



Киркинский Александр Иннокентьевич

*Кандидат физико-математических наук,
доцент Московского физико-технического института.
Преподаватель учебного центра Физтех-Потенциал.*



Лукьянов Андрей Александрович

*Кандидат физико-математических наук, доцент,
лаборатория по работе с одарёнными детьми МФТИ.*

Ещё о прыжках в высоту разными стилями на Земле и на Луне

В предположении о равенстве затрачиваемых энергий на прыжок на Земле и на Луне для разных стилей прыжка в приближении примерной одинаковости во всех случаях кинетических энергий прыгуна в высшей «точке» показана большая эффективность прыжка стилем Фосбери-флоп по сравнению с перекидным как на Земле, так и на Луне.

В № 5 номере журнала «Потенциал» за 2016 г. напечатана статья А.Б. Рыбакова «О прыжках в высоту на Луне» [1]. В ней рассматривается известная [2–3], но не теряющая интерес задача о сравнении результатов прыгунов в высоту на Земле и на Луне, где ускорение свободного паде-

ния в 6 раз меньше, чем на Земле, а другие условия считаются (простоты ради) такими же, как на Земле. Разумеется, задача о прыжках в высоту на Луне носит гипотетический характер, а предсказания теории, если и будут проверены экспериментально, то не скоро.

Авторы [1–3] (см. также [4]) совершенно резонно пишут, что задача о прыгуне – сложная задача, в которой человека нельзя принять просто за материальную точку и что учёт всё большего числа «параметров» прыгуна и стиля прыжка [1] может существенно изменить результат.

Мы обращаемся к статье [1] с целью одного небольшого, но важного уточнения – проведём сравнение результатов прыжков не только одним и тем же стилем на Земле и на Луне, но разными стилями, например, только на Земле (или только на Луне). Отсутствие в статье [1] такого сравнения может привести к недоразумениям и даже неверному выводу, что стиль Фосбери-флоп (ФФ), доказавший свою эффективность на Земле, перестает быть эффективным на Луне, так как на основе приводимых оценок может показаться, что на Луне нужно пользоваться перекидным способом прыжка. Хотя сам автор об этом явно не пишет, но неискушённый в физике читатель может именно так трактовать числовые оценки в [1]: прыжок на Луне на 9,5 м перекидным способом и всего на 7,5 м – стилем Фосбери-флоп.

Мы исходим из основного предположения, что *энергия, затрачиваемая прыгуном на преодоление силы тяжести, во всех случаях одинакова* – при прыжках стилем «Фосбери-флоп» и перекидным, причём как на Земле, так и на Луне (всего получается четыре случая).

В статье [1] это лишь наполовину так. С одной стороны, считается, что при прыжках на Земле и на Луне *затраты энергии одинаковы для одного и того же стиля прыжка* (ФФ или перекидного), но одновременно предполагается, что на Земле прыгун двумя этими (разными!) стилями преодолевает планку на *одной и той же высоте* (2 метра). Однако *затраты энергии у прыгуна будут существенно разными для этих двух прыжков* (для стиля Фосбери-флоп затраты энергии будут меньше, чем для перекидного стиля). После этого становится не очень корректным приводить рядом оценки для прыжков на Луне разными стилями (раз мы приложили разные «усилия»). Разные высоты прыжков (7,5 м и 9,5 м) связаны уже не со стилем прыжка, а с затраченной на прыжок энергией (см. ниже).

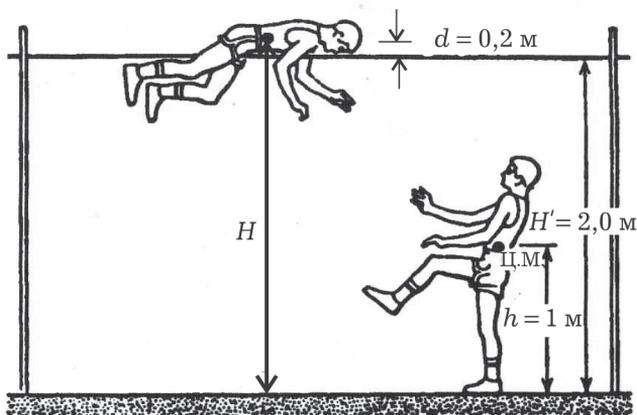


Рис. 1а. Прыжок перекидным стилем [4]

