Богданов Илья Игоревич
Кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 2000 г.

Геометрия Лобачевского

1. Пятый постулат

Любая математическая дисциплина строится, как на фундаменте, на небольшом количестве исходных понятий и наборе аксиом – непроверяемых утверждений, считающихся истинными. Далее из этих понятий и аксиом, как из кирпичиков, строится всё здание соответствующей науки. «Связующим раствором» при этом служат правила вывода, диктующие, каким образом из одних утверждений можно получать другие. Так построена вся математика, начиная с арифметики, но начинать изучение последней в первых классах школ с аксиом было бы шагом, никому не понятным, да и не нужным.

Впервые с подобным построением мы сталкиваемся в школе при изучение геометрии – раздела, который получил свою аксиоматику раньше других, в грандиозном труде Евклида «Начала», созданном около 300 г. до н.э. В этом многотомном сочинении он собрал все (известные ему) достижения математиков его времени.

Само название «геометрия» (землемерие) говорит о том, что наука эта имеет чисто практические корни; евклидова аксиоматика же была введена для повышения уровня строгости в рассуждениях. Дело в том, что очень часто человеку хочется объявить то или иное утверждение «очевидным» на том лишь основании, что оно верно для всех примеров, которые он может вообразить себе. Временами, однако, подобные утверждения оказываются неверными. Аксиоматический подход позволял исключить подобную нестрогость, сводя набор утверждений, принимаемых на веру, к минимуму. Такими утверждениями как раз и являются постулаты и аксиомы. Соответственно, выбирать их надо было по принципу «наибольшей очевидности».

«Начала» Евклида были первым примером подобного построения. Если при введении основных понятий он допускал какие-то нестрогости (например, определяя прямую как «длину без ширины»), то все дальнейшие построения были строгими. Соответственно, очень важным был выбор исходных положений теории. В их качестве у Евклида выступали 9 аксиом и 5 постулатов.[1] Перечислим постулаты Евклида.

I. Любые две точки можно соединить ровно одной прямой.

II. Любой отрезок прямой может быть продлён на любую длину.

III. Можно построить окружность с произвольным центром и произвольным радиусом.

IV. Все прямые углы равны.

V. Если две прямые a и b пересекаются с прямой c, причём сумма внутренних односторонних углов меньше π, то прямые a и b пересекаются, причём именно с той стороны от c, с которой эти односторонние углы находятся.

С первого же взгляда заметно, что пятый постулат выглядит гораздо более громоздко, чем все предыдущие; как мы уже говорили, все постулаты и аксиомы должны были быть достаточно очевидными. Сам Евклид, видимо, понимал отличие этого постулата от других: достаточно много положений в начале его книги не используют этого утверждения в доказательстве. Но дальше Евклид вынужден был прибегнуть к этому постулату.

В дальнейшем многие математики предлагали свои утверждения, сформулированные более коротко и элегантно, и при этом равносильные пятому постулату и призванные его заменить.

Однако возникала и другая сложность, показывающая ещё более существенное отличие пятого постулата от других. Все остальные аксиомы и постулаты можно «пощупать руками». Возьмём, например, третий постулат. Любой человек, работавший с циркулем, верит в него, ибо умеет «воплотить» его на практике, проведя требуемую окружность.

Так же обстоит дело и с остальными постулатами, кроме последнего. С ним же ситуация другая – он далеко не настолько проверяем на практике! Как можно выяснить, пересекаются ли прямые? Можно продолжать их на очень долгое расстояние, но ответа всё равно не получить. Действительно, если проведённые части прямых пересеклись, то всё в порядке; если же нет – мы не можем определить, действительно ли прямые не пересекаются, или же мы просто не продлили их на достаточное расстояние, чтобы найти точку пересечения. Таким образом, пятый постулат кажется гораздо менее очевидным, чем остальные.

Такое положение дел не могло удовлетворить геометров. Поэтому многие учёные[2] люди пытались исправить положение дел, предположив, что столь нетривиальное утверждение уже должно быть доказуемым. Они пытались показать, что пятый постулат *выводится как теорема* из остальных аксиом.

Геометрия, заданная системой всех аксиом *без* пятого постулата, называется **абсолютной геометрией,** а геометрия с пятым постулатом – **евклидовой**.

Таким образом, многие математики на протяжении более, чем 2000 лет, пытались доказать пятый постулат как теорему абсолютной геометрии. Среди таковых можно перечислить О. Хайяма, Д. Валлиса, Д. Саккери, И. Г. Ламберта, А.М. Лежандра. Многие из них считали, что добились успеха; однако каждый раз при подробном разборе доказательства выяснялось, что в нём – явно или неявно – использовалось, кроме остальных аксиом и постулатов Евклида, ещё какое-то «очевидное» утверждение, которое из них не следовало. Более того, каждое из этих утверждений *равносильно* пятому постулату (разумеется, в рамках абсолютной геометрии; иначе говоря, если к аксиомам абсолютной геометрии добавить такое утверждение, то пятый

---

[1] Евклид различал понятия аксиомы и постулата. Это разделение, однако, представляется довольно искусственным, и сейчас эти слова считаются синонимами.

