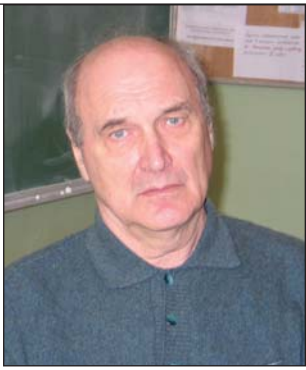

Кузнецов Евгений Петрович
*Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей физики Московского
физико-технического института (МФТИ),
зам. зав. кафедрой физики высоких энергий МФТИ,
зам. зав. кафедрой системной интеграции
и менеджмента МФТИ.
Окончил МФТИ в 1964 г., отличник народного просвещения.*

Задачи по геометрической оптике на вступительных экзаменах

В статье приведены задачи по геометрической оптике, которые автор (более тридцати лет участвующий во вступительных экзаменах) предлагал для вступительных письменных испытаний в МФТИ. Задачи приведены с достаточно подробными решениями, но нужно, однако, помнить, что это не учебник. Автор попытался затронуть все разделы школьной геометрической оптики, но он осознаёт, как трудно объять необъятное.

Задачи по геометрической оптике (достаточно условно) можно разделить на пять разделов: отражение (сюда входят «зеркальные» задачи), преломление, полное внутреннее отражение, линзы и системы линз. Разумеется, это разделение не табу и очень часто встречаются комбинированные задачи.

Рассмотрим по несколько задач из этих разделов.

Задача 1. *Какой минимальной высоты плоское зеркало нужно повесить на вертикальную стену, чтобы человек мог видеть себя в нём в полный рост?*

Для начала напомним законы отражения от плоской границы раздела двух сред: а) луч падающий, луч отражённый и перпендикуляр к границе раздела сред, восстановленный из точки падения, лежат в одной плоскости; б) угол падения (угол между падающим лучом и перпендикуляром) равен углу отражения (углу между отраженным лучом и перпендикуляром). И ещё, сразу напомним основное правило геометрической оптики: для построения изображения точки нужно провести как минимум два луча. На их пересечении или на пересечении их продолжений и будет находиться изображение точки. Исходя из этого нетрудно показать (сделайте это самостоятельно), что плоское зеркало создаёт мнимое изображение (т. е. изображение, получающееся на пересечении продолжений лучей) предмета в натуральную величину, расположенное симметрично относительно плоскости зеркала.

Решение. При решении задач этого типа наиболее рационально поступать следующим образом: повесим бесконечное плоское зеркало, построим в нём изображение, посмотрим, какие участки зеркала «работают», а остальное «отрежем».

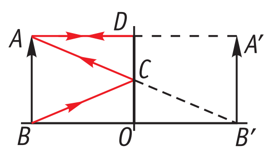

Рис. 1

На рис. 1 AB – это наш человек. Тогда $A'B'$ – его изображение в бесконечном зеркале OD. Изображение расположено симметрично относительно плоскости зеркала ($BO = OB'$) и имеет тот же рост ($AB = A'B'$). Но из рисунка видно, что для рассматривания всего изображения человеку хватит участка CD зеркала. Остальное можно убрать. Простейшая геометрия убеждает нас, что CD = 0,5 AB, т. е. следует повесить зеркало в половину роста человека.

Задача 2. *Два концентрических полушара изготовлены из стекла с различными показателями преломления (рис. 2). Построить ход луча AB, если отношение радиусов шаров равно отношению показателей преломления.*

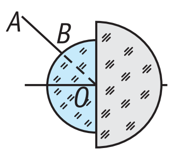

Рис. 2

Опять для начала некоторые напоминания. Законы преломления: а) луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр к границе раздела двух сред в точке падения лежат в одной плоскости и б) отношение синуса угла падения α к синусу угла преломления β есть величина постоянная для двух данных сред:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{21}.$$

Величина n_{21} называется относительным показателем преломления. Если луч падает из вакуума, то эта величина называется абсолютным показателем преломления. Для относительного показателя преломления имеет место соотношение $n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$, где n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления. Закон преломления удобно записывать в виде $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$, где слева всё относится к среде, из которой падает луч, а справа – к среде, в которую попадает луч.

Решение. Луч AB нацелен в общий центр шаров, следовательно, он перпендикулярен поверхности малого шара и, согласно закону преломления, пройдёт её не преломляясь (рис. 3).

Далее, $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{R}{r}$.

