

Ромашкевич Александр Иосифович

Старший преподаватель кафедры общей физики Московского государственного института электронной техники (технического университета). Автор ряда пособий для школы: «Механика», «Электродинамика», «Молекулярная физика», «Оптика», объединённых в серию «Учимся решать задачи».



Физическое подобие

В статье излагается оригинальный подход к решению задач, использующий связь между физическими характеристиками геометрически подобных тел.

Изыщность такого подхода иллюстрируется решением нескольких задач олимпиадного уровня по механике, электричеству и магнетизму. Такой подход позволяет обойтись без применения скучного (а порой и очень сложного) интегрирования и делает решение задач более коротким и элегантным.

При геометрически подобном преобразовании физического тела (с коэффициентом подобия k) некоторые физические величины, характеризующие состояние тела, меняются в k^m раз (m – некоторое целое число). На этом свойстве можно построить ряд красивых задач. Поясним сказанное простейшим примером. Напомним, что геометрическим коэффициентом подобия k называется отношение соответственных линейных размеров подобных фигур.

Задача. Для изучения в лабораторных условиях поведения гидротурбины выполнили её модель в масштабе 1:10 из того же материала. Какова масса турбины,

если масса модели 10 кг?

Решение. Любой линейный размер турбины в $k=10$ раз больше соответствующего размера модели, а любой элементарный объём ΔV турбины в $K=k^3$ раз больше соответствующего элементарного объёма Δv модели (объём пропорционален кубу любого его линейного размера). Отсюда почти очевидно, что масса турбины в k^3 раз больше массы модели, т. е. равна 10^4 кг. Действительно,

$$\begin{aligned} M_{\text{турб}} &= \rho \sum \Delta V = \rho \sum \Delta v \cdot K = \\ &= 10^3 \rho \sum \Delta v = 10^3 m_{\text{мод}} = 10^4 \text{ кг.} \end{aligned}$$

Ответ. $M_{\text{турб}} = 10^4$ кг.

1. Физическое подобие в задачах по механике

Задача 1. Из однородной пластины постоянной толщины вырезана

некоторая фигура. Получившееся тело располагают в горизонтальной

плоскости и начинают вращать вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью. При этом его кинетическая энергия равна E_0 . Чему будет равна кинетическая энергия E вращения подобного тела, вырезанного из той же пластины, если геометрический коэффициент подобия равен k , а угловая скорость осталась прежней? Геометрическим коэффициентом подобия k будем называть отношение любых соответственных линейных размеров на плоскости пластин.

Решение. Мысленно распилим лобзиком исходное тело на элементарные кусочки (рис. 1) и напишем выражение для кинетической энергии ΔE_i одного из них (с площадью ΔS_i):

$$\begin{aligned}\Delta E_i &= \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{\rho h \Delta S_i v_i^2}{2} = \\ &= \frac{\rho h \Delta S_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\rho h \omega^2}{2} (\Delta S_i r_i^2).\end{aligned}$$

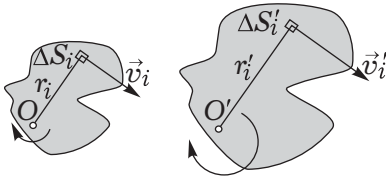


Рис. 1

Здесь:

ρ – плотность материала,

h – толщина пластины,

ω – угловая скорость.

Соответствующий участок подобной фигуры имеет кинетическую энергию

$$\Delta E'_i = \frac{\rho h \omega^2}{2} (\Delta S'_i r_i'^2).$$

Физическим коэффициентом подобия K для кинетической энергии в нашем случае будет:

$$K = \frac{\Delta E'_i}{\Delta E_i} = \frac{\Delta S'_i}{\Delta S_i} \cdot \frac{r_i'^2}{r_i^2}.$$

Учитывая, что соответственные площади относятся как квадраты соответственных линейных размеров, получаем:

$$K = (k^2) \cdot (k^2) = k^4.$$

Таким образом:

$$\Delta E'_i = k^4 \Delta E_i.$$

Кинетическая энергия всего тела складывается из кинетических энергий всех его фрагментов, значит:

$$E = \sum \Delta E'_i = k^4 \sum \Delta E_i = E_0 \cdot k^4.$$

Ответ. $E = E_0 \cdot k^4$.

