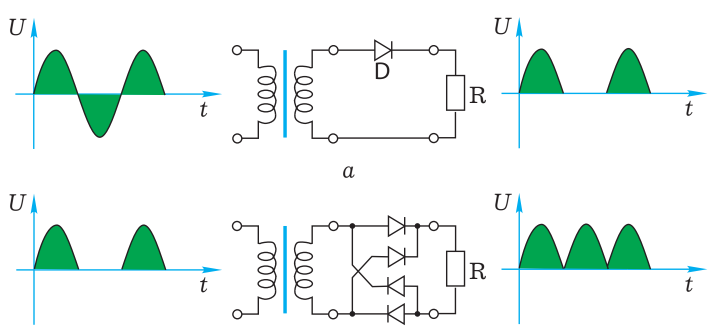


*Рис. 6*

Такие средние значения тока или напряжения уже можно измерить магнитоэлектрическим прибором, принцип действия которого основан на взаимодействии проводника с током и постоянного магнитного поля.

## 3. Обобщённые формулы среднего и действующего значений переменного тока

Поскольку к категории переменного тока можно отнести не только синусоидальный ток, но также и другие периодические электрические сигналы произвольной формы, то мы можем написать *обобщённые формулы* для расчёта величин среднего и действующего значений переменного тока.

Среднее значение переменного тока или напряжения равно среднему арифметическому всех мгновенных значений за период:

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt, \qquad U_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T U(t)dt. \tag{3}$$

Аналогично, средневыпрямленные значения тока и напряжения равны соответственно

$$I_{\text{ср.выпр}} = \frac{1}{T}\int_0^T |i(t)|\,dt, \qquad U_{\text{ср.выпр}} = \frac{1}{T}\int_0^T |U(t)|\,dt. \tag{4}$$

Мгновенная мощность $p$ электрического сигнала есть произведение мгновенного напряжения $u$ на мгновенный ток $i$: $p = u\cdot i$.

Чтобы найти среднюю мощность за период, необходимо просуммировать работы, совершаемые в бесконечно малые отрезки времени, а затем эту суммарную работу поделить на период $T$. При этом получится мощность, которая выделилась бы, если в каждый момент совершалась бы одна и та же работа. Работа за время $dt$ определяется выражением $u\cdot idt$, работа за период $T$ – выражением:

$$\overline{p} = \frac{A}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T u\cdot idt = R\cdot\frac{1}{T}\int_0^T i^2dt.$$

Известно, что мощность $P$ постоянного тока $I$, проходящего через сопротивление $R$, будет $P = I^2R$. Если $P = \overline{p}$, т. е.

$$I^2R = R\cdot\frac{1}{T}\int_0^T i^2dt,$$

то действующие значения величин переменного тока и напряжения определяются по следующим формулам:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}, \quad U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U^2(t)dt}. \tag{5}$$

Представленные формулы применимы также для периодически пульсирующих однонаправленных токов.

## Задачи и решения

Нами предлагаются некоторые задачи на переменный ток, изменяющийся по синусоидальному закону, и также различные виды периодически переменных и однонаправленных пульсирующих токов.

**Задача 1.** Напряжение зажигания неоновой лампы 220 В, напряжение гашения $220/\sqrt{2}$ В. Определить время, в течение которого горит неоновая лампа в каждом полупериоде, если амплитудное значение напряжения в городской сети $220\sqrt{2}$ В.

**Решение.** Неоновая лампа будет гореть в течение того времени каждого полупериода, когда $220 \text{ В} \geq U \geq 220/\sqrt{2}$ В (рис. 7).

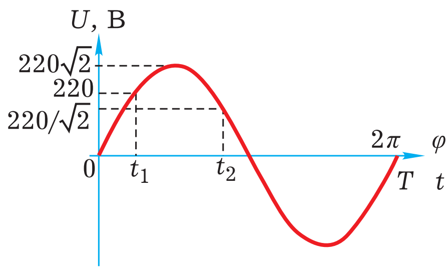


*Рис. 7*

Этот промежуток времени равен $\Delta t = t_2 - t_1$, где $t_1$ и $t_2$ могут быть найдены из уравнения переменного тока:

$$U = U_m \sin\omega t = U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)t.$$

Для момента времени $t_1$ имеем:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)t_1 = \frac{U_1}{U_m} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)t_1 = \frac{\pi}{4}; \quad t_1 = \frac{T}{8}.$$

Для $t_2$ напишем

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)t_2 = \frac{U_2}{U_m} = \frac{1}{2};$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)t_2 = \pi - \frac{\pi}{6}; \quad t_2 = \frac{5T}{12};$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{7}{24}T.$$

Принимая во внимание $T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{50} = 0,2\,\text{с}$, найдём время горения лампы за полупериод: $\Delta t \approx 0,00583$ с.

