



Власов Анатолий Иванович

Кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой естественно-математического образования Пензенского института развития образования (ПИРО).

Физика колеса

Введение

Колесо является великим изобретением древних цивилизаций. Первые упоминания о колесе встречаются в Месопотамии в 4-м тысячелетии до н. э. Почему так легко перевозить тяжёлые грузы на колёсах? Какова «физика» колеса? Удивительно, но в учебной литературе почти нет ответа на эти вопросы. Попробуем разобраться в них самостоятельно. Итогом нашего исследования будет вычисление величины горизонтальной силы, равномерно передвигающей повозку, и коэффициента эффективности использования простой повозки по сравнению с перемещением грузов «волоком» (как на рис. 1).

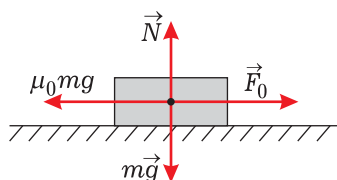


Рис. 1

Коэффициент эффективности определим как отношение минимальной силы $F_0 = \mu \cdot mg$, равномерно передвигающей груз по горизон-

тальной поверхности (передвижение груза «волоком»), к силе F , передвигающей этот груз с использованием колес:

$$k = \frac{\mu \cdot mg}{F}. \quad (1)$$

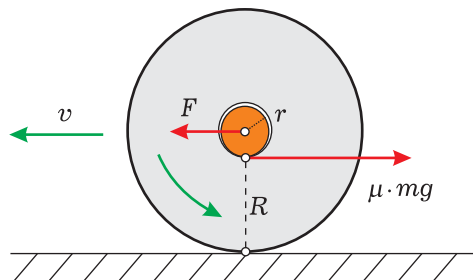


Рис. 2

В наших расчётах достаточно рассмотреть движение одного колеса. При этом мы будем использовать следующую его модель. Колесо надето на ось, диаметр которой чуть меньше внутреннего диаметра колеса (рис. 2). Будем считать, что колесо невесомое, а ось нагружена силой $m\bar{g}$. При движении повозки колесо вращается, а ось скользит по внутренней поверхности колеса. Далее для упрощения мы будем

производить все выкладки для случая, когда коэффициент трения μ в оси колеса равен коэффициенту трения μ_0 груза о поверхность дороги при его перемещении «волоком». Кроме того, мы будем считать, что колесо и поверхность, по которой оно прокатывается, являются абсолютно упругими и шероховатыми поверхностями. Это позволит нам исключить из рассмотрения «обычную»

(традиционную) силу трения качения, причина которой в неупругой деформации колеса и поверхности качения (дороги). Мы сосредоточим свое внимание на физике главного узла колеса (ось – отверстие). Особо отметим тот факт, что колесо простой повозки является «пассивным» и крутится (прокатывается по дороге) под действием толкающей его оси.

Приближённый вывод формул

В соответствии с принятой моделью энергетические потери при движении повозки обусловлены только силами трения между поверхностями оси и колеса. Энергетических потерь в точке контакта колеса и дороги нет.

Попробуем получить результат приближённо без точной схемы сил, действующих на ось колеса. Очевидно, что работа силы F , приводящей колесо в движение, должна быть равна работе силы трения, которая возникает между поверхностями оси и колеса. Запишем это равенство для n оборотов колеса:

$$F \cdot 2\pi R \cdot n = \mu mg \cdot 2\pi r \cdot n. \quad (2)$$

Здесь F – внешняя горизонтальная сила, приложенная к оси при равномерном перемещении колеса (по-

возки), n – число оборотов колеса, R и r – радиусы соответственно колеса и оси, mg – сила тяжести груза повозки. После упрощения получаем:

$$F = \mu \cdot mg \cdot \frac{r}{R}. \quad (3)$$

Очевиден выигрыш в силе по сравнению с силой, необходимой для простого «волочения» груза ($F_0 = \mu \cdot mg$). Но пока неясна физика этого выигрыша. Формула (3) является приближённой, так как она получена без детальной схемы сил. С использованием этой формулы величина коэффициента эффективности определяется простым отношением радиусов колеса и оси:

$$k = \frac{R}{r}. \quad (4)$$

Детальный анализ «картины сил»

Рассмотрим детальную схему сил (рис. 3), действующих на ось колеса в рамках той его физической модели, предположения которой были нами сформулированы во введении.