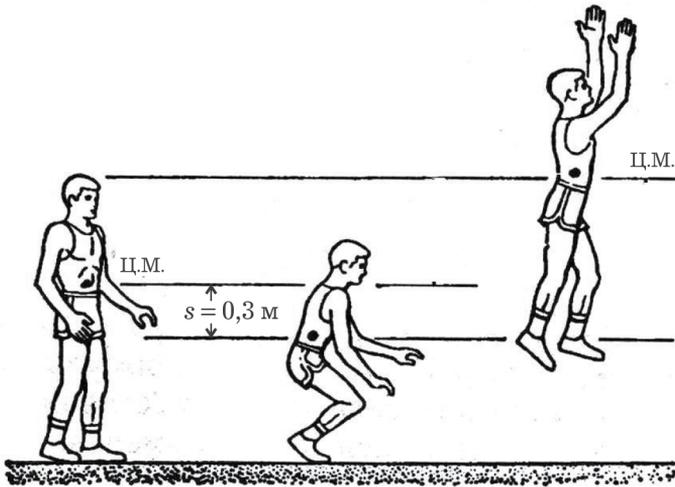


Рис. 16. Приседание перед прыжком [4]

Почему стиль Fosbury-flop менее энергозатратный, чем перекидной? Дело в том, что в перекидном способе центр масс (ЦМ) прыгуна с учётом конечной толщины тела спортсмена [1] должен пройти *над* планкой (см. рис. 1а). Для стиля Fosbury-flop, при котором прыгун над планкой проходит спиной вниз с большим прогибом, оказывается возможным поднимать ЦМ не так высоко – даже *ниже* планки (см. рис. 2). Упрощённая наглядная модель этого, допускающая простой расчёт, – переползание гусеницей забора (см. приложение).

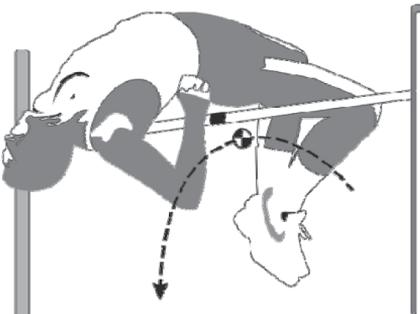


Рис. 2. Прыжок стилем Fosbury-flop (рис. из Интернета)

Авторы настоящей заметки не предлагают новой по сравнению с [1] модели прыжка, поэтому сочли целесообразным оставить обозначения статьи [1]: H' – высота над землёй, на которой находится планка, H – высота над землёй, на которую максимально поднимется центр масс прыгуна, h – высота, на которой находится ЦМ стоящего спортсмена, s – глубина приседания перед прыжком (см. рис. 16). Считаем, как в [1], что для стиля Fosbury-flop высота планки больше максимальной высоты подъёма ЦМ прыгуна на величину d (ЦМ проходит под планкой), а при перекидном способе – на столько же ниже (ЦМ проходит над планкой). Оставляем и числовые значения величин, принятые в [1], в частности: $H' = 2$ м для прыжка перекидным способом, $h \approx 1$ м, $s \approx 0,3$ м, $d \approx 0,2$ м. Заметим, что в принятых предположениях разность преодолеваемых высот разными стилями определяется лишь «геометрией», не зависит от ускорения свободного падения и равна $2d = 0,4$ м.

Поскольку читатель может не иметь перед собой работу [1], приведем здесь полностью все выкладки.

Одна из трудностей теории прыжка – учёт кинетической энергии прыгуна даже только в высшей «точке». Она не равна нулю! Известно, что для маленького камешка, брошенного под углом к горизонту, скорость в высшей точке траектории, а с ней и кинетическая энергия, не равна нулю. В этом случае энергию, однако, легко подсчитать. Для прыгуна – сложно. Прыгун – не материальная точка, и его кинетическая энергия будет складываться из энергии поступательного движения (вдоль и поперек планки), вращательного движения туловища, движения рук, ног, головы. Корректный расчёт всех этих энергий представляет собой задачу, существенно выходящую за рамки школьной программы и данной заметки. Эту кинетическую энергию мы будем просто считать во всех случаях примерно одинаковой (на Земле, на Луне, для разных стилей). Так же (молчаливо) поступали и наши предшественники [1–3]. Тогда на работу против сил тяжести тратится одинаковая энергия.