Здесь r и R – радиусы шаров. Отсюда получаем правило построения: из точки B опускаем перпендикуляр на горизонтальную ось и продолжаем его до пересечения с поверхностью шара.

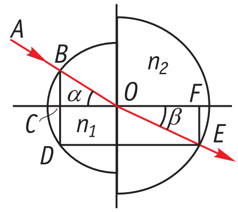

Рис. 3

Очевидно, $BC = CD = r\sin\alpha$. Теперь проводим прямую DE, параллельную горизонтальной оси. $FE = CD = r\sin\alpha = R\sin\beta$, т. е. луч пройдёт через точку E.

Задача 3. *На половину шара, изготовленного из стекла с показателем преломления $n = 1{,}41$, падает параллельный пучок лучей (рис. 4). На расстоянии L = 4,83 см расположен экран Э. Определить размер светлого пятна на экране, если радиус шара r = 2 см.*

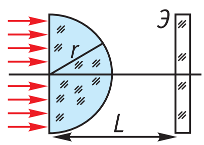

Рис. 4

Здесь (как и в большинстве задач подобного рода) в замаскированном виде подаётся явление полного внутреннего отражения. Немного поговорим об этом. Пусть свет падает на границу раздела двух сред из оптически более плотной среды на оптически менее плотную (показатель преломления первой среды больше, чем показатель преломления второй), как это показано на рис. 5. Согласно закону преломления $n_2 \sin\beta = n_1 \sin\alpha$.

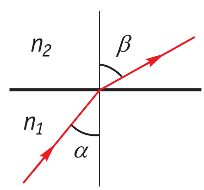

Рис. 5

Но если мы пустим луч под углом α таким, что $\sin\alpha > \dfrac{n_2}{n_1}$, то, получим, что $\sin\beta$ будет больше единицы, что, разумеется, невозможно. В этом случае, когда для падающего луча $\sin\alpha > \dfrac{n_2}{n_1}$, свет вообще не попадёт во вторую среду, а полностью отразится от границы раздела. Угол, для которого $\sin\alpha = \dfrac{n_2}{n_1}$, называется критическим углом полного внутреннего отражения.

Решение. Лучи будут отклоняться тем сильнее, чем больше угол падения α (рис. 6).

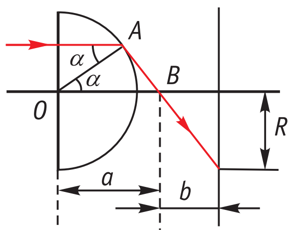

Рис. 6

Но рано или поздно этот угол достигнет величины критического угла полного внутреннего отражения и при дальнейшем его увеличении лучи не будут выходить за сферическую поверхность. Следовательно, размер пятна определяется лучом, соответствующим углу падения α, равному критическому углу полного внутреннего отражения:

$\sin\alpha = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{1{,}41}$, т. е. $\alpha \approx 45°$. Но поскольку луч, падающий под критическим углом полного внутреннего отражения, преломляется и идёт по касательной к границе раздела, то $\Delta\, AOB$ – прямоугольный и $a = r\sqrt{2}$. Далее очевидно, $b = L - a = 4{,}82 - 2\sqrt{2} \approx 2(см)$. Радиус светлого пятна $R \approx b \approx 2$ см.

Перейдём теперь к линзам. В школе изучаются так называемые тонкие линзы. Напомним правила построения изображений, получаемых с помощью тонких линз. Есть три основных луча, с помощью которых чаще всего и производится такое построение. Луч, проходящий через оптический центр линзы, проходит её не преломляясь. Луч, идущий параллельно главной оптической оси линзы, идёт через её фокус. Луч, идущий через другой фокус линзы, после прохождения линзы идёт параллельно главной оптической оси. На рис. 7, 8 и 9 показаны варианты построения изображений предметов, получаемых с помощью положительной (рис. 7 и 8) и отрицательной (рис. 9) линз.