Сил три: сила тяжести, горизонтальная сила, приводящая колесо в равномерное движение, и сила реакции внутренней поверхности колеса, которую мы разложили на две составляющие (нормальную и касательную – силу трения). При движении колеса точка взаимодействия

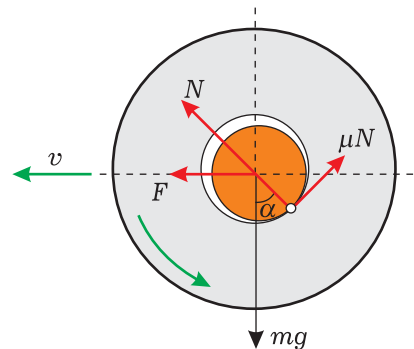


Рис. 3



поверхностей оси и втулки смещена на некоторый угол α относительно вертикали. Парадоксальным является направление смещения оси по отношению к направлению движения колеса. Ось смещена в противоположную сторону. Справедливость такого смещения для данной физической модели колеса будет доказана ниже. Запишем уравнения равновесия для оси в проекциях на оси x и y :

$$\begin{cases} F + N \cdot \sin\alpha - \mu \cdot N \cdot \cos\alpha = 0, \\ N \cdot \cos\alpha + \mu \cdot N \cdot \sin\alpha - mg = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Дополним эту систему уравнений энергетическим уравнением (2), которое теперь можно записать точно:

$$\begin{aligned} F \cdot 2\pi R \cdot n &= \mu \cdot N \cdot 2\pi r \cdot n \rightarrow \\ \rightarrow F &= \mu \cdot N \cdot \frac{r}{R}. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{cases} F + N \cdot \sin\alpha - \mu \cdot N \cdot \cos\alpha = 0, \\ N \cdot \cos\alpha + \mu \cdot N \cdot \sin\alpha - mg = 0, \\ F = \mu \cdot N \cdot \frac{r}{R}. \end{cases} \quad (7)$$

Первое и третье уравнения определяют угол наклона.

При решении системы этих уравнений для тангенса угла наклона $x = \operatorname{tg}\alpha$ получаем квадратное уравнение:

$$(1 - a^2)x^2 - 2\mu x + \mu^2 - a^2 = 0. \quad (8)$$

Здесь $a = \mu \cdot \frac{r}{R}$.

Можно показать, что уравнение (8) соответствует уравнению равновесия «колёсного» рычага (рычага второго рода¹). Действительно, в соответствии с рисунком 4 записываем равенство моментов («мгновенная» ось вращения рычага проходит через точку касания колеса с дорогой):

$$N \cdot R \sin\alpha = \mu N \cdot (R \cos\alpha - r). \quad (9)$$

После преобразований получим уравнение (8).

Решение этого квадратного уравнения приводит к результату:

$$x = \frac{\mu - a \sqrt{1 + \mu^2 - a^2}}{1 - a^2}.$$

(Если взять другой корень уравнения (8), то выражение для F окажется отрицательным.)

