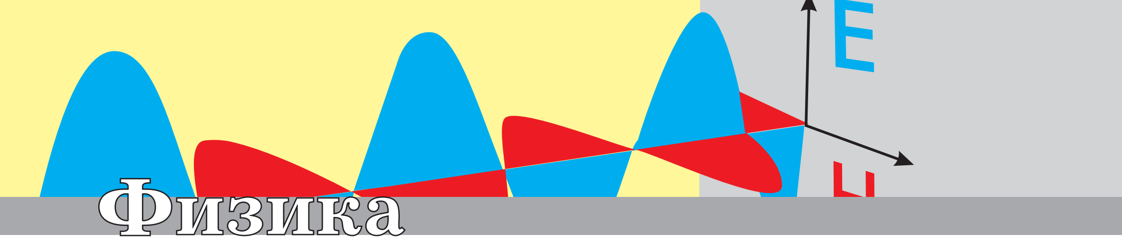


Балебанова Татьяна Вячеславовна
Учитель физики ГОУ ЦО №1874 г. Москвы, высшая квалификационная категория. Преподаватель факультета довузовской подготовки Московского авиационного института, эксперт ЕГЭ, член конфликтной комиссии по физике ЕГЭ г. Москвы. Отличник народного просвещения.

Гравитация

Данная статья предназначена для абитуриентов, готовящихся к единому государственному экзамену (ЕГЭ). Ниже рассмотрены задачи различного уровня сложности. Наиболее простые из них встречаются в тестовой части ЕГЭ. Для их решения нужно чётко знать закон всемирного тяготения и границы его применимости. Более сложные задачи, как правило, комплексные, требуют от абитуриента глубокого понимания физических процессов, а также более сложных математических преобразований.

1. Теоретическое введение

Все тела испытывают действие сил взаимного притяжения. *Закон всемирного тяготения* Ньютона гласит: два тела притягиваются друг к другу с силой, модуль которой прямо пропорционален произведению масс взаимодействующих тел и обратно пропорционален квадрату расстояния между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ – гравитационная постоянная.

В такой форме закон всемирного тяготения применим для:

1) материальных точек (рис. 1);

2) для однородных ($\rho = \text{const}$) шаров, при этом r – расстояние между центрами тел (рис. 2);

3) для материальной точки и однородного шара, при этом r – расстояние между центром шара и материальной точкой (рис. 3).

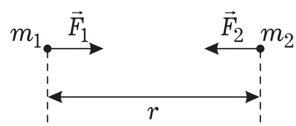


Рис. 1

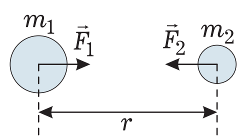


Рис. 2

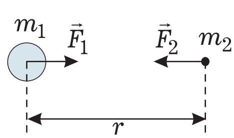
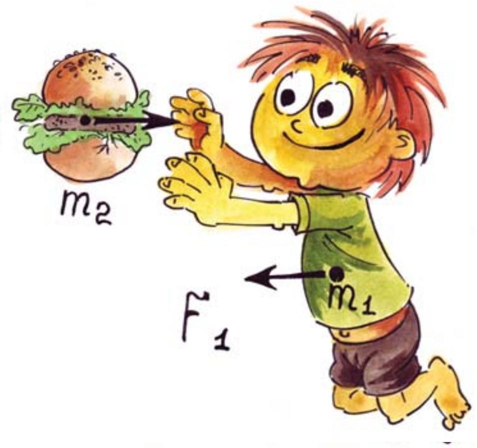


Рис. 3

Потенциальная энергия тел, взаимодействующих по закону все-



мирного тяготения, определяется формулой

$$E_п = -G\frac{m_1 m_2}{r}.$$

Знак «–» соответствует силе притяжения.

Для описания взаимного тяготения тел часто используют понятие гравитационного поля. Любое тело, обладающее массой, создаёт вокруг себя гравитационное поле (поле тяготения). Другое тело, внесённое в это поле, испытывает в каждой его точке действие силы тяготения. При этом сила тяготения всегда направлена в сторону источника поля.