Неумение рассчитывать кинетическую энергию прыгуна в высшей «точке» не позволяет вычислить абсолютное значение высоты подъёма его центра масс. Ситуация упрощается в задачах на сравнение («на сколько одна высота больше другой?»): если кинетическая энергия в высшей «точке» одна и та же на разных планетах и для разных стилей, то эта неизвестная энергия просто не войдёт в ответ (в процессе вычислений взаимно уничтожится; см. ниже).

Предположим, что *при перекидном прыжке на Земле* прыгун преодолевает планку на высоте $H'_3 = 2$ м. Тогда его центр масс должен оказаться на высоте $H_3 = H'_3 + d = 2,2$ м. В момент начала отталкивания центр

масс прыгуна находился с учетом приседания на высоте $h' = h - s = 0,7$ м. Изменение высоты центра масс $\Delta H_3 = H_3 - h' = 2,2 \text{ м} - 0,7 \text{ м} = 1,5$ м. На Луне это расстояние будет в 6 раз больше в силу условия равенства затраченных на прыжок энергий и предположения об одинаковости во всех случаях кинетической энергии в «верхней точке».

$$E_{\text{затрач}} = mg_3 \Delta H_3 + E_{\text{кин}}^{\text{вверху}} = (1)$$

$$= mg_{\text{Л}} \Delta H_{\text{Л}} + E_{\text{кин}}^{\text{вверху}},$$

или проще (после взаимного уничтожения $E_{\text{кин}}^{\text{вверху}}$):

$$mg_3 \Delta H_3 = mg_{\text{Л}} \Delta H_{\text{Л}}. \quad (1')$$

Тогда

$$\Delta H_{\text{Л}} = 9,0 \text{ м}, \quad H_{\text{Л}} = \Delta H_{\text{Л}} + h' =$$

$$= 9,0 \text{ м} + 0,7 \text{ м} = 9,7 \text{ м},$$

а так как планка на $d = 0,2$ м ниже, то преодолеваемая высота $H'_{\text{Л}} = 9,5$ м. Это значение указывает автор [1].

Теперь – об отличиях наших результатов от [1].

1) Для прыжка стилем Фосбери-флоп на Земле при тех же затратах энергии, что и при перекидном прыжке, получаем *другую высоту*, на которой можно преодолеть планку

$$H'_3 = h' + \Delta H_3 + d =$$

$$= 0,7 \text{ м} + 1,5 \text{ м} + 0,2 \text{ м} = 2,4 \text{ м}. \quad (2)$$

Почти полное совпадение этого значения с мировым рекордом (2,45 м), надеемся, подтверждает верность наших предположений, в рамках которых получен этот результат.

2) На Луне высота планки составит уже

$$H'_{\text{Л}} = h' + \Delta H_{\text{Л}} + d = h' + 6\Delta H_3 + d =$$

$$= 0,7 \text{ м} + 9,0 \text{ м} + 0,2 \text{ м} = 9,9 \text{ м}. \quad (3)$$

Автор [1] получил для прыжка Фосбери-флоп на Луне другое значение – 7,5 м, *предполагая*, что на Земле прыгуны разными стилями преодолели

вают одинаковую высоту $H' = 2$ м. Но тогда энергии, затрачиваемые прыгунами, не одинаковы. Для стиля Фосбери-флоп она меньше, чем при перекидном: центр масс в первом случае поднимается на меньшую высоту:

$$\Delta H'_3^{(\Phi-\Phi)} = H'_3 - d - h' = 2 \text{ м} - 0,2 \text{ м} - 0,7 \text{ м} = 1,1 \text{ м}; \quad (4)$$

$$\Delta H'_3^{(\text{пер})} = H'_3 + d - h' = 2 \text{ м} + 0,2 \text{ м} - 0,7 \text{ м} = 1,5 \text{ м}. \quad (5)$$