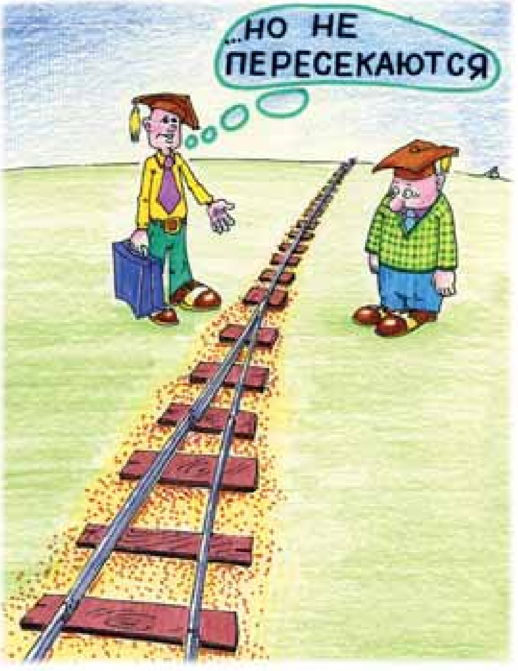
[2] И не только…

постулат будет выводиться как теорема). Приведём (далеко не полный!) список таких утверждений.

Факт 1.1. *Сумма углов произвольного треугольника равна* π.

Факт 1.2. *Сумма углов* некоторого *треугольника равна* π.

Факт 1.3. (Аксиома параллельности) *Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести ровно одну прямую, не пересекающуюся с данной.*



Факт 1.4. *Если прямые* a *и* b *не пересекаются, то расстояние от любой точки* B *прямой* b *до* a *ограничено (прямые «не расходятся далеко»).*

Факт 1.5. *Если у четырехугольника три внутренних угла прямые, то и четвёртый тоже прямой.*

2. Абсолютная геометрия

Попробуем всё же, следуя путям этих математиков, выяснить, что же удаётся доказать, если «забыть» про пятый постулат и ограничиться остальными аксиомами и постулатами. (Заметим, в частности, что тогда мы не можем пользоваться, также, фактами 1.1–1.5.)

Оказывается, можно доказать достаточно много. Перечислим некоторые теоремы, верные в абсолютной геометрии. Обычные доказательства многих из них не используют пятого постулата (и его следствий) и, следовательно, проходят и в более общем случае. Другие же сначала были доказаны только в евклидовой геометрии, а затем уже выяснилось, что пятый постулат для их доказательства не нужен.

Все три основных признака равенства треугольников верны в абсолютной геометрии. Поэтому, в частности, треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда углы при его основании равны, или когда его биссектриса является медианой или высотой. Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка является центром вписанной в этот треугольник окружности[3].

Имеют место многие факты, относящиеся к неравенствам между сторонами и углами. Они в основном опираются на следующую важную лемму.

Лемма 2.1. *Если при пересечении двух прямых* a *и* b *прямой* c *внутренние накрест лежащие углы равны (или внутренние односторонние в сумме дают* π*), то* a *и* b *не пересекаются.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть прямые a и b пересекаются в точке C, а прямая c пересекает их в точках B и A соответственно **(рис. 1).** Отложив на прямой b отрезок $AC' = BC$, где C и C' лежат по разные стороны от c, мы получим, что треугольники ABC и BAC' равны по двум сторонам и углу между ними ($\angle ABC = \angle BAC'$). Тогда $\angle ABC' = \angle BAC$, поэтому $\angle ABC' + \angle ABC = \angle BAC + \angle ABC = \pi$, и точка C' лежит и на прямой a. Поэтому прямые a и b пересекаются в двух точках, что невозможно.

[3] С описанной окружностью дело сложнее – см. далее!

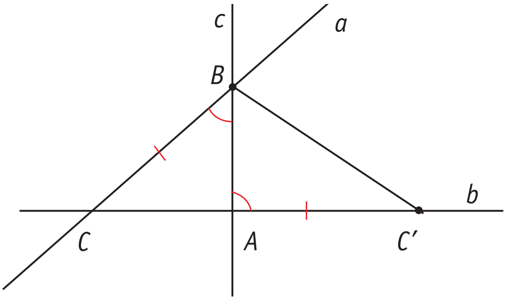


Рис. 1.

Следствие 2.2. *Через точку A, лежащую вне прямой a, проходит хотя бы одна прямая, не пересекающая a.*

Доказательство. Проведём прямую c через A и какую-то точку B прямой a. Тогда через A можно провести прямую b так, чтобы секущая c образовывала с прямыми a и b равные внутренние накрест лежащие углы. Прямая b будет искомой.

Ещё несколько несложных следствий этой леммы мы приведём без доказательства. Читатель может попытаться доказать их самостоятельно.

Теорема 2.3. *Если Лучи AB и CD образуют с отрезком AC углы, сумма которых больше π, то эти лучи не пересекаются.*

Теорема 2.4. *Внешний угол треугольника больше внутреннего, не смежного с ним.*

Теорема 2.5. *Перпендикуляр короче наклонной. Против большей стороны лежит больший угол.*

Теорема 2.6. *Сумма двух сторон треугольника больше его третьей стороны.* (**Указание.** *Опустите высоту.)*

К признакам равенства треугольников можно добавить ещё несколько признаков – например, такой:

Теорема 2.7. (Четвёртый признак равенства треугольников) *Пусть в треугольниках ABC и $A'B'C'$ $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $BC = B'C'$. Тогда эти треугольники равны.*

В евклидовой геометрии доказательство элементарно – из факта 1.1 следует, что $\angle C = \angle C'$, и можно применить стандартный признак равенства. Однако в абсолютной геометрии нельзя пользоваться теоремой о сумме углов! Приведём доказательство, не использующее пятый постулат (и, следовательно, факта 1.1!).