Сила тяжести представляет собой векторную сумму сил всемирного тяготения и инерции, обусловленной вращением Земли. Поскольку максимальная сила инерции на экваторе составляет 0,3% от силы тяготения, то в первом приближении ею можно пренебречь, и для тел на Земле или других небесных телах сила тяжести – частный случай силы всемирного тяготения. Сила тяжести направлена вертикально вниз и зависит от массы тела m и ускорения свободного падения $\vec{g}$:

$$\vec{F}_т = m\vec{g}.$$

Ускорение, которое имел бы центр тяжести любого тела при падении его на Землю с небольшой высоты при отсутствии сопротивления воздуха, называют *ускорением свободного падения*. В гравитационном поле Земли на тело действует сила тяготения:

$$F = G\frac{Mm}{r^2},$$

где $M = 6\cdot 10^{24}$ кг – масса Земли, m – масса заданного тела, $r \geq R$ – расстояние от центра Земли до тела, $R = 6400$ км радиус Земли (если считать Землю идеальным шаром). Тогда на поверхности Земли $(r = R)$ сила тяготения $F = G\frac{Mm}{R^2}$.

Если пренебречь суточным вращением Земли, то сила тяготения равна силе тяжести: $G\frac{Mm}{r^2} = mg$, тогда

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{(R+h)^2},$$

где h – расстояние от земной поверхности до тела. Вблизи поверхности Земли $(h \ll R,\ r \approx R)$ и на её поверхности $(h = 0,\ r = R)$ ускорение свободного падения

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} = 9,8\ \frac{м}{с^2} \approx 10\ \frac{м}{с^2}.$$

Строго говоря, за счёт несферичности Земли расстояния от центра Земли до её поверхности различны: экваториальный радиус Земли равен 6378 км, её полярный радиус – 6356 км, то есть на 21 км меньше. Это значит, что Земля имеет несколько сплюснутую форму, близкую к эллипсоиду вращения. Кроме того, за счёт вращения Земли вокруг оси помимо силы тяготения к телам приложены силы инерции $\vec{F}_i$. Тогда сила тяжести есть геометрическая сумма силы тяготения и силы инерции: $\vec{F}_т = \vec{F} + \vec{F}_i$.

При перемещении вдоль поверхности Земли от полюса к экватору значение силы тяжести несколько убывает: на экваторе она примерно на 0,3% меньше, чем на полюсе.

Таким образом, сила тяжести и ускорение свободного падения зависят от географической широты места наблюдения.

Можно показать, что тело массы m, находящееся внутри Земли (если считать Землю однородным шаром) на расстоянии $r < R$ от её центра, не испытывает притяжения со стороны вышележащего слоя толщиной $R - r$ (см. рис. 4). Тело притягивает только

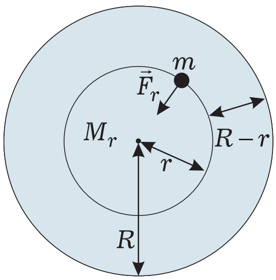


Рис. 4

масса M_r, заключённая внутри сферы радиуса r. Тогда сила тяготения $F_r = G\dfrac{mM_r}{r^2}$. Масса M_r определяется формулой $M_r = \rho V = \rho\dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3$, где ρ – средняя плотность Земли, V – объём шара. Тогда

$$F_r = G\rho\frac{4}{3}\pi \cdot r \cdot m.$$

На поверхности Земли при $r = R$

$$F = G\rho\frac{4}{3}\pi \cdot R \cdot m = mg_0,$$

тогда $F_r = mg_0\dfrac{r}{R} = \dfrac{mg_0}{R}r$, т. е. сила тяготения внутри Земли прямо пропорциональна расстоянию до её центра.

Таким образом, при удалении от центра Земли сила тяготения увеличивается линейно (см. рис. 5), на

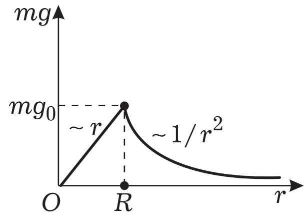


Рис. 5

поверхности Земли равна $F_т = mg_0$, а дальше убывает обратно пропорционально квадрату расстояния.

Искусственные спутники (ИС) движутся вокруг небесных тел.

Первой космической скоростью называют скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно вращалось вблизи поверхности Земли равномерно по окружности (сопротивлением воздуха пренебрегают).

Тело массой m притягивается к Земле вблизи её поверхности с силой тяжести $F_т = mg_0$.