Таблица. Высоты прыжков стилями Фосбери-флоп и перекидным на Земле и на Луне

	Земля	Луна
Высота прыжка перекидным стилем	$H'_3 = 2,0$ м	$H'_Л = 9,5$ м
Высота прыжка для стиля Фосбери-флоп	$H'_3 = 2,4$ м	$H'_Л = 9,9$ м

Замечание. Высотой H' прыжка называем высоту, на которой установлена планка. Для перекидного стиля эта высота на $d = 0,2$ м ниже максимальной высоты H , на которую поднимается центр масс прыгуна; для стиля Фосбери-флоп – на столько же выше. Значение $H'_3 = 2,0$ м для прыжка перекидным способом берётся как данное, и на его основе рассчитываются остальные величины в таблице.

Из таблицы видно, что стиль Фосбери-флоп эффективнее перекидного как на Земле, так и на Луне (высота прыжка для него больше). Об относительном выигрыше, который даёт прыжок стилем Фосбери-флоп по

Подводя итоги, скажем. Мы исходили из равенства затрачиваемых энергий на Земле и на Луне и для разных стилей прыжка. Иначе, считали мы, сравнение результатов прыжков разными стилями не корректно. Результаты наших расчетов (в предположение об одинаковости кинетической энергии прыгуна в высшей «точке») могут быть сведены в таблицу.

сравнению с перекидным, можно судить по отношениям

$$\varepsilon_3 = \frac{H'_3^{(\Phi-\Phi)} - H'_3^{(\text{пер})}}{H'_3^{(\text{пер})}} = \frac{2,4 - 2,0}{2,0} = 0,2 = 20\%, \quad (6)$$

$$\varepsilon_Л = \frac{H'_Л^{(\Phi-\Phi)} - H'_Л^{(\text{пер})}}{H'_Л^{(\text{пер})}} = 4\% = \frac{9,9 - 9,5}{9,5} \approx 0,042 \approx 4\%. \quad (7)$$

Видно, что на Луне, где ускорение свободного падения меньше, чем на Земле, выигрыш от «хитрого» прыжка меньше (такой прыжок нужнее там, где тяжелее прыгать).

Приложение. Задача о центре масс гусеницы, переползающей через забор

Задача. Гусеница длиной l (толщиной пренебрегаем) переползает через тонкий вертикальный забор, высота которого больше длины гусеницы. Определить положения центра масс гусеницы в

промежутке от момента, когда она только достигнет своей передней частью высшей точки забора (рис. 3 б), до момента, когда она полностью переползёт через эту точку (рис. 3 д).

Решение. Направим ось Ox вниз, совместив нуль оси с самой верхней точкой забора (см. рис. 3). Пусть x – расстояние, на которое переползёт высшую точку забора голова гусеницы (см. рис. 3 в). Координату центра масс гусеницы вычислим по обычной формуле:

$$x_C(x) = \frac{m_1 x_{C1} + m_2 x_{C2}}{m_1 + m_2} = \frac{x \cdot x / 2 + (l - x) \cdot (l - x) / 2}{l} \quad (\text{П.1})$$

(см. рис.3г), или после раскрытия скобок и приведения подобных членов

$$x_C(x) = \frac{2x^2 - 2lx + l^2}{2l}. \quad (\text{П.2})$$

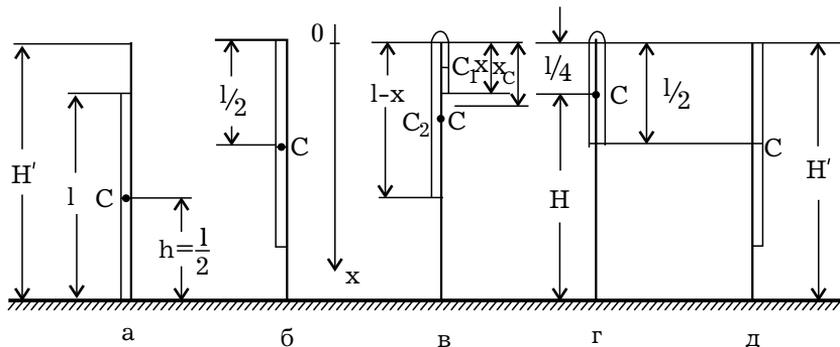


Рис. 3. Этапы перепозания забора гусеницей (белая полоска)

