Бондаров Михаил Николаевич
Учитель физики лицея №1501 и ГОУ ЦО «Технологии обучения» г. Москвы.

Физический винегрет, или Сто дней до ЕГЭ

Для выпускников наступает самая напряжённая пора – этап интенсивной подготовки к ЕГЭ и олимпиадам. Мы решили напомнить им некоторые методы решения, которые позволяют существенно сэкономить время, необходимое для получения верного ответа. Приёмы решения представлены из разных разделов курса физики, без детального их описания: этому следует посвятить отдельные статьи. Мы лишь кратко покажем некоторые составляющие физического винегрета из тех приёмов, которыми, как показывает анализ результатов ЕГЭ, ещё недостаточно уверенно владеют экзаменуемые.

Надеемся, что читатели не ограничатся автоматическим использованием указанных ниже приёмов, а постараются глубже разобраться в их физической сути.

Графические приёмы

В любом варианте ЕГЭ обязательно включены графические задачи. Из их огромного разнообразия выберем для начала ту, которая относится к равноускоренному движению.

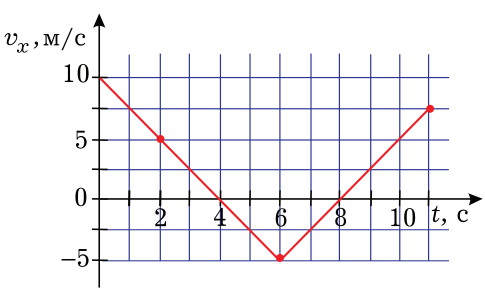


Рис. 1

Задача 1. Тело движется по оси x. По графику зависимости проекции скорости тела v_x от времени t (рис. 1) установите, какой путь прошло тело за время от t_1 = 6 с до t_2 = = 10 с. (*ЕГЭ, 2010*)

1) 10 м
2) 20 м
3) 25 м
4) 45 м

Первый способ решения. Эту задачу иногда решают, используя кинематические формулы для равноускоренного движения. Правда, при таком способе решения нас могут ожидать неприятные сюрпризы. Попробуем, например, применить для расчёта пути известную формулу

$$s_x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}. \qquad (1)$$

Начальную скорость для исследуемого в задаче участка легко определить из графика: $v_{0x} = -5$ м/с, время движения также известно: t = 4 с. Ускорение не задано, но и его несложно найти по данным графика:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{5-(-5)}{4} = 2,5 \text{ м/с}^2.$$

Подставим теперь числовые значения в формулу (1) и увидим, что

$$s_x = 0.$$

Получилось почти как у знаменитого героя стихотворения С.Я. Маршака: «Что за шутки! Еду я вторые сутки, а приехал я назад, а приехал в Ленинград!»

Правда, немного поразмыслив, мы вспомним, что формула (1) предназначена для определения проекции перемещения, а она равна пройденному пути лишь в том случае, когда тело движется по прямой в одном направлении.

Рассмотрим подробнее, как двигалось тело от t_1 = 6 с до t_2 = 10 с. Из графика видно, что первые две секунды оно тормозило, двигаясь против оси x до остановки. Следующие две секунды тело с тем же ускорением разгонялось по оси x из состояния покоя. Поэтому не удивительно, что тело вернулось в ту же точку, откуда начало движение на этом участке.

Для определения пройденного за 4 секунды пути с помощью формулы (1) нужно его разбить на два участка по 2 с. На каждом из них тело не меняло направления движения. Тогда из формулы (1) определим путь l_1 за первые 2 с:

$$l_1 = |s_{1x}| = \left| -5 \cdot 2 + \frac{2,5 \cdot 2^2}{2} \right| = 5 \text{ м}.$$

Рассуждая аналогично, найдём путь l_2, пройденный в течение следующих двух секунд:

$$l_2 = |s_{2x}| = \left| 0 \cdot 2 + \frac{2,5 \cdot 2^2}{2} \right| = 5 \text{ м}.$$

Таким образом, путь, пройденный телом за время от t_1 = 6 с до t_2 = 10 с, равен

$$l = l_1 + l_2 = 10 \text{ м},$$

и верным является ответ 1.

Ответ: 10 м.

Однако не слишком ли долго мы решали первую задачу?! Ведь она относится к задачам базового уровня, на решение которых отводится 2 – 3 минуты.

Второй способ решения. Если вспомнить, что площадь под графиком численно равна пройденному пути, задача решается практически мгновенно. Действительно, для определения искомого пути нужно сложить площади двух одинаковых прямоугольных треугольников. Высота каждого треугольника равна 5 м/с, а его основание – 2 с, поэтому

$$l = 2\frac{5 \cdot 2}{2} = 10 \text{ м.}$$

Очевидно, что за две минуты любой выпускник должен справиться с этим заданием.