Доказательство. Достаточно доказать, что $\angle AB = \angle A'B'$: дальше можно воспользоваться стандартным признаком равенства по двум сторонам и углу между ними. Предположим противное: $AB < A'B'$ (случай $AB > A'B'$ рассматривается аналогично). Отложим на луче $B'A'$ отрезок $B'A'' = BA$ (**рис. 2**). Тогда треугольники ABC и $A''B'C'$ равны; поэтому $\angle B'A'C' = \angle BAC = \angle B'A''C'$, то есть внешний угол треугольника $A'A''C'$ равен не смежному с ним внутреннему. Это невозможно

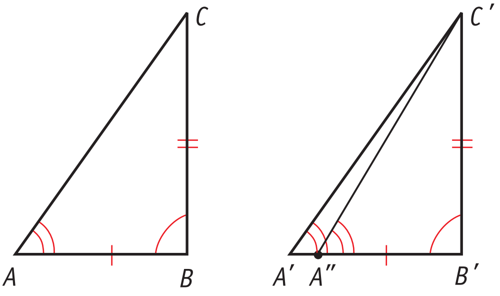


Рис. 2.

Наконец, упомянем, пожалуй, самый интересный для нас факт абсолютной геометрии, доказанный Лежандром.

Теорема 2.8 *Сумма углов треугольника не превосходит π.*

Доказательство. Предположим, что сумма углов треугольника ABC равна $\pi + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Отметим середину O отрезка BC и отложим на луче AO отрезок $OB' = AO$. Пусть для определённости $\angle OAC \le \angle OAB$. Тогда $\triangle AOB = \triangle B'OC$ (**рис. 3**), поэтому сумма углов треугольника $AB'C$ равна $\angle AB'C + \angle B'AC + \angle ACB' =$

$=\angle OAB+\angle OAC+(\angle ACB+\angle BCB')=$
$=\angle BAC+\angle ACB+\angle ABC=\pi+\varepsilon$. Таким образом, из треугольника ABC мы получили треугольник $AB'C$ с той же суммой углов, но угол A в нём уменьшился хотя бы в два раза. Тогда из этого треугольника мы можем получить $\triangle AB''C''$ с той же суммой углов, но с $\angle B''AC''\le B'AC/2\le\angle BAC/4$. Продолжая такой процесс, мы получим в конце концов треугольник $AB'''C'''$, в котором $\angle B'''AC'''<\varepsilon$. Тогда сумма углов $AB'''C'''$ и $AC'''B'''$ будет больше π, чего не бывает согласно упражнению 2.3.

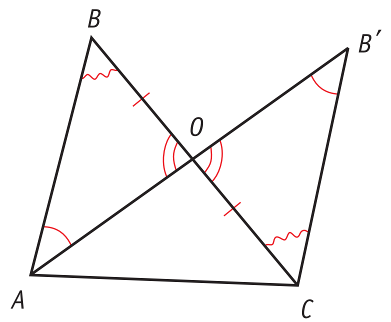


Рис. 3.

Удивительно, но такое утверждение ещё не даёт решения проблемы. Казалось бы – если доказывается такое сильное утверждение, то аналогичными методами должно доказываться и то, что сумма углов не меньше π! Однако все попытки сделать это были безуспешными и, как выяснилось впоследствии, не случайно.

3. Неевклидова геометрия

Как мы видели, в абсолютной геометрии очень продуктивно «работает» метод доказательства «от противного». Этот метод всё чаще использовался в рассуждениях математиков, пытающихся доказать пятый постулат. Иными словами, они заменяли пятый постулат на его отрицание и пытались показать, что из полученной новой системы аксиом следует противоречие. Судя по всему, впервые достаточно далеко продвинулись в этом направлении три человека: Карл Фридрих Гаусс (1777–1855), Янош Бойяи (Больяи) (1802–1860) и Николай Иванович Лобачевский (1793–1856). Однако Гаусс не стал публиковать результатов своих трудов в этой области; Бойяи, к сожалению, недолго занимался наукой, поскольку его постигла душевная болезнь. Лобачевский же большую часть своей жизни занимался этой геометрией, а также попытками объяснить научному миру, что эта геометрия имеет не меньше права на существование, чем евклидова. Получившаяся геометрия, поэтому, называется по имени человека, открывшего её миру и внёсшего наибольший вклад в её развитие, *геометрией Лобачевского*.

В продвижениях этих троих математиков впервые произошёл качественный скачок, отличающий их от всех предшественников: на некоторой стадии развития стало понятно, что никакого противоречия не возникает, и вместо доказательства от противного на свет появляется новая красивая теория, ничем не уступающая обычной евклидовой геометрии.

Опишем начала геометрии Лобачевского.

В первую очередь заметим, что пятый постулат (или, скажем, равносильную ему аксиому параллельности, или утверждение про сумму углов треугольника) достаточно проверить не «во всех точках», а лишь «в одной». Например, если сумма углов одного треугольника равна π, то это верно и для любого треугольника (иначе говоря, факты 1.1 и 1.2 равносильны). Приведём набросок доказательства этой равносильности.