Задача 2. Из однородной пластины постоянной толщины вырезан прямоугольный равнобедренный треугольник, который располагают в горизонтальной плоскости и начинают вращать вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину прямого угла с постоянной угловой скоростью (рис. 2). При этом его кинетическая энергия оказалась равной E_0 . Чему будет равна кинетическая энергия E'_0 квадрата со стороной, равной катету треугольника, если его вырезать из той же пластины, расположить в горизонтальной плоскости и вращать вокруг вертикальной оси, проходящей через одну из вершин, с той же угловой скоростью?

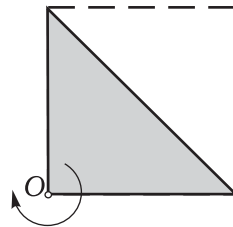


Рис. 2

Решение. Условие задачи наводит на мысль о скучном интегрировании. Но введение понятия физического подобия для нахождения кинетической энергии в условиях

данной задачи значительно упрощает решение.

Мысленно разрежем предложенный треугольник на два равных, как показано на рис. 3 а. Кинетическая энергия вращения каждой половинки равна $E_0/2$.

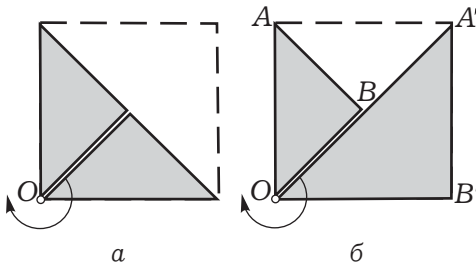


Рис. 3

Половинка квадрата представляет собой (рис. 3 б) треугольник $OA'B'$, вращающийся вокруг оси, совпадающей с вершиной острого угла (как и половинка исходного треугольника). Оба треугольника (OAB и $OA'B'$) подобны, причём коэффициент геометрического подобия

$$k = \frac{OA'}{OA} = \sqrt{2}.$$

Кинетическая энергия вращения треугольника $OA'B'$ равна

$$E' = \frac{E_0}{2} \cdot (\sqrt{2})^4 = 2E_0,$$

а кинетическая энергия полного квадрата $OAA'B'$

$$E'_0 = 4E_0.$$

Ответ. $E'_0 = 4E_0$.

Задача 3. Из однородной пластины вырезан прямоугольный треугольник с острым углом α . Треугольник кладут на горизонтальную шероховатую поверхность так, что он соприкасается с ней равномерно. Чтобы повернуть его на угол $\pi/2$ горизонтальной силой вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину угла α , надо совершить минимальную

работу A_1 (рис. 4 а). Чтобы повернуть тот же треугольник на угол π горизонтальной силой вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину другого острого угла (рис. 4 б), потребовалось совершить минимальную работу A_2 . Какую минимальную работу A_3 надо совершить, чтобы повернуть тот же треугольник аналогичным образом вокруг вершины прямого угла на $\pi/6$ (рис. 4 в)?

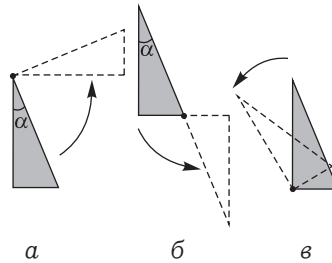


Рис. 4

Решение. По условию, A_1, A_2, A_3 – минимальные работы, необходимые для поворота треугольника. Это означает, что каждый раз поворот производится медленно, с постоянной скоростью, т. е. момент приложенной силы равен моменту сил трения.

Работа приложенной силы при повороте тела:

$$A_1 = M_1 \varphi_1 = |M_{\text{тр}1}| \varphi_1 = |M_{\text{тр}1}| \frac{\pi}{2};$$

$$A_2 = |M_{\text{тр}2}| \pi; \quad A_3 = |M_{\text{тр}3}| \frac{\pi}{6}.$$

Разберём, как ведёт себя момент сил трения при геометрически подобном преобразовании площади плоской фигуры (коэффициент геометрического подобия k).