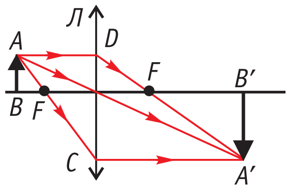

Рис. 7

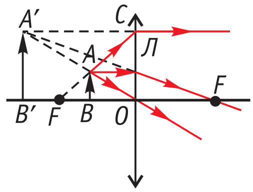

Рис. 8

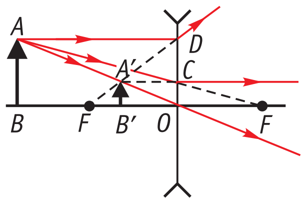

Рис. 9

Причём на рис. 7 получено действительное изображение (оно получается на пересечении лучей), а на рис. 8 и 9 – мнимое изображение (оно получено на пересечении продолжений лучей). Исходя из этих рисунков (проделайте это самостоятельно) нетрудно получить формулы для поперечного увеличения изображений и формулы линз. Если мы обозначим через d – расстояние от предмета до линзы, через f – расстояние от линзы до изображения, через F – фокусное расстояние линзы, а через $Г$ – увеличение, с которым изображается предмет, то получим следующие выражения:

$$Г = \frac{f}{d} = \frac{F}{d-F} = \frac{f-F}{F};\ \frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}\ \text{для рис.7}$$

$$Г = \frac{F}{F-d} = \frac{f+F}{F};\ \frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f}\ \text{для рис.8}$$

$$Г=\frac{F}{F+d}=\frac{F-f}{F};\quad -\frac{1}{F}=\frac{1}{d}-\frac{1}{f}$$ для рис. 9.

Мы видим, что перед мнимыми величинами появляется знак «минус».

Задача 4. *С помощью тонкой линзы с главной оптической осью MN получено изображение B предмета A. Построением определите положение линзы и её фокус (рис. 10).*

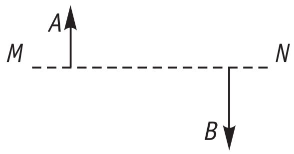

Рис. 10

Решение. Проведём прямые через крайние точки предмета и соответствующие точки изображения. Эти прямые соответствуют лучам, не преломившимся в линзе. Следовательно, точка O – оптический центр линзы (рис. 11).

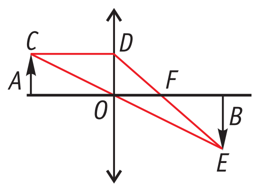

Рис. 11

Фокус линзы определяется, если мы из вершины предмета проведём луч CD, параллельный главной оптической оси. После прохождения линзы он должен пройти через вершину E изображения. Точка пересечения этого преломленного луча (DE) с главной оптической осью и есть фокус линзы F.

Задача 5. *Расстояние между предметом и его прямым изображением, создаваемым тонкой линзой, равно 50 см. Поперечное увеличение $Г=2$. Определите фокусное расстояние линзы.*

Решение. Сразу нужно отметить, что если изображение, создаваемое линзой, прямое, то оно мнимое (убедитесь в этом самостоятельно). Мнимое изображение может создаваться как положительной, так и отрицательной линзой, но отрицательная линза всегда создаёт уменьшенное изображение, т. е. $Г<1$. Следовательно, в нашей задаче работает линза положительная. Но если линза создаёт мнимое изображение, то это означает, что предмет и его изображение находятся по одну сторону от линзы и расстояние между ними равно $f-d$. Тогда $Г=\frac{F}{F-d}=\frac{f+F}{F}$;

$\frac{1}{Г}+Г=2+\frac{f-d}{F}$. Откуда $F=100$ см.

Задача 6. *С помощью тонкой линзы получено изображение канцелярской кнопки. Определите диаметр кнопки, если её изображение лежит в фокальной плоскости линзы и имеет диаметр 2 см.*

Решение. Здесь надо порассуждать и выяснить, с какой линзой возможно выполнение условий задачи. Изображение для отрицательной линзы и действительное изображение для положительной линзы будут лежать в фокальной плоскости только в том случае, если предмет (канцелярская кнопка) лежит в бесконечности. Но тогда увеличение стремится к нулю и едва ли в этом случае изображение будет иметь диаметр 2 см. Остаётся единственная возможность – мнимое изображение для положительной линзы. Используем формулу для увеличения $Г=\frac{f+F}{F}$. Но по условию задачи $f=F$. Таким образом, $Г=2$ и диаметр кнопки равен 1 см.

Задача 7. *Фокусное расстояние тонкой линзы составляет 9% расстояния между предметом и экраном. Во сколько раз увеличенное изображение предмета, создаваемое линзой на экране, больше уменьшенного?*

Решение. Передвигая линзу между предметом и экраном (при неизменном расстоянии между ними), можно два раза получить изображение предмета. Снова используем уже испытанный математический прием: $Г=\frac{F}{d-F}=\frac{f-F}{F}$.