Если разрезать треугольник с суммой углов π на два треугольника, то сумма углов этих двух треугольников будет равна 2π (ибо прибавились два смежных угла, дающие в сумме π). Аналогично, если разрезать треугольник на n треугольников, то сумма углов увеличится на $(n-1)\pi$ и поэтому станет равной $n\pi$. Следовательно, либо сумма углов каждого из треугольников разбиения будет равна π, либо сумма углов хотя бы одного будет больше π. Второй случай по теореме 2.8 невозможен. Поэтому сумма углов любого «достаточно маленького» треугольника равна π; а так как любой треугольник можно разбить на маленькие, то это же верно и для любого треугольника.

Таким образом, можно увидеть, что утверждение аксиомы параллельности либо верно для всех точек и прямых, либо неверно – опять же для всех. Поэтому, предполагая, что аксиома параллельности неверна, можно заменить её не просто на её отрицание – «Через некоторую точку проходит более одной прямой, не пересекающей данную» – а на следующую аксиому.

Аксиома 3.1 (Аксиома Лобачевского) *Через любую точку, не лежащую на прямой a, проходят хотя бы две прямые, не пересекающие a.*

Отсюда, конечно же, следует, что таких прямых бесконечно много – все прямые, лежащие в одном из углов, образованных найденными двумя прямыми, также не пересекают a (**рис. 4**).

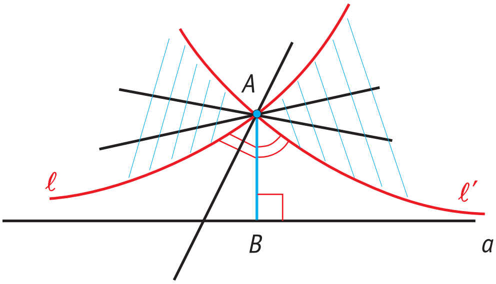


Рис. 4.

Рассмотрим точку A, не лежащую на прямой a; выясним, как ведут себя прямые, проходящие через A, по отношению к этой прямой. Пусть B – основание перпендикуляра, опущенного из A на a. Проведём через A прямую, не пересекающуюся с a, и начнём её вращать вокруг точки A, наблюдая за углом, который она образует с AB. В некоторый момент мы получим «предельное» положение прямой ℓ: если её повернуть ещё чуть-чуть, то она уже пересечёт a, а, повернув на чуть-чуть обратно, получим прямую, не пересекающую a. Тогда нетрудно показать, что сама прямая ℓ не пересекает a; действительно, если они имеют общую точку X, то можно рассмотреть прямую AY, где Y лежит на луче BX за точкой X (**рис. 5**). Она пересекает a, но при этом получается поворотом ℓ в «непересекающую» сторону, что невозможно[4]

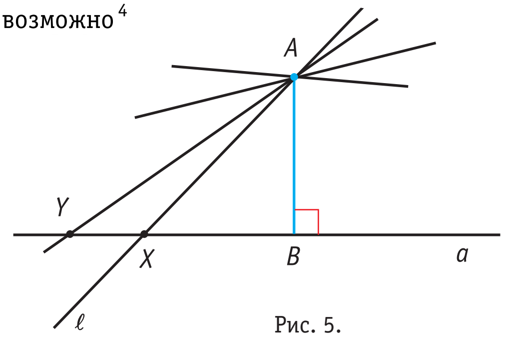


Рис. 5.

Теперь можно ввести понятие *параллельных* лучей как лучей AB и CD, для которых любой внутренний луч угла BAC

[4] Поскольку рисунки мы делаем практически на фрагменте евклидовой плоскости, мы не всегда можем изобразить прямые отрезками; кривые линии на рисунках изображают именно прямые в геометрии Лобачевского.

пересекает луч CD (**рис. 6**). Нетрудно показать, что тогда и любой внутренний луч угла ACD пересекает луч AB, то есть параллельность – действительно «симметричное» понятие. Более того, параллельность останется, если заменить луч AB на другой луч той же прямой, идущий в том же направлении (но с другим концом). Аналогично, можно показать и то, что два луча, параллельных третьему, параллельны между собой. Далее, естественно назвать две прямые (или прямую и луч) параллельными, если они содержат два параллельных луча. Заметим при этом, что две прямые, параллельные третьей, уже не обязаны быть параллельными друг другу (например, прямые ℓ и ℓ' на рис. 4 параллельны прямой a, но не параллельны друг другу) – это будет так лишь при условии, что лучи третьей прямой, параллельные им, совпадают.

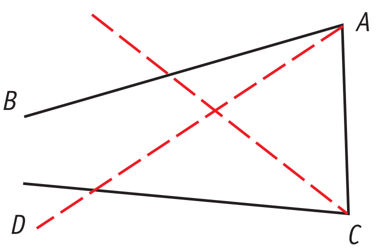


Рис. 6.

Возвратимся к нашей ситуации на рисунке 4. Прямые ℓ и a являются параллельными. Аналогично, если бы мы изначально вращали прямую в другую сторону, то получили бы прямую ℓ', параллельную другому, дополнительному лучу прямой a. Итак, для каждой прямой a и точки A есть две прямые, параллельные ей «с двух разных сторон» (нетрудно видеть, что они не совпадают). При этом все прямые, лежащие в одном из углов, образованных ℓ и ℓ', пересекают a, а лежащие в другом – не пересекают.

В евклидовой геометрии любые две прямые либо пересекаются, либо параллельны. В геометрии Лобачевского появляется третий тип пары прямых – *расходящиеся* прямые. Это прямые, не являющиеся ни пересекающимися, ни параллельными. В нашей ситуации (**рис. 4**) любая прямая, лежащая в двух заштрихованных углах, образованных прямыми ℓ и ℓ', расходится с a.