Момент силы трения, относящийся к элементарному участку площади ΔS_i (рис. 5):

$$M_i = \mu \Delta m_i g r_i = \mu \rho h g \Delta S_i r_i.$$

Здесь:

h – толщина пластины,
 ρ – плотность материала,

Момент силы трения, относящийся к соответствующему элементарному участку $\Delta S'_i$ подобной фигуры:

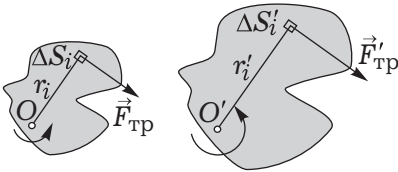


Рис. 5

$$M'_i = \mu \rho h g \Delta S'_i r'_i.$$

Отсюда коэффициент физического подобия:

$$K = \frac{M'_i}{M_i} = \frac{\mu \rho h g \Delta S'_i r'_i}{\mu \rho h g \Delta S_i r_i} = \frac{\Delta S'_i}{\Delta S_i} \cdot \frac{r'_i}{r_i}.$$

Учитывая, что соответственные площади относятся как квадраты соответственных линейных размеров, получаем:

$$K = \left(\frac{r'_i}{r_i} \right)^3 = k^3.$$

Здесь k – геометрический коэффициент подобия.

После установления физического коэффициента подобия можно переходить к расчёту работы A_3 (вращение вокруг прямого угла). Для этого мысленно распилим наш треугольник высотой, опущенной из вершины прямого угла (рис. 6).

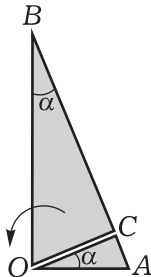


Рис. 6

Образовались два треугольника OAC и OBC , подобных исходному, причём при повороте треугольник OAC вращается вокруг оси, проходящей через вершину угла α , а треугольник OBC – вокруг оси, проходящей через вершину другого острого угла.

Геометрический коэффициент подобия треугольника OAC исходному треугольнику ABO

$$k_1 = \frac{OA}{AB} = \sin \alpha,$$

а треугольника OBC

$$k_2 = \frac{OB}{AB} = \cos \alpha.$$

Момент сил трения при вращении исходного треугольника вокруг оси, проходящей через вершину прямого угла, равен:

$$\begin{aligned} M_{\text{тр}3} &= M_{\text{тр} OAC} + M_{\text{тр} OBC} = \\ &= M_{\text{тр}1} K_1 + M_{\text{тр}2} K_2 = \\ &= M_{\text{тр}1} (k_1)^3 + M_{\text{тр}2} (k_2)^3. \end{aligned}$$

Решая это уравнение совместно с тремя первыми, находим:

$$\begin{aligned} A_3 &= \left| M_{\text{тр}3} \right| \frac{\pi}{6} = \\ &= \left\{ M_{\text{тр}1} \left| k_1^3 \right| + M_{\text{тр}2} \left| k_2^3 \right| \right\} \frac{\pi}{6} = \\ &= \left\{ \frac{2A_1}{\pi} \cdot \sin^3 \alpha + \frac{A_2}{\pi} \cdot \cos^3 \alpha \right\} \frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{A_1}{3} \sin^3 \alpha + \frac{A_2}{6} \cos^3 \alpha. \end{aligned}$$

Ответ. $A_3 = \frac{A_1}{3} \sin^3 \alpha + \frac{A_2}{6} \cos^3 \alpha.$

Следующая задача на ту же тему встретилась на одной из московских олимпиад.

Задача 4. Массивный прямоугольный треугольник, вырезанный из однородной пластины постоянной толщины, располагают на шероховатой горизонтальной поверхности так, что он соприкасается с данной поверхностью



равномерно. Минимальная горизонтальная сила, необходимая для поворота треугольника вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину острого угла A (рис. 7), равна F_1 . Для поворота того же треугольника вокруг вертикальной оси, проходящей через середину гипотенузы D , требуется горизонтальная минимальная сила F_2 . Какая минимальная горизонтальная сила F_3 потребуется для аналогичного поворота треугольника вокруг вершины второго острого угла B ?