Образуем комбинацию

$Г+\frac{1}{Г}=\frac{f+d-2F}{F}=\frac{L}{F}-2$, где $L=f+d$ – расстояние между предметом и экраном. Отсюда следует $\frac{L}{F}=\frac{(\Gamma+1)^2}{\Gamma}$. По условию $\frac{F}{L}=0{,}09$. Тогда $\Gamma^2-\frac{82\cdot\Gamma}{9}+1=0$ и $\Gamma_1=9$, $\Gamma_2=\frac{1}{9}$. Следовательно, $\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}=81$.

Задача 8. *Имеется положительная линза с оптической силой D_1 и отрицательная линза с оптической силой D_2, причём $|D_1|-|D_2|=4$ дптр. При каком расстоянии до предмета каждая из линз будет давать изображение этого предмета одной и той же величины?*

Решение. Напомним, что оптической силой называется величина $D=\frac{1}{F}$ при условии, что F выражено в метрах. Оптическая сила измеряется в диоптриях. Формулы линз для положительной и отрицательной линз соответственно имеют вид: $|D_1|=\frac{1}{d}+\frac{1}{f_1}$ и $-|D_2|=\frac{1}{d}-\frac{1}{f_2}$. Но, поскольку всегда $\Gamma=\frac{f}{d}$, а по условию Γ и d в обоих случаях одни и те же, то $f_1=f_2$. Но тогда, сложив обе формулы линз, получаем: $|D_1|-|D_2|=\frac{2}{d}$, $d=0{,}5$ м.

Задача 9. *Человек для чтения текста надевает очки с оптической силой $D=-4$ дптр. На каком расстоянии ему удобно располагать плоское зеркало при рассматривании своего лица без очков?*

Поговорим немного о роли очков. Человек, носящий очки, рассматривает не сам предмет, а его изображение, создаваемое очковыми линзами. Это изображение должно находиться «на таком расстоянии, с которого данному глазу удобно его рассматривать. И ещё, это изображение должно быть прямым (едва ли облегчат жизнь человеку очки, создающие перевёрнутое изображение газеты), а, следовательно, мнимым (убедитесь самостоятельно, что если любая линза создаёт прямое изображение, то оно является мнимым). И ещё, оговорим не совсем удачное понятие «расстояния наилучшего зрения». Человек чисто физиологически устроен так, что при чтении ему (в среднем) удобно держать книгу или газету на расстоянии ~25 см от глаз (это определяется длиной рук и удобством). Вот это-то расстояние и назвали «расстоянием наилучшего зрения».

Решение. Теперь мы можем поговорить о нашей задаче. Очевидно, что при чтении в очках наш человек располагает текст на «общечеловеческом» расстоянии d наилучшего зрения. Значит без очков ему всего удобнее рассматривать предмет, находящийся на расстоянии f, определяемом из формулы $D=\frac{1}{d}-\frac{1}{f}$ (изображение должно быть мнимым!). Имеем $-4=\frac{1}{0{,}25}-\frac{1}{f}$; $f=12{,}5$ см. Следовательно, зеркало надо располагать на расстоянии $x=\frac{f}{2}=6{,}25$ см.

Задача 10. *Линза создаёт изображение предмета с поперечным увеличением $\Gamma=3$. Вплотную к линзе приставили вторую такую же. С каким увеличением будет изображаться предмет? Расстояние до предмета осталось неизменным.*

Прежде чем решать эту задачу, поговорим о таких системах линз. Рассмотрим частный случай, когда вплотную друг к другу приставлены две положительные линзы $Л_1$ и $Л_2$ (рис. 12). Остальные возможные комбинации предлагается просчитать по аналогии. Пусть фокусное расстояние первой линзы F_1, второй – F_2. Найдём фокусное расстояние такой системы. Для этого, как обычно, пустим слева пучок лучей, параллельных главной оптической оси. Если бы не было линзы 2, он бы сошелся в фокусе F_1 первой линзы.

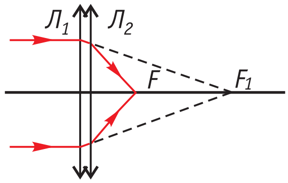

Рис. 12

Эта точка является источником для второй линзы, но источником мнимым (от действительных источников идут расходящиеся пучки). Тогда мы можем написать формулу линзы для второй линзы $\frac{1}{F_2}=-\frac{1}{d}+\frac{1}{f}$ (знак «–» перед первым слагаемым соответствует мнимости источника). Но $d=F_1$, а $f=F$ – фокусному расстоянию системы (в этой точке сходятся лучи, падающие на систему параллельно главной оптической оси). Таким образом, $\frac{1}{F}=\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}$ или $D=D_1+D_2$.