Заметим, что для любых двух прямых на плоскости Лобачевского найдётся не более одного общего перпендикуляра к ним; действительно, если бы их было два, например, AB и CD перпендикулярны к AD и BC, то эти четыре отрезка образовали бы прямоугольник. Так как сумма его углов равна 2π, то сумма углов одного из двух треугольников, на которые он разбивается диагональю, не меньше π, чего не может быть в геометрии Лобачевского.

Из сказанного выше уже следует, что в предположении аксиомы Лобачевского сумма углов каждого треугольника меньше π. Действительно, она не может быть больше π по теореме 2.8, и не может быть равной π, поскольку тогда выполнялся бы пятый постулат. Оказывается, такое утверждение приводит к удивительному результату. Назовём *дефектом* треугольника ABC величину $\delta(ABC)=\pi-\angle A-\angle B-\angle C.$. Аналогично, *дефектом* многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ назовём величину $\delta(A_1A_2\ldots A_n)=$ $=(n-2)\pi-\angle A_1-\angle A_2-\ldots-\angle A_n$.

Теорема 3.1 *Площадь любого треугольника прямо пропорциональна его дефекту. Иначе говоря, можно выбрать такую единицу измерения площади, что площадь любого треугольника будет численно равна его дефекту.*

Для доказательства теоремы введём сначала одно важное понятие. Пусть дан треугольник ABC (**рис. 7**). Пусть ℓ – прямая, проходящая через середины K и L сторон AB и BC, и пусть AA', BB', CC' – перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника на ℓ. Тогда треугольники $AA'K$ и $BB'L$, а также $BB'K$ и $CC'L$ равны, поэтому $AA' = BB' = CC'$. Четырёхугольник $AA'C'C$ называется *четырёхугольником Саккери* треугольника ABC, присоединённым к стороне AC. Из сказанного видно, что этот четырёхугольник равновелик[5] исходному треугольнику. Как нетрудно посчитать, дефекты треугольника ABC и четырёхугольника $ACC'A$ равны. Кроме того, четырёхугольник Саккери, очевидно, симметричен относительно серединного перпендикуляра к AC (который также является серединным перпендикуляром к $A'C'$).

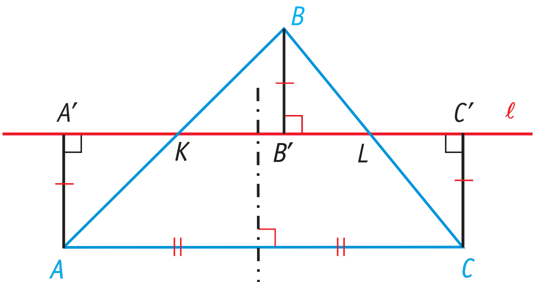


Рис. 7.

Лемма 3.2. *Если дефекты двух треугольников равны, то и их площади – тоже.*

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ – треугольники с одинаковым дефектом.

Предположим, что $AC = A_1C_1$. Тогда в соответственных четырёхугольниках Саккери $AA'C'C$ и $A_1A_1'C_1'C_1$ равны стороны $AC = A_1C_1$ и острые углы при вершинах A и A_1. Тогда при наложении A_1C_1 на AC лучи A_1A_1' и C_1C_1' совместятся с лучами AA' и CC', причём отрезок $A_1'C_1'$ будет перпендикулярен этим лучам. Однако для двух прямых существует не более одного общего перпендикуляра (иначе бы нашёлся прямоугольник, что равносильно пятому постулату), поэтому при этом наложении $A_1'C_1'$ совмещается с $A'C'$. Поэтому четырёхугольники Саккери равны и, следовательно, исходные треугольники равновелики.

Пусть теперь $AC < A'C'$. Пусть $AA'B'B$ – четырёхугольник Саккери для треугольника ABC. Тогда $AA' \le AK = AC/2 < A_1C_1/2$, поэтому на прямой $A'C'$ найдётся точка T такая, что $AT = A_1C_1/2$. Отразив A относительно T, получаем точку C_2, причём $AA'B'B$ является также четырёхугольником Саккери для треугольника ABC_2 (**рис. 8**). Поэтому площади (и дефекты!) треугольников ABC и ABC_2 равны. Далее, треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ равновелики по доказанному выше. Значит, и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равновелики.

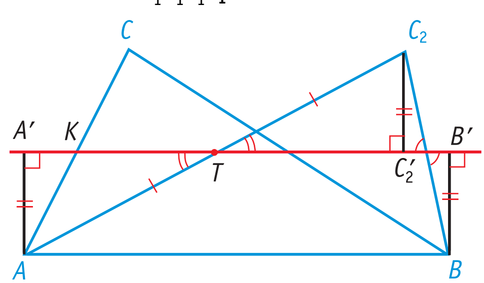


Рис. 8.

Замечание. Попутно мы доказали, что любые два равновеликих треугольника можно разрезать на одинаковые наборы кусочков.

[5] Два многоугольника называются равновеликими, если их площади равны.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть треугольник ABC разрезан на два треугольника ABK и KBC, точка K лежит на стороне AC. Тогда прямое вычисление показывает, что $\delta(ABC)=\delta(ABK)+\delta(KBC)$, так как сумма смежных углов AKB и BKC равна π. Это соображение оказывается решающим, поскольку из него видно, что площадь и дефект, как функции от треугольника, «ведут себя одинаково».