Поскольку $\frac{T}{2} = 0,01$ с, время зажигания лампы занимает $\frac{\Delta t}{T/2} \approx 0,583$ части полупериода, или 58,3 %.

**Задача 2.** Неоновая лампа, приведённая в задаче 1, включена в цепь переменного пилообразного тока, такого как на рис. 8. Определить время, в течение которого горит неоновая лампа в каждом полупериоде, если максимальное значение пилообразного напряжения $220\sqrt{2}$ В. Период переменного тока равен 0,1 с.

**Решение.** Уравнение пилообразного напряжения на участке $t \in (0; T/4)$ (рис. 8):

$$U = \frac{220\sqrt{2}}{T/4}t. \text{ Здесь } t = t_1;\ U_1 = 220 \text{ В}.$$

В итоге получим $t_1 = \frac{T}{4\sqrt{2}}$.

А уравнение зависимости напряжения от времени для участка $t \in (T/4;\ T/2)$ будет:

$$U_2 = \left(1 - \frac{2}{T}t\right) \cdot 2\sqrt{2} \cdot 220.$$

Здесь $t = t_2$ и $U_2 = 220/\sqrt{2}$. Эти значения соответствуют моменту времени $t_2 = \frac{3}{8}T$. Найдём время горения лампы за половину периода: $\Delta t = t_2 - t_1 \approx 0,0198$ с. Известно, что $\frac{T}{2} = 0,05$ с, а время зажигания лампы занимает $\frac{\Delta t}{T/2} \approx 0,396$ части полупериода, или 39,6%.

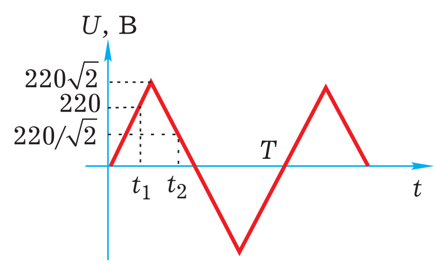


*Рис. 8*

**Задача 3.** Каково среднее значение синусоидального напряжения на выходе однополупериодного выпрямителя, представленного на рис. 9? Амплитудное значение напряжения будем считать равным $U_m$.

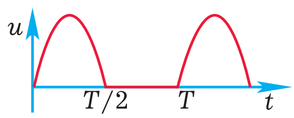


*Рис. 9*

**Решение.** Используя зависимость (3) между средним и амплитудным значениями пульсирующего тока за период, получим:

$$U_{\text{ср}}=\frac{1}{T}\int\limits_0^T U(t)dt = \frac{1}{T}\int\limits_0^T U_m \sin\omega t dt =$$

$$=-\frac{U_m}{T\omega}\cos\omega t\,\Big|_0^T = \frac{1}{\pi}U_m = 0{,}318\ U_m.$$

**Задача 4.** Что покажет электродинамический амперметр, включённый последовательно с резистором, если к нему подаётся пилообразное напряжение (рис. 10)? Сопротивление резистора равно $R$.

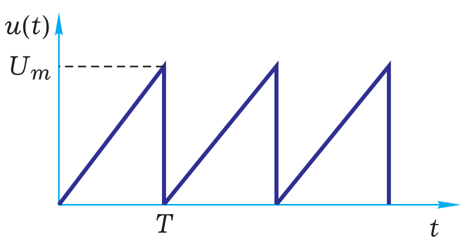


*Рис. 10*

**Решение.** Угол отклонения электродинамического амперметра прямо пропорционален квадрату мгновенного значения переменного тока. Таким образом, прибор покажет действующее значение тока в резисторе:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_0^T U^2(t)dt} =$$

$$=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{1}{T}\cdot\frac{U_m{}^2 T}{3}} = \frac{U_m}{R\sqrt{3}}.$$

**Задача 5.** Для зарядки аккумулятора постоянным током $I_0$ требуется $t_0$ часов. Сколько времени понадобится для зарядки такого аккумулятора от сети через однополупериодный выпрямитель, если действующее значение тока тоже равно $I_0$?

**Решение.** Количество заряда, получаемое аккумулятором за время $t_0$, равно $I_0 t_0$. Если аккумулятор заряжается от сети через однополупериодный выпрямитель, такое же количество заряда равно $I_{\text{ср}}t = I_0 t_0$. Из задачи 3 известно, что $I_{\text{ср}} = \frac{1}{\pi}I_m$; $\frac{1}{\pi}I_m t = I_0 t_0$; $I_m = I_0\sqrt{2}$. Таким образом, $t = \frac{\pi t_0}{\sqrt{2}}$.