Итак, если две тонкие линзы прижать друг к другу, то оптическая сила полученной системы равна сумме оптических сил линз.

(Примечание редакции журнала: из сказанного выше ещё не следует, что такие две линзы можно заменять одной и применять формулу тонкой линзы, но это можно показать.)

Решение. Изображение увеличенное, но не сказано какое: действительное или мнимое. Придётся рассмотреть оба случая.

а) Изображение действительное.

$\Gamma=\frac{F}{d-F}$; $d=F+\frac{F}{\Gamma}=\frac{4}{3}F$. Когда приставили вторую линзу, то фокусное расстояние стало $F_1=\frac{F}{2}$, т. е. $d=\frac{8}{3}F_1>F_1$ и полученное изображение будет действительным.

Тогда $\Gamma_1=\frac{\frac{F}{2}}{d-\frac{F}{2}}=\frac{F}{\frac{8F}{3}-F}=0{,}6.$

б) Изображение мнимое. В этом случае расстояние от предмета до линзы $d=\frac{2}{3}F$.

Увеличение в системе двух линз $\Gamma_2=3$.

Задача 11. *Тонкая линза создаёт изображение предмета. Если вплотную к этой линзе приставить плоское зеркало, то такая система при неизменном расстоянии до предмета создаёт его изображение с тем же поперечным увеличением. Определить это увеличение.*

Решение. Свет проходит через линзу, отражается от зеркала и снова проходит через линзу. Следовательно, приставление к линзе плоского зеркала эквивалентно приставлению к линзе другой, точно такой же линзы. Расстояние d от предмета до одиночной линзы и до системы линза + зеркало неизменно. Увеличение также одно и то же. Следовательно, одинаковы и расстояния до изображения. Но фокусное расстояние F линзы вдвое больше, чем фокусное расстояние F_2 системы линза + зеркало. Легко увидеть (попробуйте это самостоятельно), что оба изображения не могут быть одновременно действительными или мнимыми. Остаётся случай, когда одно изображение мнимое, а другое действительное. Поскольку $F>F_2=\frac{F}{2}$, то изображение, создаваемое одиночной линзой, мнимое, а изображение, создаваемое системой линза + зеркало, – действительное.

Тогда $\Gamma_1=\frac{F}{F-d}$, $\Gamma_2=\frac{\frac{F}{2}}{d-\frac{F}{2}}$, $\Gamma_1=\Gamma_2$.

Отсюда $\Gamma=\Gamma_1=\Gamma_2=3$.

Задача 12. *С помощью тонкой линзы Л получено изображение трезубца ABCDEG, AB = BC (рис. 13).*

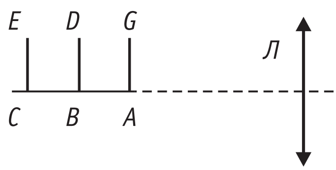

Рис. 13

Основание трезубца лежит на главной оптической оси линзы. Отрезок AB изобража-

ется с увеличением $\beta_1 = 6$, *а отрезок BC – с увеличением* $\beta_2 = 3$. *Определите, с каким увеличением изображается отрезок BD.*

Прежде чем приступить к решению задачи, обратим наше внимание, что увеличение мы почему-то обозначили другой буквой. Это так называемое «продольное» увеличение, т. е. увеличение, с которым изображается отрезок, лежащий на главной оптической оси. Оно отличается от уже привычного нам «поперечного» увеличения Γ. Предлагаем вам самостоятельно доказать, что увеличение, с которым изображается отрезок, лежащий на главной оптической оси, равно $\beta = \Gamma_1\Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 – «обычные» поперечные увеличения на концах этого отрезка. Ну а теперь можно приступить и к решению.