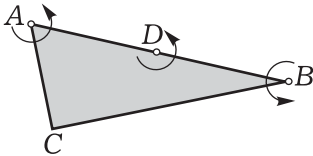


Рис. 7

Решение. Треугольник начинает двигаться, когда момент приложенной силы \vec{F} становится равным моменту силы трения:

$$M_F = |M_{\text{тр}}|,$$

$$Fh = |M_{\text{тр}}|.$$

Чтобы при этом сила оказалась минимальной, нужно, чтобы плечо силы было максимальным.

В случае вращения вокруг вершин A и B – это гипотенуза треугольника длины l , а в случае вращения вокруг точки D – половина гипотенузы (расстояние до любой вершины треугольника).

$$F_1 l = |M_{\text{тр}}^A|; \quad F_2 \frac{l}{2} = |M_{\text{тр}}^D|; \quad F_3 l = |M_{\text{тр}}^B|.$$

Мысленно разрежем наш треугольник на четыре равных треугольника, геометрически подобных исходному, как показано на рис. 9. При вращении исходного треугольника вокруг точки D два из четырёх фрагментов DBE и DCE

оказываются физически подобными исходному, вращающемуся вокруг вершины A , а оставшиеся DFA и DFC при вращении вокруг точки D физически подобны исходному треугольнику, вращающемуся вокруг вершины B . В предыдущей задаче было показано, что физический коэффициент подобия в данных условиях (неизменная толщина пластины) для момента сил трения:

$$K = k^3,$$

где k – геометрический коэффициент подобия.

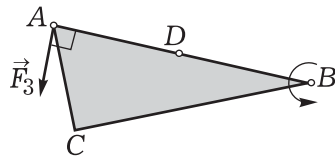
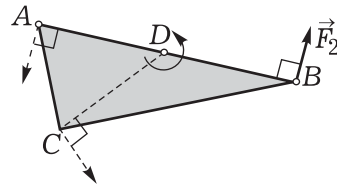
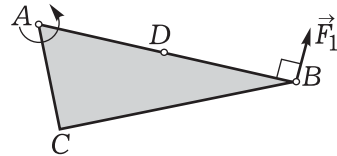


Рис. 8

Геометрический коэффициент подобия каждого фрагмента $k = 1/2$.

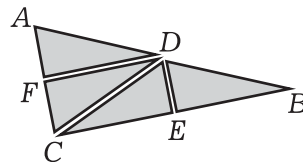


Рис. 9

Момент сил трения при вращении исходного треугольника вокруг середины гипотенузы можно распи-

сать как сумму моментов сил трения четырёх представленных на рисунке фрагментов:

$$\begin{aligned} M_{\text{тр}}^D &= M_{\text{тр}}^{DBE} + M_{\text{тр}}^{DCE} + M_{\text{тр}}^{DFC} + M_{\text{тр}}^{DFA} = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 M_{\text{тр}}^A + \left(\frac{1}{2}\right)^3 M_{\text{тр}}^A + \\ &+ \left(\frac{1}{2}\right)^3 M_{\text{тр}}^B + \left(\frac{1}{2}\right)^3 M_{\text{тр}}^B; \end{aligned}$$

$$M_{\text{тр}}^D = \left(\frac{1}{2}\right)^3 (2M_{\text{тр}}^A + 2M_{\text{тр}}^B),$$

$$\left|M_{\text{тр}}^D\right| = \frac{1}{4} \left(\left|M_{\text{тр}}^A\right| + \left|M_{\text{тр}}^B\right| \right),$$

$$F_2 \frac{l}{2} = \frac{1}{4} (F_1 l + F_3 l),$$

откуда находим F_3 :

$$F_3 = 2F_2 - F_1.$$

Ответ. $F_3 = 2F_2 - F_1$.

2. Физическое подобие в задачах по электричеству и магнетизму

А теперь несколько задач на тему физического подобия из раздела «электричество и магнетизм».