**Задача 6**. Имеется два выпрямителя: двухполупериодный и однополупериодный. К каждому из них поочерёдно подключают вначале аккумулятор, а потом нагреватель. Как изменяются зарядный ток аккумулятора и ток в нагревателе при смене выпрямителя?

**Решение**. Зарядный ток – это средний ток в цепи. Поэтому при переходе от двухполупериодного выпрямления к однополупериодному зарядный ток аккумулятора уменьшается *вдвое*. Если нагрузкой выпрямителя является нагреватель, то в таком случае вдвое уменьшается не ток, а мощность. Поскольку, как известно, мощность пропорциональна квадрату тока ($P = I^2R$), то для однополупериодного выпрямления ток уменьшается не вдвое, а в $\sqrt{2}$ раз!

**Задача 7.** На рисунке 11 представлен однополупериодный выпрямитель. $C = 500$ мкФ, $R = 1000$ Ом, частота сети $\nu = 50$ Гц. Считая диод идеальным, найдите средние и действующие значения напряжения и тока на сопротивлении $R$. Амплитудное значение напряжения $U_m = 100$ В.

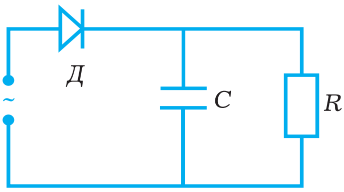


*Рис. 11*

**Решение.** При выбранных параметрах $C$ и $R$ заряд конденсатора меняется незначительно, так как $\frac{1}{2\pi\nu C} \ll R.$ Поэтому ток разрядки конденсатора можно считать постоянным. Тогда $\Delta U = \frac{\Delta q}{C} = \frac{I\Delta t}{C} = \frac{U_m \Delta t}{RC}.$ Если конденсатор разряжается мало, то он подзаряжается в моменты максимального положительного напряжения в сети (рис. 12).

$$\Delta t = T = \frac{1}{\nu}; \quad \frac{\Delta U}{U_m} = \frac{1}{\nu RC} = 0{,}04.$$

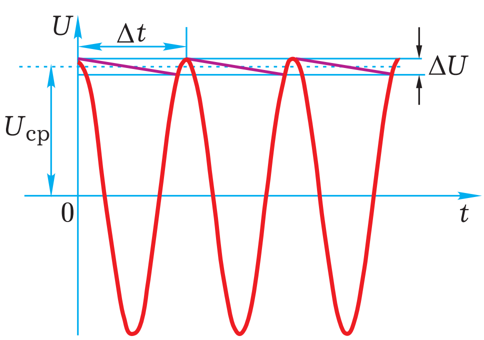


*Рис. 12*

Из рисунка 12 видно, что площадь под линией с фиолетовым цветом равна площади под линией, обозначенной пунктиром. Поскольку $\Delta U \ll U$, то маленький участок синусоиды, где расположена пульсация напряжения, можно считать прямой. Значит:

$$U_{ср} = U_m - \Delta U/2 = U_m(1 - 0{,}02) \approx 98\text{В}.$$

Следовательно, средний ток в активном сопротивлении

$$I_{ср} = U_{ср}/R \approx 98 \text{ мА}.$$

На выходе мы имеем пилообразное напряжение. Считаем для простоты левую сторону зубца «пилы» расположенной вертикально, а вторую – наклонно. Поскольку $\Delta U \ll U$, степень наклонности левой стороны «зубца» не играет существенной роли при расчёте действующего значения напряжения. Итак,

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U(t)^2 dt}.$$

В течение периода напряжение меняется по линейному закону:

$$\Delta U(t) = \Delta U\left(1 - \frac{t}{T}\right) = U_m - \frac{\Delta U}{T}t, \quad t \in (0; T).$$

Таким образом,

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(U_m - \frac{\Delta U}{T}t\right)^2 dt} =$$

$$= \sqrt{U_m^2 - \Delta U U_m + 3\Delta U^2} =$$

$$= \sqrt{9648} \approx 98{,}2\,\text{В};$$

$$I = U/R \approx 98{,}2 \text{ мА}.$$

**Задача 8.** На рис. 13 изображён трёхфазный выпрямитель и графики ЭДС каждой фазы на входе (красный пунктир и серые) и на выходе (красный сплошной) (рис. 14). Максимальное значение ЭДС равно $\mathcal{E}_m$. Чему равна средняя ЭДС? Найдите действующее значение ЭДС.