Для тренировки попробуйте решить аналогичную задачу. Верный ответ выделен жирным шрифтом.

Задача 2. На рисунке 2 представлен график зависимости модуля скорости v автомобиля от времени t. Определите по графику путь, пройденный автомобилем за время от 0 до 30 с. (*ЕГЭ, 2009*)

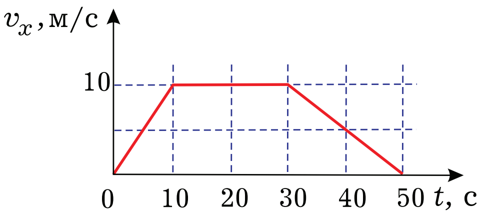


Рис. 2

1) 0 м
2) 100 м
3) 200 м
4) 250 м

Умение вычислять площадь под графиком может пригодиться не только при определении пути в равноускоренном движении. Решение задач на расчёт работы (в механике или термодинамике) значительно упрощается, если использовать графический приём. Рассмотрим его на примере ещё одной задачи ЕГЭ уровня А.

Задача 3. На рисунке 3 показано, как менялось давление идеального газа в зависимости от его объёма при переходе из состояния 1 в состояние 2, а затем в состояние 3. Каково отношение работ газа A_{12}/A_{23} на этих двух отрезках pV-диаграммы? (*ЕГЭ, 2009*)

1) 6
2) 2
3) 3
4) 4

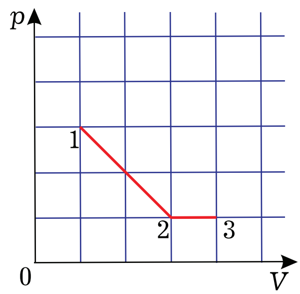


Рис. 3

Решение. Напомним, что работа газа рассчитывается по формуле

$$A = p\Delta V$$

только при изобарном процессе, когда давление остаётся неизменным. Её нельзя использовать при переходе газа из состояния 1 в состояние 2, поскольку давление на этом участке меняется. И тут нам на помощь вновь приходит знание того факта, что работа газа численно равна площади под графиком pV-диаграммы. Эти площади в данной задаче можно легко найти просто «по клеточкам», после чего искомое отношение работ находится сразу: $A_{12}/A_{23} = 4$.

Ответ: $A_{12}/A_{23} = 4$.

На примере решения двух следующих задач, предлагавшихся на олимпиадах прошлых лет, покажем эффективность использования графических приёмов.

Задача 4. Двигатель метеорологической ракеты с вертикальным подъёмом работает t = 10 с, в течение которых ракета движется с ускорением a = 4g. Определите максимальную высоту подъёма ракеты. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Решение задачи начнём с построения графика зависимости скорости ракеты от времени (рис. 4).

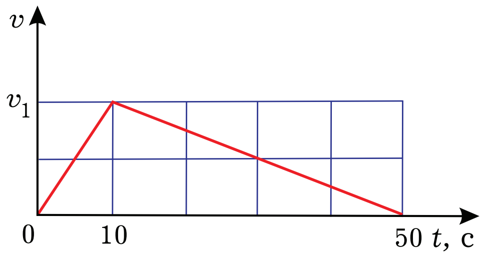


Рис. 4

Максимальная высота подъёма ракеты численно равна площади треугольника. Его высота равна скорости ракеты, набранной за время t работы двигателя:

$$v_1 = at = 4gt.$$

Длина основания треугольника равна времени t_0 полёта до максимальной высоты:

$$t_0 = t + t_1,$$

где t_1 – время полёта ракеты вверх после выключения двигателя. Это время можно легко найти, заметив, что на участке торможения ракета движется с ускорением, модуль которого в 4 раза меньше модуля ускорения на участке разгона ракеты; при этом модуль изменения скорости на обоих участках одинаков. Значит, время торможения ракеты в 4 раза больше времени её разгона:

$$t_1 = 4t = 40 \text{ с},$$

а полное время движения ракеты до максимальной высоты подъёма равно

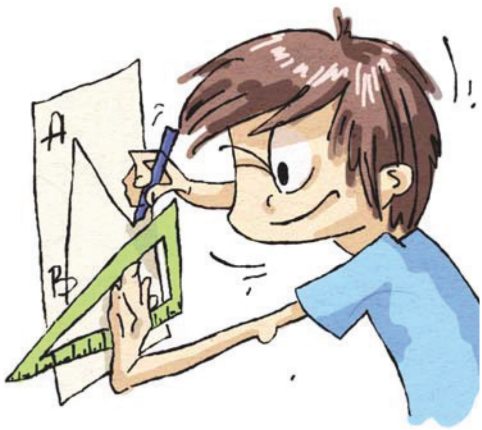
$$t_0 = 5t = 50 \text{ с}.$$

Теперь осталось лишь по площади треугольника найти искомую высоту:

$$H = \frac{v_1 t_0}{2} = \frac{4gt \cdot 5t}{2} = 10gt^2 = 10^4 \text{ м} = 10 \text{ км}.$$

Ответ: $H = 10gt^2 = 10$ км.