Задача 5. Четыре одинаковых тонких непроводящих стержня равномерно (с постоянной линейной плотностью) заряжены одноимёнными зарядами. Стержни укладывают в форме квадрата. При этом в центре квадрата образовался потенциал φ_0 (см. рис. 10). Какой потенциал φ будет в вершине квадрата, если из него убрать два стержня, смежных с этой вершиной?

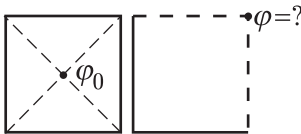


Рис. 10

Решение. Считаем, что точка с нулевым потенциалом находится в бесконечности. Это означает, что для потенциала φ , создаваемого точечным зарядом на расстоянии r от него, применима формула:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}.$$

Если заряд распределён равномерно по тонкому линейному носителю, то потенциал в произвольной точке пространства можно найти, разбив заряд на элементарные фрагменты $\Delta q_i = \lambda \Delta l_i$ (λ – линейная

плотность заряда, Δl_i – элементарный участок линейного носителя) и сложив потенциалы φ_i от каждого Δq_i в интересующей нас точке пространства:

$$\varphi = \sum \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{\lambda \Delta l_i}{r_i}.$$

Геометрически подобное преобразование системы элементарный заряд – точка (см. рис. 11) приводит к физически подобному преобразованию потенциала в точке с коэффициентом K :

$$\begin{aligned} K &= \frac{\varphi'_i}{\varphi_i} = \frac{\lambda' \Delta l'_i}{r'_i} \cdot \frac{\lambda \Delta l_i}{r_i} = \\ &= \left(\frac{\Delta l'}{\Delta l_i} \right) \cdot \left(\frac{r_i}{r'_i} \right) = k \frac{1}{k} = 1. \end{aligned}$$

Здесь k – геометрический коэффициент подобия.

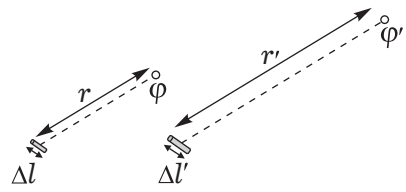


Рис. 11

Разумеется, $K=1$ только если линейная плотность заряда остаётся неизменной ($\lambda' = \lambda$).

Разрежем мысленно пополам каждый из четырёх стержней (рис. 12 а).

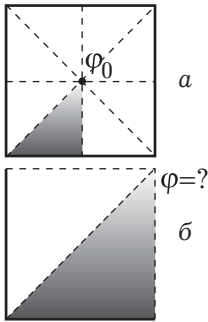


Рис. 12

Потенциал в центре квадрата создается восемью зарядами половинок, причём в равной степени. Поэтому потенциал, создаваемый в центре квадрата одной половиной стержня, равен $\varphi_0/8$.

Из подобия затенённых треугольников, учитывая равенство единице коэффициента физического подобия, следует, что сторона квадрата, заряженная с той же линейной плотностью, создаёт в противоположащей вершине такой же потенциал $\varphi_0/8$ (рис. 12 б). А две стороны соответственно создают потенциал в два раза больший:

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{4}.$$

Ответ. $\varphi = \frac{\varphi_0}{4}$.

Физическое подобие – это не закон, поэтому оно не рассматривается в курсе физики. Это просто приём физического мышления, в некоторых случаях облегчающий решение задачи.

Несколько лет назад на одной из российских олимпиад появилась такая задача.

Задача 6. Виток тонкого провода в форме квадрата, уложенного по рёбрам одной из граней куба (рис. 13 а), имеет индуктивность L_1 . Виток, уложенный по рёбрам того же куба в форме «книжки» (рис. 13 б), имеет индуктивность L_2 . Найти индуктивность контура, уложенного по рёб-

рам того же куба в форме, изображённой на рис. 13 в.