Согласно лемме, любые два треугольника с одинаковым дефектом равновелики. Так как треугольник с дефектом δ можно разрезать на два треугольника, дефекты которых равны $\delta/2$, то при удвоении дефекта площадь тоже удваивается. Тогда мы можем зафиксировать один «эталонный» треугольник; далее, при измерении площади любого другого треугольника от него можно отрезать треугольники, равновеликие эталонному (пока его дефект больше дефекта эталонного), затем треугольники вдвое меньшего дефекта (а значит, и вдвое меньшей площади!) и т.д. Таким образом мы «исчерпаем» весь исходный треугольник со сколь угодно большой точностью. Можно, аналогично, «приблизить» наш треугольник с другой стороны, покрыв его треугольниками с суммарным дефектом, сколь угодно близким к дефекту исходного треугольника.

Упражнение 1. Если у треугольников ABC и $A'B'C'$ соответственные углы равны, то эти треугольники также равны.

Замечание. Эта задача, безусловно, не верна в евклидовой геометрии. По сути дела, она утверждает, что в геометрии Лобачевского нет подобных фигур – любые две подобные фигуры оказываются равными.

4. Циклические линии

В формулировках многих фактов евклидовой геометрии встречается фраза «прямые пересекаются в одной точке или параллельны»[6]. Довольно естественным образом это понятие формулируется так.

Пучком пересекающихся прямых в евклидовой геометрии называется множество всех прямых, проходящих через фиксированную точку. *Пучком параллельных прямых* называется множество всех прямых, параллельных некоторому направлению. Тогда понятие «прямые пересекаются в одной точке или параллельны» переформулируется так: «прямые лежат в одном пучке».

Аналогичные понятия пучков параллельных и пересекающихся прямых вводятся и в геометрии Лобачевского; однако здесь к ним добавляется третье. *Пучком расходящихся прямых* называется множество всех прямых, перпендикулярных фиксированной прямой. Ясно, что любая пара таких прямых расходится (**рис. 9**).

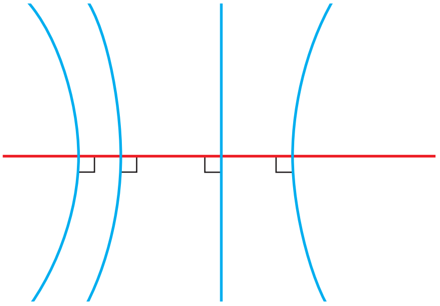


Рис. 9.

[6] Например, для произвольных трёх точек A, B, C серединные перпендикуляры к отрезкам AB, AC и BC проходят через одну точку или параллельны.

Заметим, что любая пара прямых принадлежит ровно одному пучку. Для пересекающихся или параллельных прямых это очевидно, для расходящихся – следует из того, что для них есть единственный общий перпендикуляр.

Оказывается, для получения многих теорем, аналогичных теоремам евклидовой геометрии, такое понятие просто необходимо.

Теорема 4.1 *Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника принадлежат одному пучку.*

Замечание. Мы не будем приводить примеров, когда при этом реализуются все три типа пучков; заметим, однако, что примеры такие приводятся.

Доказательство. Пусть a, b, c – серединные перпендикуляры к сторонам BC, AC, AB соответственно. Если два из них пересекаются в некоторой точке O, то, естественно, она оказывается равноудаленной от всех вершин и, соответственно, лежит на третьем перпендикуляре.

Пусть a и c расходятся, и пусть h – их общий перпендикуляр (**рис. 10**). При симметрии относительно a точки B и C переходят друг в друга, а прямая h – в себя. Поэтому расстояния от точек B и C до h равны; аналогично равны расстояния от A и B. Но тогда равны расстояния от всех трёх точек до h, причём все три точки лежат по одну сторону от h. Пусть AA_1 и CC_1 – перпендикуляры (равной длины!), опущенные на h из вершин. Тогда четырёхугольник AA_1C_1C симметричен относительно серединного перпендикуляра к A_1C_1; поэтому этот серединный перпендикуляр является также серединным перпендикуляром к AC, то есть прямой b. Итак, b также перпендикулярна h, что и требовалось.

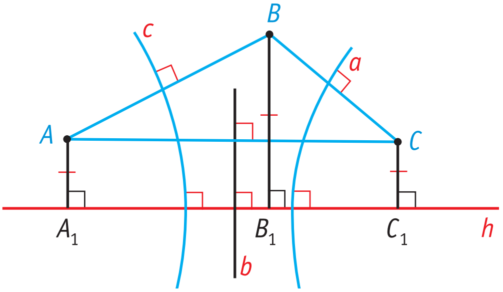


Рис. 10.

Пусть, наконец, все три прямых a, b, c попарно параллельны. Пусть AC – наибольшая сторона треугольника, A', B', C' – середины его сторон BC, AC, AB соответственно. Тогда $AB' \geq AC'$, откуда $\angle AB'C'$ – острый; аналогично $\angle CB'A'$ острый. Поэтому точки C' и A' лежат по разные стороны от b, и отрезок $A'C'$ пересекает b. Значит, один из лучей прямой b лежит в «бесконечном треугольнике», образованном $A'C'$ и двумя параллельными лучами прямых a и c (**рис. 11**). Тогда нетрудно видеть, что этот луч также параллелен им, что и требовалось.