Эта сила создаёт нормальное ускорение, и по 2 закону Ньютона:

$$F = ma_n,$$

где $a_n = \dfrac{v_{1к}^2}{R}$, $v_{1к}$ – первая космическая скорость. Тогда

$$mg_0 = \frac{mv_{1к}^2}{R},$$

откуда $v_{1к} = \sqrt{g_0 R} \approx 8\ \dfrac{км}{с}$, где $g_0 = 9{,}8\ \dfrac{м}{с^2}$ – ускорение свободного падения у поверхности Земли, R – радиус Земли.

При движении ИС по круговой орбите на высоте h от поверхности Земли сила всемирного тяготения создаёт нормальное ускорение (рис. 6):

$$F = ma_n,$$

$$G\frac{mM}{(R+h)^2} = ma_n,\quad a_n = G\frac{M}{(R+h)^2}.$$

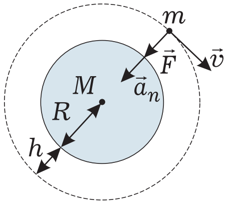


Рис. 6

Поскольку $a_n = \dfrac{v^2}{R+h}$, то $v = \sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}$ – скорость спутника на высоте h от поверхности Земли, где M – масса Земли. Зная, что ускорение свободного падения у поверхности Земли $g_0 = \dfrac{GM}{R^2}$, выводим $GM = g_0 R^2$, тогда круговая скорость искусственного спутника

$$v = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}.$$

Второй космической скоростью называют минимальную скорость, которую, пренебрегая сопротивлением воздуха, надо сообщить телу, чтобы оно преодолело притяжение Земли. Пусть тело находится на поверхности Земли. Тогда потенциальная энергия тела и Земли

$$E_{п1} = -G\frac{Mm}{R},$$

где R – радиус Земли. Если телу сообщают вторую космическую скорость, то его кинетическая энергия

$$E_{к1} = \frac{mv_{2к}^2}{2}.$$

Таким образом на поверхности Земли механическая энергия $E_1 = E_{к1} + E_{п1}$. Для того чтобы тело преодолело земное тяготение, его необходимо удалить на бесконечность: $r \to \infty$, где оно не взаимодействует с Землёй, $E_{п2} = -G\dfrac{Mm}{r} = 0$. Поскольку вторая космическая скорость определяет минимальную скорость, будем считать, что на бесконечности тело покоится, тогда его кинетическая энергия $E_{п2} = 0$ и механическая энергия

$$E_2 = E_{к2} + E_{п2} = 0.$$

Т. к. сопротивлением воздуха пренебрегают, то механическая энергия должна сохраняться: $E_1 = E_2$, или

$$\frac{mv_{2к}^2}{2} - G\frac{mM}{R} = 0,$$

откуда $v_{2к} = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$. Зная, что $GM = g_0 R^2$, получим:

$$v_{2к} = \sqrt{2g_0 R} = \sqrt{2}v_{1к} \approx 11{,}3\ \frac{км}{с}.$$

2. Примеры решения задач. Общие рекомендации по решению

При решении задач старайтесь придерживаться следующего алгоритма. После прочтения задачи перескажите её своими словами, акцентируя внимание на физических закономерностях. Если тело (спутник) движется по окружности вокруг центрального тела (планеты), то к телу приложена сила всемирного тяготения (в частном случае, сила тяжести). Любая сила по второму закону Ньютона создаёт ускорение, которое при равномерном движении по окружности является нормальным (центростремительным). После краткой записи условия сделайте рисунок, он не является обязательным, но, как правило, его наличие облегчает решение задачи. Далее запишите физические законы, обуславливающие процессы в задаче. Старайтесь решать задачи в общем виде, поскольку выполняемая в этом случае проверка размерности является единственным возможным способом проверки решения. После вычислений оцените ответ на реальность. Например, если круговая скорость при движении искусственного спутника вокруг планеты равна нескольким десяткам или сотням метров в секунду (м/с), то ответ неправильный, такие скорости развивают современные автомобили и самолёты.

Ниже разобраны некоторые задачи по гравитации. Логика их решения соответствует предложенному алгоритму. В задачах представлены все математические преобразования, поскольку у некоторых абитуриентов именно эта часть решения вызывает трудности.

Желаем удачи!

Задача 1. Три материальные точки массой m = 2 кг каждая расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной a = 10 см (рис. 7). Найти силу гравитационного взаимодействия одной точки с двумя другими.