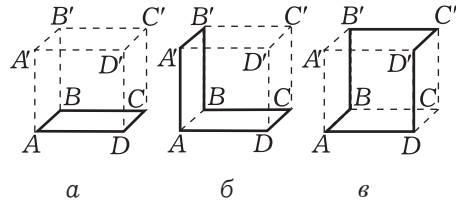


Рис. 13

Решение. Индуктивность контура L определяется как коэффициент пропорциональности между током в контуре I и потоком магнитной индукции Φ , пронизывающим контур. Подразумевается, что поток обусловлен только током контура:

$$\Phi = LI.$$

Если по первому контуру (рис. 13 а) пропустить ток I , то

$$\Phi_1 = L_1 I.$$

В силу симметрии вклад каждой стороны с током I в поток Φ_1 :

$$\Phi_1^1 = \frac{\Phi_1}{4}.$$

Точно такой же вклад в полный поток, пронизывающий второй контур с тем же током I , вносят каждая из сторон AD, BC, AA', BB' . Покажем это.

Согласно закону Био – Савара – Лапласа индукция магнитного поля \vec{B}_i в точке M , обусловленная элементарным участком тонкого провода $\Delta \vec{l}_i$ с током I (направление $\Delta \vec{l}_i$ совпадает с направлением тока) определяется формулой:

$$\vec{B}_i = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \frac{[\Delta \vec{l}_i \times \vec{r}_i]}{r_i^3}.$$

Здесь \vec{r}_i – вектор от участка $\Delta \vec{l}_i$ к точке M . Векторное произведение $[\Delta \vec{l}_i \times \vec{r}_i]$ расположено в плоскости, перпендикулярной $\Delta \vec{l}_i$, а линии магнитной индукции представляют собой

окружности с центрами на линии $\Delta \vec{l}_i$. Сказанное изображено на рис. 14.

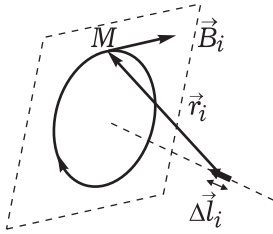


Рис. 14

Линии индукции от токов, протекающих по сторонам AD и BC , пронизывают только «страницу» $ABCD$, а токи по сторонам AA' и BB' – только «страницу» $AA'B'B$. Таким образом, каждая из четырех рассмотренных сторон с током I добавляет в магнитный поток, сцепленный со вторым контуром:

$$\Phi_1^1 = \frac{\Phi_1}{4},$$

а суммарный вклад от этих участков контура

$$\frac{\Phi_1}{4} \cdot 4 = \Phi_1.$$

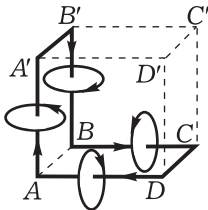


Рис. 15

Полный поток Φ_2 , сцепленный со вторым контуром:

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi'.$$

Здесь Φ' – поток, приносимый участками тока $A'B'$ и DC . Вклад каждой из этих сторон отличается от Φ_1^1 , поскольку линии индукции, порождаемые этими участками тока, пронизывают обе «страницы» «книжки», что поясняет рисунок 16. Откуда

вклад пары диагонально противоположных сторон ($A'B'$ и DC)

$$\Phi' = \Phi_2 - \Phi_1.$$

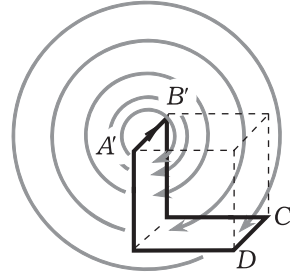


Рис. 16

Внимательно рассмотрев третий контур, убеждаемся, что он состоит из трёх пар диагонально противоположных сторон того же куба, поэтому полный магнитный поток, сцепленный с третьим контуром, при том же токе I

$$\Phi_3 = 3\Phi' = 3(\Phi_2 - \Phi_1), \text{ или}$$

$$L_3 I = 3(L_2 I - L_1 I), L_3 = 3(L_2 - L_1).$$

Ответ. $L_3 = 3(L_2 - L_1)$.

В приведённой задаче не пришлось пользоваться физическим подобием какой-либо величины. Мы привели её только потому, что через несколько лет в одной из вузовских олимпиад появилась следующая задача.