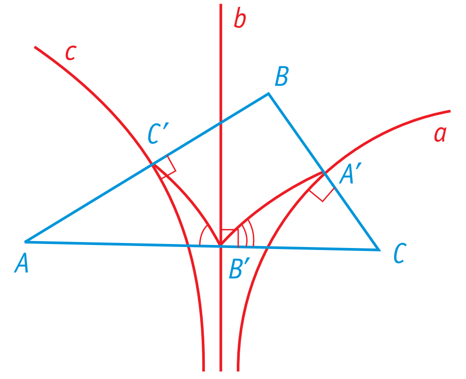


Рис. 11.

Упражнение 2 *Пусть точки A и B симметричны относительно некоторой прямой пучка, а точки B и C симметричны относительно другой прямой того же пучка. Докажите, что тогда точки A и C также симметричны относительно прямой пучка.*

Продолжим аналогию. В евклидовой геометрии серединные перпендикуляры к сторонам треугольника всегда пересекаются в одой точке O. Любые две вершины треугольника симметричны относительно одной из прямых, проходящих через O, и поэтому равноудалены от O. В геометрии Лобачевского вершины тоже оказываются лежащими на некоторой кривой, состоящей из точек, которые попарно симметричны относительно прямых некоторого пучка (предыдущее упражнение как раз показывает, что такая кривая может быть определена просто как множество точек, симметричных данной относительно прямых пучка). Эта кривая есть окружность для пучка пересекающихся прямых; для пучков параллельных и расходящихся прямых такие кривые называются соответственно *орициклом* и *эквидистантой*. Заметим, что ни одна из этих кривых не является прямой! Окружности, эквидистанты и орициклы называются *циклическими линиями*.

Можно показать, что любая прямая пересекает циклическую линию не более, чем в двух точках. Из доказанной теоремы фактически следует, что любой треугольник вписан ровно в одну циклическую линию.

Упражнение 3. *Докажите, что высоты треугольника всегда принадлежат одному пучку.*

5. Какая геометрия правильная?

С тех пор, как Лобачевский осознал, что добавление новой аксиомы к абсолютной геометрии не приводит к противоречию, но позволяет выстроить другую теорию, другую геометрию, он начал пытаться донести своё открытие до широких слоёв математического общества. Он многократно публикует результаты своих трудов в записках Казанского Университета. Однако при попытке опубликоваться или сделать доклад в столице Лобачевский получает отпор – никто не хочет слушать провинциального профессора, ниспровергающего то, что «очевидно» всем разумным людям. Поддержку в России Лобачевский получал только от немногих коллег по Казанскому Университету; за границей же единственным человеком, тогда понявшим Лобачевского, был Гаусс – по-видимому, пришедший к некоторым его выводам независимо, но не имевший желания, смелости или упорства продвигать их самостоятельно. Он помог Лобачевскому опубликовать его труды в Европе, добился того, что Лобачевского избрали иностранным членом–корреспондентом Геттингенского учёного общества – единственный знак признания его трудов в области геометрии; все остальные регалии он получал за другие свои труды.

Всю свою жизнь Лобачевский не прекращал попыток убедить научный мир в том, что его геометрия имеет право на существование – не меньшее, чем евклидова. В некоторый момент Лобачевский задумывается о связи теории с реальным миром. Если обе геометрии равноправны (то есть, ни в одной из них нельзя прийти к противоречию) – то ещё неизвестно, какая из них в реальности верна для окружающего нас пространства! Проверить это можно было, по мнению Лобачевского, лишь опытным путём. И он устраивает эксперимент по измерению углов треугольника, вершины которого на километры отстоят друг от друга; действительно, если бы сумма этих углов оказалась бы меньше π, это означало бы, что мы живём в мире, подчиняющемся аксиоматике Лобачевского. Однако результат, который он получил, не позволял ему с уверенностью утверждать этого – погрешность измерений была большей, чем полученный дефект. Следующая идея – найти, каким образом точно измерить углы треугольника, вершинами которого являются звёзды; действительно, чем больше площадь треугольника, тем большим должен быть дефект – и треугольник космических масштабов мог бы, по мнению геометра, дать требуемый результат. Однако эта идея осталась нереализованной[7]

Другой аспект заключался в следующем. А вдруг – несмотря на все обширные исследования – Лобачевский не нашёл противоречия в своей теории, хотя оно там присутствует? Как можно доказать, что какая-то теория не содержит противоречия? Геометрия Евклида полагалась тогда «очевидной», основанной на «опыте», и поэтому непротиворечивой. Лобачевский справедливо утверждал, что построенная им геометрия не менее непротиворечива – если её удалось развить до такой же глубины. И всё же вопрос оставался. И относился он не только к геометрии Лобачевского, но ко всей математической науке: как доказать (не верить, а доказать!) что теория, построенная на системе аксиом, верна? С геометрией Лобачевского начинается новый этап самой математики, возникает формальная аксиоматика и встаёт проблема доказательства непротиворечивости аксиоматической теории. Начинается исследование оснований самой математики. Одним из методов доказательства непротиворечивости был признан метод интерпретаций (построения модели) новой аксиоматической теории в понятиях другой, для которой уже установлена непротиворечивость. После доказательства непротиворечивости евклидовой геометрии достаточно было построить модель геометрии Лобачевского на евклидовой плоскости – и отсюда следует непротиворечивость геометрии Лобачевского.

Такие модели – и не одна – были построены математиками следующих поколений.