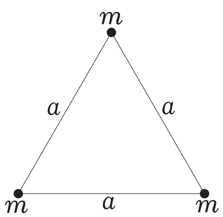


Рис. 7

Сила гравитационного взаимодействия направлена вдоль прямой, соединяющей точки друг с другом. К каждой точке приложены две силы, направленные под углом 60° друг к другу. Тогда векторную сумму сил можно определить по теореме косинусов.

Обозначим точки, как показано на рисунке 8, и определим силу гравитационного притяжения, приложенную к точке 1 со стороны двух других.

Точка 2 притягивает к себе точку 1 с силой, модуль которой определяется законом всемирного тяготения:

$$F_2 = G\frac{m_1 m_2}{a^2}.$$

Поскольку массы точек одинаковы и равны m, то

$$F_2 = G\frac{m_1 m_2}{a^2} = G\frac{m^2}{a^2}. \qquad (1)$$

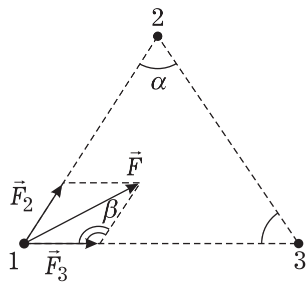


Рис. 8

Точка 3 притягивает к себе точку 1 с силой, модуль которой

$$F_3 = G\frac{m_1 m_3}{a^2} = G\frac{m^2}{a^2}, \qquad (2)$$

то есть

$$F_2 = F_3. \qquad (3)$$

Поскольку силы складываются векторно по принципу суперпозиции

$$\vec{F} = \vec{F}_2 + \vec{F}_3,$$

сложим векторы по правилу параллелограмма (рис. 8). Модуль силы F вычислим по теореме косинусов:

$$F = \sqrt{F_2^2 + F_3^2 - 2F_2F_3\cos\beta}.$$

С учётом равенства сил (3)

$$F = \sqrt{F_2^2 + F_2^2 - 2F_2^2\cos\beta} = \sqrt{2F_2^2\left(1-\cos\beta\right)} = F_2\sqrt{2\left(1-\cos\beta\right)}. \qquad (4)$$

Поскольку в параллелограмме сумма углов при одной стороне равна 180°, то

$$\beta = 180^\circ - \alpha,$$

$$\cos\left(180^\circ - \alpha\right) = -\cos\alpha,$$

тогда выражение (4) принимает вид

$$F = F_2\sqrt{2\left(1+\cos\alpha\right)}.$$

Подставляя (1), получаем конечный результат:

$$F = G\frac{m^2}{a^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)},$$

$$F = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{2^2}{0{,}1^2}\cdot\sqrt{2\left(1+\cos 60^\circ\right)} =$$

$$= 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{4}{10^{-2}}\sqrt{2\left(1+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= 6{,}67\cdot 4\cdot\sqrt{3}\cdot 10^{-9} = 4{,}6\cdot 10^{-8}\,(\text{Н}).$$

Задача 2. Чему равно ускорение свободного падения $g_С$ на поверхности Солнца, если его радиус $R_С$ примерно в 110 раз больше радиуса Земли R, а средняя плотность Солнца $\rho_С$ относится к плотности Земли ρ как 1:4?

Под средней плотностью тела понимают отношение массы тела к его объёму, при этом не учитывается неоднородность тел. Напомним, что все звёзды и с большой степенью точности планеты представляют собой шаровые тела, объём которых определяется радиусами тел: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. У каждой планеты или звезды ускорение свободного падения имеет конкретное значение, определяемое параметрами объекта. В задаче нужно вывести зависимость ускорения свободного падения от таких параметров.

Для любого гравитационного объекта сила тяжести тела массой m

$$F = mg$$

есть частный случай силы всемирного тяготения

$$F = G\frac{Mm}{R^2},$$

где M – масса объекта, R – его радиус. Тогда

$$g = G\frac{M}{R^2}. \qquad (1)$$

Средняя плотность тела по определению

$$\rho = \frac{M}{V},$$

где для шаровых тел $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, тогда

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3},$$

откуда

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим зависимость ускорения свободного падения от средней плотности тела:

$$g = \frac{G}{R^2}\cdot\frac{4\pi\rho R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi G\rho R.$$

Тогда для Солнца и Земли ускорения свободного падения $g_С$ и $g_З$ будут соответственно определяться выражениями

$$g_С = \frac{4}{3}\pi G\rho_С R_С \text{ и } g_З = \frac{4}{3}\pi G\rho_З R_З.$$

