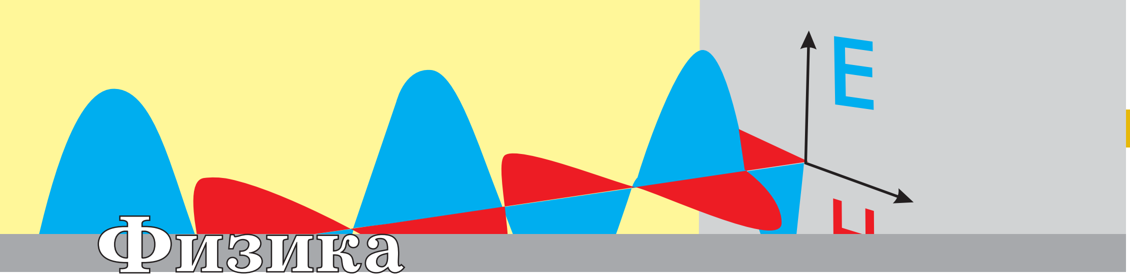
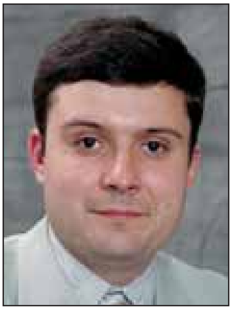




Стрыгин Сергей Евгеньевич
Ассистент кафедры физики колебаний физического факультета МГУ, кандидат физико-математических наук. Учитель физики ГОУ СОШ №160 г. Москвы, член экспертной комиссии ЕГЭ по физике. Четырёхкратный лауреат Всероссийского конкурса учителей физики и математики фонда «Династия».

Энергетический метод определения периода колебаний механических систем

Очень часто при решении задач на колебательные движения мы сталкиваемся с задачами на нахождение периода или частоты колебательной системы в пренебрежении силами трения в системе. Нахождение данных величин при использовании законов Ньютона может быть связано с рядом трудностей, что особенно заметно, если рассматриваемая колебательная система сложна, например, состоит из нескольких тел, пружин и т. д. В настоящей публикации обсуждается сравнительно удобный метод решения данного типа задач на основе закона сохранения энергии.

1. Алгоритм нахождения периода колебаний и пример его применения

Алгоритм вычисления периода колебаний механических систем при помощи энергетического метода можно разбить на три важных этапа:

1) запись выражения для полной механической энергии колебательной системы;

2) дифференцирование данного выражения по времени и получение дифференциального уравнения колебаний данной системы;

3) нахождение периода колебаний системы.

В качестве простого примера рассмотрим сначала следующую задачу, в которой мы применим описанный выше алгоритм.

Задача 1. Найти период колебаний механической системы, состоящей из двух невесомых пружин с коэффициентами жёсткости k_1 и k_2 и груза массой m (рис. 1). Трение не учитывать. В положении равновесия пружины не деформированы.

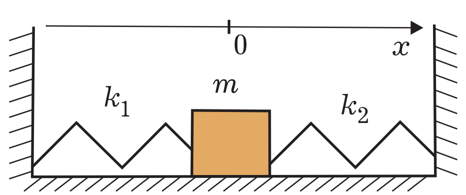


Рис. 1

Решение. Пусть мгновенное смещение груза при колебаниях данной колебательной системы из положения равновесия характеризуется некоторой координатой x (ось Ox направлена горизонтально, а начало координат совмещено с положением равновесия груза). Тогда полная механическая энергия колебательной системы W в данный момент времени равна сумме кинетической энергии груза и потенциальных энергий двух пружин:

$$W = \frac{mv^2}{2} + \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_2 x^2}{2},$$

где v – мгновенная скорость груза.