Задача 5. Электричка отправилась точно по расписанию. Мимо выбежавшего на перрон опоздавшего пассажира как раз проезжает начало предпоследнего вагона. Он проезжает мимо остолбеневшего пассажира за 18 с, а последний вагон – за 12 с. Считая движение электрички равноускоренным, определите, на сколько опоздал пассажир.



Решение. Построим график зависимости скорости электрички от времени, отсчитываемого от начала движения (рис. 5).

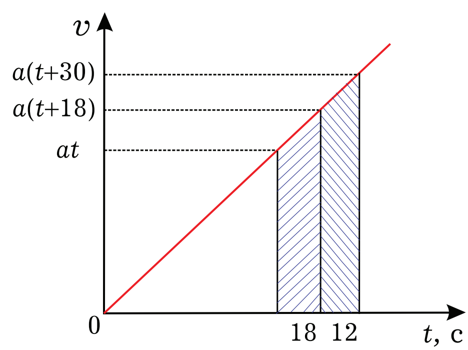


Рис. 5

Отметим на нём значения скоростей электрички в те моменты времени, когда мимо пассажира проезжает:

1) начало предпоследнего вагона – $v_1 = at$;

2) начало последнего вагона – $v_2 = a(t+18)$;

3) конец последнего вагона – $v_3 = a(t+30)$.

Поскольку длины вагонов одинаковые, то заштрихованные площади трапеций также равны:

$$\frac{at+a(t+18)}{2}\cdot 18=$$
$$=\frac{a(t+18)+a(t+30)}{2}\cdot 12,$$

откуда после несложных преобразований:

$$(t+t+18)\cdot 3=(t+18+t+30)\cdot 2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow t=21\text{с}.$$

Ответ: 21 с.

Закон нечётных чисел при равноускоренном движении

Задача 6. Какой путь пройдёт свободно падающее из состояния покоя тело за шестую секунду? (*ЕГЭ, 2003*)

1) 55 м
2) 65 м
3) 180 м
4) 360 м

Первый способ решения. Стандартный путь решения задачи таков. Сначала определяем путь, пройденный телом за шесть секунд:

$$s_6=\frac{gt_6^2}{2}=\frac{10\cdot 6^2}{2}=180\text{ м}.$$

Затем аналогичным образом находим путь, пройденный телом за пять предшествовавших секунд:

$$s_5=\frac{gt_5^2}{2}=\frac{10\cdot 5^2}{2}=125\text{ м}.$$

Теперь остаётся найти разность этих путей:

$$S_{5-6}=S_6-S_5=180-125=55\text{ м}.$$

Ответ: 55 м.

Второй способ решения. Ученик, решающий первым способом, затратит на решение этой задачи едва ли более трёх минут. Казалось бы, чего же ещё желать?

Оказывается, можно прийти к правильному ответу ещё быстрее. Для этого надо использовать закон нечётных чисел.

Чтобы понять происхождение этого закона, построим график зависимости скорости свободно падающего без начальной скорости тела от времени (рис. 6).

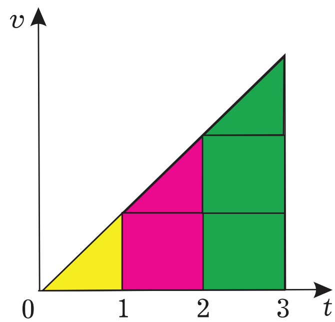


Рис. 6

Выделим на нём цветом площади, численно равные перемещениям за первые три секунды движения. Из графика отчётливо видно, что эти перемещения подчиняются простому закону. Если принять перемещение за первую секунду за s, то перемещение за вторую секунду равно $3s$, а за третью секунду – $5s$. Очевидно, что перемещение за n-ю секунду данного движения равно $(2n-1)s$.

Таким образом, график не только помог нам найти полезную для решения многих задач закономерность – закон нечётных чисел, – но и позволил мгновенно прийти к верному ответу в задаче 6.

Остановимся немного подробнее на формулировке самого закона, который, к сожалению, не часто упоминается в учебных пособиях.