Зная ускорение свободного падения на поверхности Земли

$g_З \approx 10\ \dfrac{м}{с^2}$, разделим полученные выражения друг на друга:

$$\frac{g_С}{g_З} = \frac{\rho_С R_С}{\rho_З R_З} = \frac{\rho_С}{\rho_З} \cdot \frac{R_С}{R_З}.$$

Подставив соотношения плотностей и радиусов, выразим ускорение свободного падения на поверхности Солнца:

$$\frac{g_С}{g_З} = \frac{1}{4} \cdot \frac{110 R_З}{R_З} = \frac{110}{4} = 27{,}5,$$

$$g_С = 27{,}5\ g_З,$$

$$g_С \approx 275\ \frac{м}{с^2}.$$

Задача 3. Какова первая космическая скорость для планеты с такой же плотностью, как у Земли, но вдвое меньшим радиусом? $R_З =$ 6400 км.

В задаче нужно найти зависимость первой космической скорости от плотности и радиуса планеты.

Тело массой m притягивается к планете вблизи её поверхности с силой тяжести $F = mg$ (рис. 9). Эта сила создаёт нормальное ускорение, и по 2-му закону Ньютона

$$F = ma_n,$$

где $a_n = \dfrac{v^2}{R}$. Тогда $mg = \dfrac{mv^2}{R}$, откуда

$$v = \sqrt{gR}. \qquad (1)$$

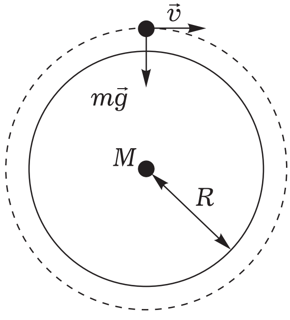


Рис. 9

Отметим, что радиус орбиты есть радиус планеты. Ускорение свободного падения выразим из равенства силы тяжести на поверхности планеты и силы всемирного тяготения:

$$F = mg, \quad F = G\frac{Mm}{R^2},$$

тогда

$$g = G\frac{M}{R^2}, \qquad (2)$$

где M – масса планеты, R – её радиус. Подставим (2) в (1):

$$v = \sqrt{G\frac{M}{R^2} \cdot R} = \sqrt{G\frac{M}{R}}. \qquad (3)$$

Масса планеты

$$M = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3. \qquad (4)$$

Подставим (4) в (3):

$$v = \sqrt{\frac{G}{R} \cdot \frac{4}{3}\pi\rho R^3} = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho R^2} = R\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}. \qquad (5)$$

Для Земли первая космическая скорость

$$v_З = R_З\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho_З}\ . \qquad (6)$$

Разделим (5) на (6):

$$\frac{v}{v_З} = \frac{R}{R_З}\sqrt{\frac{\rho}{\rho_З}}.$$

Подставляя соотношение плотностей и радиусов планет, получим:

$$\frac{v}{v_З} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$v = \frac{1}{2}v_З.$$

С учётом выражения (1), первая космическая скорость для планеты

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{g_З R_З}\ .$$

Подставив $g_З \approx 10\ \dfrac{м}{с^2}$, $R_З \approx 6{,}4 \cdot 10^6$ м, получим:

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{10 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6} =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 10^3\cdot\sqrt{64}=4\cdot 10^3\left(\frac{м}{с}\right)=4\left(\frac{км}{с}\right).$$

Задача 4. Определить радиус орбиты стационарного спутника, т. е. спутника, «висящего» неподвижно с точки зрения земного наблюдателя. Радиус Земли $R_З=6400$ км. Орбита спутника лежит в экваториальной плоскости Земли.

Спутник, «висящий» над поверхностью Земли, вращается вокруг земной оси синхронно с Землей, т. е. период его равномерного вращения составляет, как и у Земли, $T=24$ ч. Сила сопротивления воздуха мала, тогда к спутнику приложена только сила всемирного тяготения со стороны Земли, которая создаёт нормальное ускорение. Необходимо найти радиус орбиты r, т. е. расстояние от центра Земли до спутника.