Решение. Пусть Γ_0 – увеличение, с которым изображается отрезок BD, Γ_1 – отрезок AG, Γ_2 – отрезок *CE*. Тогда $\beta_1 = \Gamma_1\Gamma_0$, $\beta_2 = \Gamma_2\Gamma_0$. Отрезок *AC* изображается с увеличением $\beta = \dfrac{AB\cdot\beta_1 + BC\cdot\beta_2}{AB+BC}$. Но, поскольку $AB = BC$, то $\beta = \dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$. Однако, с другой стороны, $\beta = \Gamma_1\Gamma_2$. Таким образом, $\Gamma_0^2\Gamma_1\Gamma_2 = \beta_1\beta_2$ или $\Gamma_0^2\beta = \beta_1\beta_2$. Отсюда $\Gamma_0 = \sqrt{\dfrac{\beta_1\beta_2}{\beta}} = \sqrt{\dfrac{2\beta_1\beta_2}{\beta_1+\beta_2}} = 2$.

Задача 13. *За линзой с фокусным расстоянием* $F_1 = -5$ *см расположена линза с фокусным расстоянием* $F_2 = 25$ *см так, что их оптические оси совпадают. Эта оптическая система создаёт изображение предмета, расположенного перпендикулярно главной оптической оси. Как изменится величина изображения, если линзы поменять местами? Расстояние между линзами* $L = 20$ *см.*

Решение. Это относительно несложная задача, если не полениться сделать чертёж.

Как нетрудно понять из условия, фокусы линз совпадают (рис. 14). Видно, что увеличение равно $\Gamma_1 = \dfrac{F_2}{|F_1|}$. Если поменять линзы местами, то это эквивалентно тому, что мы пустим луч справа налево. Но тогда $\Gamma_2 = \dfrac{|F_1|}{F_2}$.

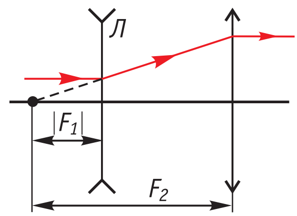

Рис. 14

Получаем, что отношение увеличений равно $\dfrac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = \dfrac{F_1^2}{F_2^2} = \dfrac{1}{25}$. В сущности, эта задача описывает рассматривание предметов через бинокль с одной или другой стороны.

Задача 14. *Две тонкие линзы находятся на расстоянии 25 см друг от друга так, что их главные оптические оси совпадают. Эта система создаёт прямое действительное изображение предмета в натуральную величину. Если линзы поменять местами, не изменяя положения предмета, то снова получается прямое действительное изображение предмета с увеличением 4. На сколько отличаются оптические силы линз?*

Решение. В условии ничего не сказано о типах линз. Придётся порассуждать. Если обе линзы отрицательные, всё, что может получиться – прямое мнимое изображение. Если одна линза положительная, а другая отрицательная, то возможны два варианта: либо перевёрнутое действительное изображение, либо прямое мнимое, что никак не удовлетворяет условию. Остаётся последний вариант – две положительные линзы. Первая создаёт действительное перевёрнутое изображение, вторая переворачивает это изображение и получается прямое действительное изображение (если вы ещё недостаточно уверенно чувствуете себя в этом вопросе, попрактикуйтесь в переборе этих вариантов). Мы можем написать для линз:

$$\Gamma_1' = \frac{F_1}{d_1 - F_1}, \qquad \Gamma_2' = \frac{F_2}{d_2 - F_2} = \frac{F_2}{L - \dfrac{d_1 F_1}{d_1 - F_1} - F_2},$$

где L расстояние между линзами. Поскольку свет проходит последовательно через обе линзы, то общее увеличение равно произведению их увеличений: $\Gamma' = \Gamma_1' \Gamma_2'$. По условию $\Gamma' = 1$. Применим теперь небольшую математическую хитрость. Напишем выражение для обратной величины увеличения:

$$\frac{1}{\Gamma'} = d_1 \frac{L - (F_1 + F_2)}{F_1 F_2} - \frac{L}{F_2}.$$

Здесь мы замечаем интересную вещь: если поменять местами линзы, то первое слагаемое останется неизменным (или, говоря-по-научному, инвариантным), а изменится только второе. Но тогда можно написать и выражение для увеличения $\Gamma'' = 4$ во втором случае:

$$\frac{1}{\Gamma''} = d_1 \frac{L - (F_1 + F_2)}{F_1 F_2} - \frac{L}{F_1}.$$

Теперь понятно, что нужно делать:

$$\frac{1}{\Gamma'} - \frac{1}{\Gamma''} = L\left(\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2}\right) = L(D_1 - D_2);$$

$$D_1 - D_2 = \frac{\dfrac{1}{\Gamma'} - \dfrac{1}{\Gamma''}}{L} = 3 \text{ дптр}.$$