Это сложное выражение. Его можно упростить, учитывая, что

$$a = \mu \cdot \frac{r}{R} \ll 1.$$

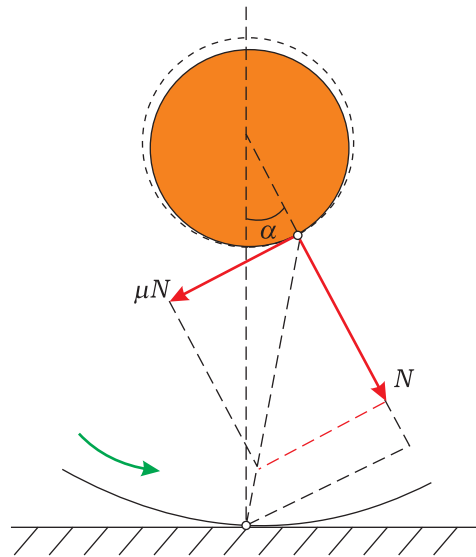


Рис. 4

$$\begin{aligned} x = \operatorname{tg}\alpha &\approx \mu - a \cdot \sqrt{1 + \mu^2} = \\ &= \mu \left(1 - \frac{r}{R} \sqrt{1 + \mu^2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что найденный угол наклона оси немного меньше угла наклона

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \mu,$$

при котором тело самостоятельно соскальзывает с наклонной плоскости. Решая дальше систему (7), получаем

¹ Различают рычаги 1 рода, в которых точка опоры располагается между точками приложения сил, и рычаги 2 рода, в которых точки приложения сил располагаются по одну сторону от точки опоры.

выражение для движущей силы:

$$F = N(\mu \cdot \cos\alpha - \sin\alpha), \quad (11)$$

$$N = \frac{mg}{\cos\alpha + \mu \cdot \sin\alpha},$$

$$F = mg \frac{\mu \cdot \cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \mu \cdot \sin\alpha},$$

$$F = mg \frac{\mu - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \mu \cdot \operatorname{tg}\alpha}. \quad (12)$$

После подстановки в эту формулу приближённого решения (10) получаем:

$$F = \mu \cdot mg \frac{r}{R} \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{1 + \mu^2 \left(1 - \frac{r}{R} \sqrt{1 + \mu^2}\right)}.$$

После упрощения знаменателя (считаем, что $\frac{r}{R} \sqrt{1 + \mu^2} \ll 1$) окончательно получаем:

$$F = \mu \cdot mg \frac{r}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}. \quad (13)$$

Определяем коэффициент эффективности:

$$k = \frac{R}{r} \sqrt{1 + \mu^2}. \quad (14)$$

Эти более точные результаты не очень сильно отличаются от приближённых (3), (4).

Можно подводить итоги. При движении повозки «нагруженная ось» колеса непрерывно скользит по наклонной плоскости, которую создаёт внутренняя поверхность колеса (рис. 5).

Задача для самостоятельного решения

Определите коэффициент полезного действия «простого» неподвижного блока (простого механизма), который используется для поднятия груза. «Простой» блок не использует подшипники. Его колесо радиуса R

Для такого скольжения требуется сила, которая значительно меньше силы трения скольжения $\mu \cdot mg$. Величина этой силы определяется очень сложной формулой, которую удаётся записать приближённо в виде (13). Наклон плоскости создаёт сила трения, которая использует колесо как рычаг. При движении повозки ось колеса поднимается.

Коэффициент эффективности использования колеса по сравнению с простым перемещением «волоком» в основном определяется отношением радиусов колеса и оси. При этом с увеличением трения коэффициент эффективности растёт. В то же время из формулы (13) следует, что для лёгкого движения повозки следует снижать трение и увеличивать радиус колеса¹.

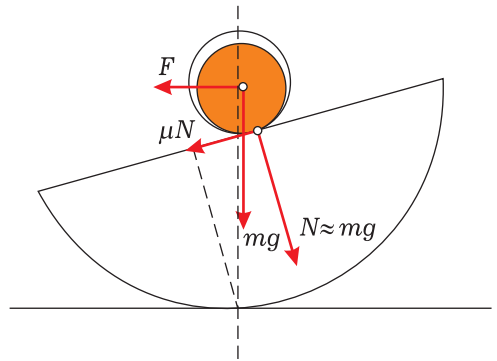


Рис. 5

надето на ось значительно меньшего радиуса r . Между поверхностями оси и втулки колеса существует трение. Величина коэффициента трения μ .

¹ Уменьшать радиус оси нельзя. Ось должна выдерживать большую нагрузку.