Запишем 2-й закон Ньютона для спутника (рис. 10):

$$\vec{F}_т=m\vec{a}_n.$$

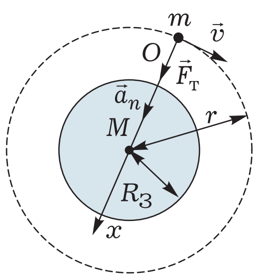


Рис. 10

В проекции на мгновенную ось Ox:

$$F_т=ma_n,$$

где $F_т=G\dfrac{mM}{r^2}$ и $a_n=\dfrac{v^2}{r}$. Тогда

$$\frac{GM}{r^2}=\frac{v^2}{r},$$

или

$$\frac{GM}{r}=v^2, \qquad (1)$$

где $v=\dfrac{2\pi r}{T}$ – линейная скорость спутника при движении по орбите. Подставляя скорость в выражение (1), получаем:

$$\frac{GM}{r}=\frac{4\pi^2r^2}{T^2},\ GM=\frac{4\pi^2r^3}{T^2},$$

откуда

$$r=\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}. \qquad (2)$$

Если бы в условии была дана масса Земли M, то задачу можно было бы считать решённой. Поскольку дан радиус земли $R_З$, выразим массу Земли M из ускорения свободного падения на поверхности Земли g_0, численное значение которого известно.

Тело на поверхности притягивается к Земле с силой всемирного тяготения $F_т=G\dfrac{Mm}{R_З^2}$. С другой стороны, эту же силу называют силой тяжести $F=mg_0$:

$$F_т=F,$$

$$g_0=\frac{GM}{R_З^2}.$$

Из последней формулы выражаем произведение $GM=g_0R_З^2$ и подставляем в выражение (2):

$$r=\sqrt[3]{\frac{g_0R_З^2T^2}{4\pi^2}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{10\cdot 6{,}4^2\cdot 10^{12}\cdot 8{,}64^2\cdot 10^8}{4\cdot 3{,}14^2}}=$$

$$=4{,}26\cdot 10^7\,(м).$$

Задача 5. Какую работу должен совершить двигатель космического аппарата массой $m=2000$ кг, чтобы перевести его с орбиты высотой $H_1=1000$ км над поверхностью Земли на орбиту высотой $H_2=2000$ км? Радиус Земли $R_З=6400$ км.

Работу постоянной силы $\vec{F}$ определяют по формуле $A=FS\cos\angle(\vec{F},\vec{S})$.

Но сила тяготения $F = G\dfrac{mM}{r^2}$, которая удерживает спутник на орбите, зависит от расстояния между телом и Землёй, т. е. является переменной силой. Работу переменной силы можно вычислить как площадь под графиком зависимости силы F от расстояния r: $F = f(r)$ или как разность механических энергий системы спутник – Земля. Поскольку площадь под графиком зависимости $F = f(r)$ представляет собой криволинейную трапецию, будем искать работу A по разности механических энергий.

Находясь на орбите, космический аппарат движется с определённой скоростью, т. е. на орбите аппарат обладает кинетической и потенциальной энергиями: $E_1 = E_{к1} + E_{п1}$. Для перехода на другую орбиту с энергией $E_2 = E_{к2} + E_{п2}$ двигатель должен совершить работу $A = E_2 - E_1$ (силы сопротивления отсутствуют).

Работа двигателя равна изменению полной механической энергии космического аппарата:

$$A = E_2 - E_1, \quad \text{или}$$

$$A = E_{п2} + E_{к2} - (E_{п1} + E_{к1}). \qquad (1)$$

Потенциальная энергия системы в каждом состоянии соответственно равна

$$E_{п1} = -G\frac{Mm}{r_1} = -G\frac{Mm}{R_З + H_1}, \qquad (2)$$

$$E_{п2} = -G\frac{Mm}{r_2} = -G\frac{Mm}{R_З + H_2}. \qquad (3)$$

Для нахождения скорости аппарата запишем 2 закон Ньютона при его движении на орбите высотой H_1 (рис. 11):

$$\vec{F}_1 = m\vec{a}_{n1}.$$

В проекциях на направление вдоль силы $\vec{F}_1$:

$$F_1 = ma_{n1},$$

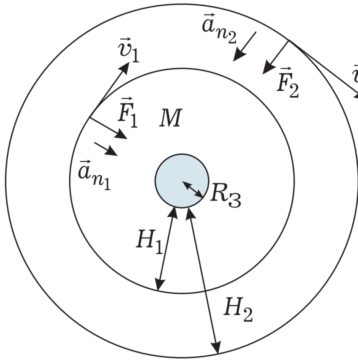


Рис. 11

где $F_1 = G\dfrac{Mm}{r_1^2}$ и $a_n = \dfrac{v_1^2}{r_1}$. Тогда

$$G\frac{Mm}{r_1^2} = \frac{mv_1^2}{r_1}, \text{ или } v_1^2 = G\frac{M}{r_1} =$$

$$= G\frac{M}{R_З + H_1}.$$

Тогда кинетическая энергия на орбите высотой H_1

$$E_{к1} = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{GMm}{2(R_З + H_1)}, \qquad (4)$$