Задача 7. На рисунке 17 индуктивность контура 1 равна L_1 , ин-

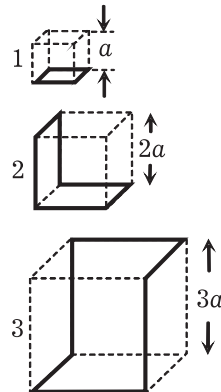


Рис. 17



дуктивность контура 2 равна L_2 . Какова индуктивность контура 3?

Решение. Алгоритм решения остаётся прежним, но придётся учитывать физически подобное преобразование сцепленного с контуром магнитного потока.

Магнитный поток $\Delta\Phi_i$ (рис. 18 а) от элемента контура $\Delta\vec{l}_i$ с током I , пронизывающий элементарный фрагмент площади контура $\Delta S'_i$:

$$\Delta\Phi_i = B_i \Delta S_i = \alpha I \frac{\Delta l_i}{r_i^2} \Delta S_i.$$

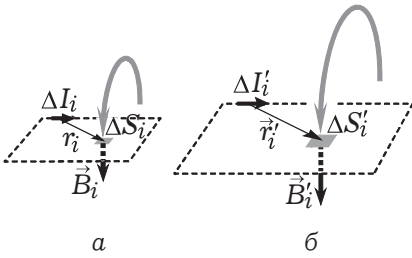


Рис. 18

Чтобы не писать лишнего, мы собрали в коэффициент α все константы и функции углов, не меняющиеся при геометрически подобном преобразовании в законе Био – Савара – Лапласа.

После геометрически подобного преобразования (рис. 18 б):

$$\Delta\Phi'_i = \alpha I \frac{\Delta l'_i}{r_i'^2} \Delta S'_i$$

коэффициент физического подобия K при одинаковых токах равен

$$K = \frac{\Delta\Phi'_i}{\Delta\Phi_i} = \left(\frac{\Delta l'_i}{\Delta l_i} \right) \left(\frac{r_i}{r'_i} \right)^2 \left(\frac{\Delta S'_i}{\Delta S_i} \right) = \left(k \right) \left(\frac{1}{k} \right)^2 \left(k^2 \right) = k.$$

Напоминаем, что k – коэффициент геометрического подобия (отношение линейных размеров).

Сложение по всем элементам $\Delta\vec{l}_i$ и $\Delta\vec{l}'_i$ и последующее суммирование по фрагментам ΔS_i и $\Delta S'_i$ не меняет соотношения полных магнитных потоков через контуры:

$$K = \frac{\Phi'}{\Phi}, \quad \Phi' = K\Phi.$$

Дальше по алгоритму предыдущей задачи:

$$\Phi_1 = L_1 I, \quad \Phi_2 = L_2 I, \quad \Phi_3 = L_3 I.$$

Вклад в поток Φ_1 одной стороны квадратного контура $\frac{\Phi_1}{4}$.

Вклад каждой из четырёх сторон, прилегающих к «переплёту книжки» (второй контур):

$$K \frac{\Phi_1}{4} = 2 \frac{\Phi_1}{4} = \frac{\Phi_1}{2}.$$

Полный поток через второй контур

$$\Phi_2 = 4 \left(\frac{\Phi_1}{2} \right) + \Phi',$$

где Φ' – сцепленный со вторым контуром поток, создаваемый парой диагонально противоположных сторон куба:

$$\Phi' = \Phi_2 - 2\Phi_1.$$

Третий контур, как и в предыдущей задаче, составлен тремя парами диагонально противоположных сторон, поэтому с учётом геометрически подобного преобразования второго куба в третий ($K = k = 3/2$):

$$\Phi_3 = \frac{3}{2} \Phi' \cdot 3 = \frac{9}{2} (\Phi_2 - 2\Phi_1).$$

И наконец, выражая магнитные потоки через индуктивности, находим:

$$L_3 I = \frac{9}{2} (L_2 I - 2L_1 I), \quad L_3 = \frac{9}{2} L_2 - 9L_1.$$

Ответ. $L_3 = \frac{9}{2} L_2 - 9L_1.$