В равноускоренном движении без начальной скорости перемещения, проходимые телом за последовательные равные промежутки времени, относятся *как последовательный ряд нечётных чисел.*

Полезно проверить его справедливость на первых секундах свободного падения без начальной скорости. По формуле

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

определим пути, пройденные телом за одну, две, три и четыре секунды движения:

$$s_1 = \frac{gt_1^2}{2} = \frac{10 \cdot 1^2}{2} = 5 \text{ м};$$

$$s_2 = \frac{gt_2^2}{2} = \frac{10 \cdot 2^2}{2} = 20 \text{ м};$$

$$s_3 = \frac{gt_3^2}{2} = \frac{10 \cdot 3^2}{2} = 45 \text{ м};$$

$$s_4 = \frac{gt_4^2}{2} = \frac{10 \cdot 4^2}{2} = 80 \text{ м}.$$

Теперь легко найти перемещения за первую, вторую, третью и четвёртую секунду:

$$s_{0\text{-}1} = s_1 = 5 \text{ м};$$

$$s_{1\text{-}2} = s_2 - s_1 = 15 \text{ м};$$

$$s_{2-3} = s_3 - s_2 = 25 \text{ м};$$

$$s_{3-4} = s_4 - s_3 = 35 \text{ м}.$$

Нетрудно заметить, что для этих перемещений справедлива закономерность:

$$s_{0-1} : s_{1-2} : s_{2-3} : s_{3-4} = 1 : 3 : 5 : 7.$$

Продолжая эту последовательность, можно без труда определить, что искомый путь

$$s_{5-6} = 11 s_1 = 55 \text{ м}.$$

Знание закона нечётных чисел позволяет решить быстрее не только эту задачу, но и более сложные задачи уровня С.

Задача 7. Тело, свободно падающее с некоторой высоты без начальной скорости, за время $\tau = 1$ с после начала движения проходит путь в $n = 5$ раз меньший, чем за такой же промежуток времени в конце движения. Найдите полное время движения. (*ЕГЭ, 2009*)

Первый способ решения. За время τ от начала движения тело проходит путь

$$s = \frac{g\tau^2}{2}. \qquad (2)$$

Обозначим полное время падения t. Тогда путь, пройденный за последнюю секунду, равен разности путей, пройденных за всё время движения t и за время $t - \tau$:

$$ns = \frac{gt^2}{2} - \frac{g(t-\tau)^2}{2}. \qquad (3)$$

Подставив выражение (2) в (3), получим:

$$n\frac{g\tau^2}{2} = \frac{gt^2}{2} - \frac{g(t-\tau)^2}{2},$$

откуда после простых преобразований найдём искомое время:

$$n\tau^2 = t^2 - (t-\tau)^2 \Rightarrow n\tau = 2t - \tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{(n+1)\tau}{2} = 3 \text{ с}.$$

Ответ: 3 с.

Второй способ решения. Закон нечётных чисел позволит в этой задаче сразу получить верный ответ. Действительно, поскольку по условию задачи путь, пройдённый телом за последнюю секунду движения в 5 раз больше, чем за такой же промежуток времени в начале движения, то ответ – 3 секунды – просто очевиден.

Отметим, кстати, что из рисунка 6 ответ получается ещё более наглядно.

Приняв на вооружение закон нечётных чисел и научившись легко приходить к верным ответам в задачах на равноускоренное движение, нельзя забывать, что в решении олимпиадных задач и задач ЕГЭ уровня С нужно давать не только ответ, но и его обоснование.

Задача 8. За последнюю секунду свободно падающее без начальной скорости тело пролетело $\frac{3}{4}$ всего пути. Сколько времени падало тело? (*МФТИ, 1981*)

Решение. Запишем кинематические уравнения для всего пути S и его первой четверти $\frac{S}{4}$:

$$S = \frac{gt^2}{2},$$

$$\frac{S}{4} = \frac{g(t-1)^2}{2},$$

где t – искомое время падения тела. Решив систему уравнений, получим

Ответ: $t = 2$ с.

Заметим, что закон нечётных чисел позволит практически сразу получить верный ответ. Если применение этого закона пока ещё вызывает у нас некоторое затруднение, то дадим подсказку. Обратите внимание, что за время $(t - 1)$ секунды тело пролетело $\frac{1}{4}$ всего пути.

Мудрые мысли Мудрые мысли Мудрые мысли

Из всех народов первым будет всегда тот, который опередит других в области мысли и умственной деятельности.

Л. Пастер

Величие народа не измеряется его численностью, как величие человека не измеряется его ростом; единственной мерой служит его умственное развитие и его нравственный уровень.

В. Гюго

Где мысль сильна – там дело полно силы.

В. Шекспир

Всякий раз, когда ум может сформулировать мысль, он празднует маленькую победу.

Дж. Сантаяна