Заметим, что конструкция Лобачевского сама по себе позволяла увидеть, как построить такую модель. Исследуя стереометрию, Лобачевский обнаружил, что на орисфере – поверхности, являющейся пространственным аналогом орицикла (как плоскость является пространственным аналогом прямой), реализуется евклидова геометрия! Говоря подробнее, если на орисфере, заданной пучком параллельных прямых в пространстве, можно ввести понятие прямой (как пересечения плоскости, содержащей прямые пучка, с орисферой), некоторым образом ввести понятие расстояния и угла, то полученная система будет удовлетворять всем аксиомам евклидовой геометрии. Рассмотрим орисферу, заданную пучком параллельных прямых и плоскость, не пересекающую орисферу. Если спроецировать эти плоскости на орисферу параллельно прямым пучка, то на этой орисфере (на которой реализуется евклидова плоскость!) проекция образует круг (без граничной окружности); при этом прямые на плоскости перейдут в отрезки (без концов) на евклидовой плоскости (**рис. 11**)

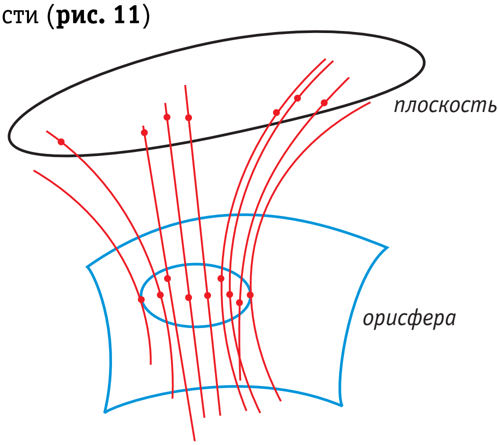


Рис. 12.

Значит, для построения модели плоскости Лобачевского на евклидовой плоскости нужно вообразить, что эта плоскость находится на орисфере, и мысленно отождествить точки проекции с точками самой плоскости! В итоге получится *модель Кэли-Клейна* плоскости Лобачевского.

[7] Видимо, она и не могла быть реализована. Дело в том, что, согласно современным физическим представлениям, геометрия нашего мира более сложна, чем геометрия Евклида или Лобачевского – в ней не вы-полняются и другие аксиомы. Лобачевский сыграл значительную роль именно в ломке стереотипов, без которой придти к этим представлениям было невозможно.

Плоскость Лобачевского в ней представляется внутренностью круга (расположенного на обычной евклидовой плоскости), прямые – отрезками прямых, пересекающих этот круг. При этом параллельные прямые изображаются отрезками, имеющими общий конец (на граничной окружности). Мы не будем объяснять, как определяются расстояния и углы; скажем лишь, что это определение вполне выводится из конструкции, описанной выше.

Существуют и другие модели геометрии Лобачевского на евклидовой плоскости. В модели Пуанкаре, например, плоскость Лобачевского моделируется «верхней» полуплоскостью обычной евклидовой плоскости; при этом прямыми объявляются дуги окружностей, центры которых лежат на границе полуплоскости (называемой *абсолютом*), и лучи прямых, перпендикулярных абсолюту (**рис. 13**). При этом угол между «прямыми» будет просто равен углу между окружностями. Модель Пуанкаре замечательна тем, что в ней хороший вид имеют также циклические линии – каждая из их изображается также пересечением некоторой окружности с полуплоскостью; при этом, если вся окружность лежит выше абсолюта, то она «изображает» окружность в плоскости Лобачевского, если она касается абсолюта – орицикл, и если пересекает абсолют – эквидистанту.

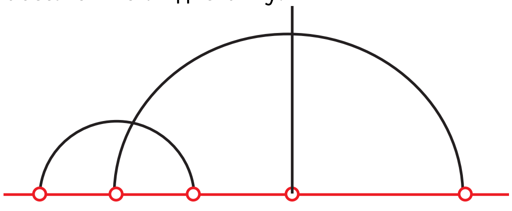


Рис. 13.

Любая из этих двух моделей позволяет сделать требуемый вывод: если непротиворечива геометрия Евклида (в рамках которой строится модель), то непротиворечива и геометрия Лобачевского. К сожалению, все эти модели были построены уже после смерти Лобачевского. Он не дожил до повсеместного признания значения своих трудов.

6. Заключение

Разумеется, в рамках одной статьи невозможно охватить геометрию, описанную в нескольких объёмистых томах; за этими рамками остались все (чрезвычайно интересные!) вычислительные аспекты, классификация движений плоскости Лобачевского, проективная геометрия Лобачевского, стереометрия Лобачевского и т.д. Даже к настоящему моменту слабо исследованы задачи на построение на плоскости Лобачевского или в одной из её моделей – на евклидовой плоскости. Аналогично, автор не ставил своей целью писать всю историю создания неевклидовой геометрии, длившуюся полвека (если говорить только о Лобачевском) или несколько тысячелетий (если рассматривать всю историю пятого постулата). Заинтересовавшихся мы отсылаем к книгам [1,2] для более подробного ознакомления с геометрией Лобачевского и к книгам [3,4] и биографическому очерку [5] – для ознакомления с историей вопроса.

Литература

1. Атанасян Л.С. Геометрия Лобачевского. – М.: Просвещение, 2001.
2. Норден А.П. Элементарное введение в геометрию Лобачевского. – М.: Гостехиздат, 1953.
3. Каган В.Ф. Лобачевский. – М., 1948.
4. Васильев А.В. Николай Иванович Лобачевский.– М.: Наука. 1992. (Научно-биографическая серия).
5. Александров П.С. Николай Иванович Лобачевский. «Квант». 1976. N2.