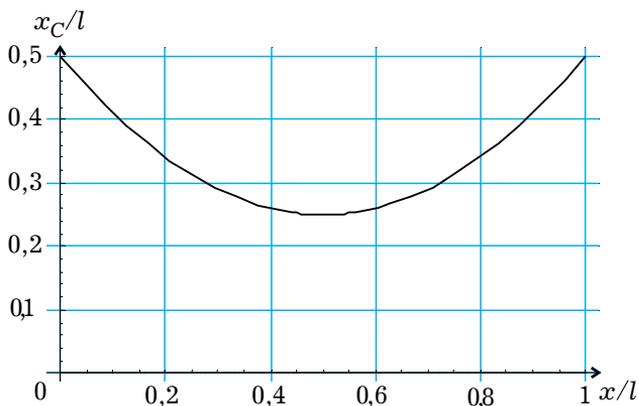


Рис. 4 График зависимости (П.2) в безразмерных переменных

График зависимости (П.2) – парабола с ветвями, направленными вверх. На рис. 4 показана зависимость x_C / l от x / l . На всем отрезке $x \in [0; l]$ функция $x_C(x)$ положительна, т. е. центр масс гусеницы ни в какой момент не достигает высшей точки забора. Когда гусеница ровно

наполовину переползёт через забор (для значения расстояния $x = l / 2$, см. рис. 3 г), функция $x_C(x)$ имеет минимум. Координата центра масс гусеницы дается при этом формулой

$$x_C\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{l}{4} = x_{C \min}. \quad (\text{П.3})$$

Это есть минимальное расстояние, на которое приблизится к вершине забора центр масс гусеницы.

Разумеется, прыгун в высоту имеет не слишком большое сходство с гусеницей, переползающей через забор; это – предельно упрощенная модель прыгуна. Главное достоинство модели – наглядность и воз-

можность легко провести вычисления до конца. Еще важно, что модель ухватывает главную особенность прыжка стилем Fosbury-флоп – центр масс спортсмена проходит *под планкой*, даже когда прыгун осуществляет успешную попытку (когда его тело проходит *над планкой*).

Литература

1. Рыбаков А.Б. «О прыжках в высоту на Луне» // Потенциал, 2016, №5, с. 36.
2. Маковецкий П.В. Смотри в корень! – 4-е изд., – М.: «Наука», 1979. – 384 с., с. 39 – 43, задача 16. «Прыгуны на Луне».
3. Гнедиг П., Хоньек Д., Райли К. Двести интригующих физических задач (Библиотечка «Квант». Вып.90). – М.: Бюро Квантум, Техносфера, 2005. – 272 с., с. 11 (У32) и с. 94 – 95 (Р32).
4. Дубровский В.И., Федорова В.Н. Биомеханика. – 3-е изд. – М.: Изд-во ВЛАДОС-ПРЕСС, 2008. – 669 с., с. 175 – 179 («Энергетика прыжков»).

Калейдоскоп

Калейдоскоп

Калейдоскоп

Мнения учёных о целях физики

«С давних времён, с тех пор как существует изучение природы, оно имеет перед собой в качестве идеала конечную, высшую задачу: объединить пёстрое многообразие физических явлений в единую систему, а если возможно, то в одну даже единственную формулу».

М. Планк

«Цель ... заключается в отыскании законов, благодаря которым отдельные процессы в природе могут быть сведены к общим правилам и могут быть снова выведены из этих правил».

Г. Гельмгольц

«Физика относительно молодая наука. Только в XVIII веке она полностью осознала себя и начала развиваться прочно, на двойной – экспертной и теоретической основе, стремясь к высокому идеалу, поставленному перед ней ещё в давние времена греческими философами: освободить человека от страха, дав ему понимание окружающих его сил и того, что он живёт в мире законов».

П. Ланжевэн