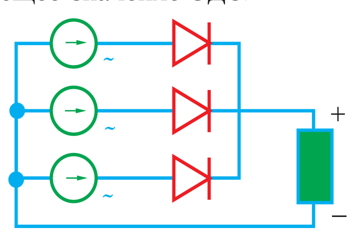


*Рис. 13*

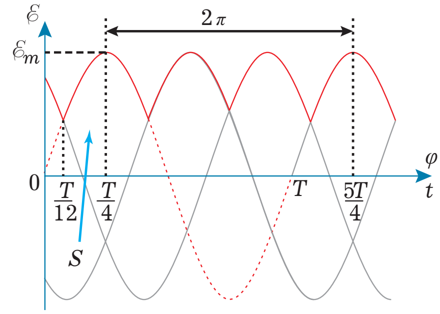


*Рис. 14*

**Решение.** Известно, что среднее значение ЭДС однофазного переменного тока равна $\mathscr{E}_{\text{ср}} = \dfrac{1}{T}\int\limits_0^T \mathscr{E}(t)dt.$

В условиях наложения ЭДС трёх фаз на входе средняя величина ЭДС на выходе вычисляется по формуле $\mathscr{E}_{\text{ср}} = 6S/T$, где $S$ – площадь под графиком синусоиды, когда $t \in \left(\dfrac{T}{12}; \dfrac{T}{4}\right)$:

$$\mathscr{E}_{\text{ср}} = 6 \cdot \frac{1}{T}\int\limits_{T-12}^{T/4} \mathscr{E}_m \sin \omega t dt.$$

Таким образом, $\mathscr{E}_{\text{ср}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}\mathscr{E}_m.$

Действующее значение ЭДС однофазного переменного тока равно

$$\mathscr{E} = \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_0^T \mathscr{E}(t)^2 dt}.$$

Для нашего случая:

$$\mathscr{E} = 6 \cdot \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_{T/12}^{T/4} \mathscr{E}(t)^2 dt} =$$

$$= 6 \cdot \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_{T/12}^{T/4} \mathscr{E}_m^2 \sin^2 \omega t\, dt} = 3\mathscr{E}_m \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi}}.$$

**Задача 9.** Нужно найти отношение среднего и действующего значений тока электрических сигналов, представленных на рис. 1, после двухполупериодного выпрямления к их амплитудному значению.

**Решение.**

*а)* $I_{\text{ср}}/I_m = 1$, $I/I_m = 1$;

*б)* $I_{\text{ср}}/I_m = 0{,}5$, $\quad I/I_m = 1/\sqrt{3}$;

*в)* $I_{\text{ср}}/I_m = 0{,}5$, $\quad I/I_m = 1/\sqrt{3}$.

**Задача 10.** На рис. 15 представлена форма напряжения на выходе фазоимпульсного регулятора. Амплитуда после двухполупериодного выпрямленного синусоидального напряжения сети на входе регулятора $U_m$, $\alpha = \pi/4$ – угол проводимости, меняется в пределах от 0 до $\pi$.

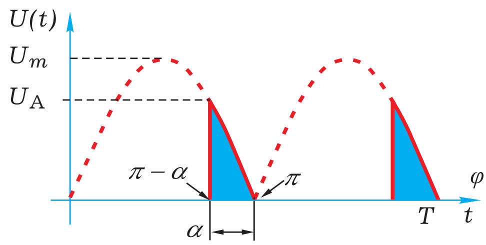


*Рис. 15*

Нужно найти максимальное, среднее и действующее значения на выходе регулятора.

**Решение.**

$$U_{\text{A}} = U_m \sin(\pi - \alpha) = U_m \sin\alpha =$$

$$= U_m \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707 U_m.$$

$$U_{\text{ср}} = \frac{1}{T/2}\int\limits_{3T/8}^{T/2} U_m \sin \omega t dt =$$

$$= U_m (1 - \cos\alpha)/\pi \approx 0{,}093\, U_m.$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T/2}\int\limits_{3T/8}^{T/2} U_m^2 \sin^2 \omega t dt} =$$

$$= U_m \sqrt{(\alpha - (\sin 2\alpha)/2)/(2\pi))} =$$

$$= U_m \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{\sin 2\alpha}{4\pi}} \approx 0{,}045\, U_m.$$

## Литература


1. *Мукушев Б.А.* Переменный ток и его характеристики. – Квант. – 2012. –№4. – С. 30–39.


## Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Клиент получает в мастерской отремонтированную вещь и недоумевает:

– Послушайте, эта штука тикает...

– А не должна?

– Конечно, нет: до ремонта это был барометр!