а на высоте H_2 соответственно

$$E_{к2} = \frac{GMm}{2(R_З + H_2)}. \qquad (5)$$

Подставляя выражения (2), (3), (4) и (5) в (1), получим:

$$A = -\frac{GMm}{R_З + H_2} + \frac{GMm}{2(R_З + H_2)} - \left(-\frac{GMm}{R_З + H_1} + \frac{GMm}{2(R_З + H_1)}\right).$$

$$A = -\frac{GMm}{2(R_З + H_2)} + \frac{GMm}{2(R_З + H_1)}.$$

$$A = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{R_З + H_1} - \frac{1}{R_З + H_2}\right). \qquad (6)$$

В предыдущей задаче было показано, что

$$GM = g_0 R_З^2, \qquad (7)$$

где g_0 — ускорение свободного падения у поверхности Земли.

Подставляя выражение (7) в (6), получим:

$$A = \frac{mg_0 R_З^2}{2}\left(\frac{1}{R_З + H_1} - \frac{1}{R_З + H_2}\right).$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10^3\cdot 10\cdot 6{,}4^2\cdot 10^{12}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{6{,}4\cdot 10^6 + 1\cdot 10^6} - \frac{1}{6{,}4\cdot 10^6 + 2\cdot 10^6}\right) =$$

$$= 6{,}56\cdot 10^9\ (\text{Дж}).$$

3. Задачи для самостоятельного решения

Предлагаем читателям задачи для самостоятельного решения. Для самоконтроля указаны ответы.

1. Три материальные точки массой m = 20 кг каждая расположены на одной прямой на расстоянии a = = 10 см друг от друга (рис. 12). Найти силу, действующую на крайнюю точку со стороны двух других.

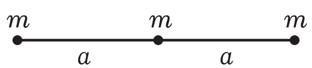


Рис. 12

Ответ. $F = \frac{5}{4}G\frac{m^2}{a^2} = 3{,}3\cdot 10^{-6}$ Н.

2. Радиус Луны приблизительно в 3,7 раза меньше, чем радиус Земли, а её масса в 81 раз меньше массы Земли. Чему равно ускорение свободного падения $g_Л$ на поверхности Луны?

Ответ. $g_Л = g_З\frac{M_Л}{M_З}\cdot\left(\frac{R_З}{R_Л}\right)^2 = 1{,}65\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

3. Во сколько раз первая космическая скорость для Земли больше, чем для Луны? Масса Земли больше массы Луны в 81 раз, а радиус Земли превосходит лунный в 3,75 раза.

Ответ. $\frac{v_{1З}}{v_{1Л}} = \sqrt{\frac{M_З R_З}{M_Л R_З}} = 4{,}65.$

4. Спутник массой m = 30 кг вращается по круговой орбите Земли, обладая кинетической энергией $T = 0{,}54\cdot 10^9$ Дж. С какой скоростью и на какой высоте над поверхностью Земли обращается спутник? Радиус Земли $R_З = 6400$ км.

Ответ. $h = \frac{g_0 m R_З^2}{2T} - R_З = 5000$ км,

$$v = \sqrt{\frac{2T}{m}} = 6\ \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

5. Спутник массой m = 1000 кг вращается по круговой орбите вокруг Земли на высоте h = 1000 км от её поверхности. Какова его потенциальная, кинетическая и полная энергии? Масса Земли $M_З = 6\cdot 10^{24}$ кг, радиус Земли $R_З$ = 6400 км.

Ответ. $E_п = -G\frac{mM_З}{(R+h)} = -5{,}4\cdot 10^{10}$ Дж,

$$E_к = G\frac{mM_З}{2(R+h)} = 2{,}7\cdot 10^{10}\ \text{Дж},$$

$$E = E_к + E_п = -2{,}7\cdot 10^{10}\ \text{Дж}.$$