Производная полной механической энергии системы по времени равна нулю, так как она является постоянной величиной при отсутствии в системе сил трения. Следовательно:

$$\left(\frac{k_1 x^2}{2}\right)' + \left(\frac{k_2 x^2}{2}\right)' + \left(\frac{mv^2}{2}\right)' = 0. \quad (1)$$

Хорошо известно, что производную координаты груза x по времени можно представить через мгновенную скорость груза в данный момент времени: $v(t) = x'(t)$. Используя это равенство и вычисляя три производные в (1), получим:

$$\frac{k_1}{2}2xx' + \frac{k_2}{2}2xx' + \frac{m}{2}2x'x'' = 0.$$

Стоит заметить, что производную от полной энергии по времени здесь следует брать как производную сложной функции, так как в выражение для полной энергии время входит не явно, а только лишь через функцию зависимости координаты от времени $x = x(t)$.

Вынесем за скобки множитель mx', стоящий перед второй производной координаты:

$$mx'\left(x'' + \frac{k_1 + k_2}{m}x\right) = 0. \quad (2)$$

Откуда получаем

$$mx' = 0 \quad (3)$$

или

$$x'' + \frac{k_1 + k_2}{m}x = 0. \quad (4)$$

Первое уравнение соответствует случаю, когда $x' = 0$ и при этом полная энергия системы сохраняется. Это значит, что колебательная система просто покоится в положении равновесия. А поскольку колебания при этом не совершаются, то нас этот случай не очень интересует. Обратимся теперь ко второму уравнению. Оно по виду совпадает с уравнением свободных гармонических колебаний. Известно, что множитель, стоящий при координате x, представляет собой квадрат круговой частоты колебаний ω_0^2. В данном случае $\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m}$. Окончательно получаем выражение для периода колебаний системы в виде:

$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

Хорошо видно, что при отсутствии в данной колебательной системе одной из пружин энергетический метод приводит к верному результату в хорошо известном тривиальном случае простого маятника на пружине, т. е. к формуле периода колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Замечание. Как видно из решения, после записи уравнения (2) можно сразу переходить к рассмотрению уравнения гармонических колебаний (4), т. к. уравнение (3) колебательному движению не соответствует. Поэтому во всех задачах, приведённых ниже, мы так и будем поступать.

2. Более сложные колебательные системы

Задача 2. Определить период малых колебаний системы, состоящей из невесомого жёсткого стержня длиной l, на конце которого закреплена точечная масса m, а середина стержня прикреплена к стене при помощи пружины жёсткости k (рис. 2). Трение в креплениях и о воздух не учитывать. Считать, что колебания происходят в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью рисунка. В положении равновесия стержень вертикален, а ось пружины перпендикулярна ему.

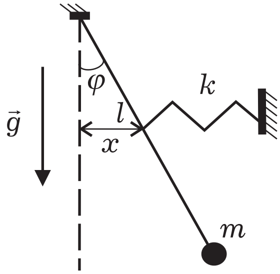


Рис. 2

Решение. Пусть мгновенное положение стержня при колебаниях в вертикальной плоскости характеризуется его углом отклонения от вертикали φ. Нулевой уровень потенциальной энергии груза в поле сил тяготения выбран при вертикальном расположении стержня. Полная механическая энергия данной колебательной системы постоянна и может быть записана в виде:

$$\frac{mv^2}{2}+mgl(1-\cos\varphi)+\frac{kx^2}{2}=\text{const},$$

где v – мгновенная скорость груза, g – ускорение свободного падения, x – мгновенная координата, задающая горизонтальное отклонение середины стержня от положения равновесия системы. Ось Ox выберем горизонтальной, а начало координат совместим с положением равновесия.

Учитывая, что $x=(l/2)\sin\varphi$ и $v=l\varphi'$, а также условия малости угла отклонения $\sin\varphi\approx\varphi$ и $\cos\varphi\approx 1-\varphi^2/2$, получим:

$$\frac{ml^2\varphi'^2}{2}+mgl\frac{\varphi^2}{2}+\frac{k}{2}\frac{l^2\varphi^2}{4}=\text{const}.$$

Далее, взяв производные от левой и правой частей данного уравнения, находим:

$$ml^2\,2\varphi'\varphi''+mgl2\varphi\varphi'+\frac{kl^2}{4}2\varphi\varphi'=0.$$

Вынесем за скобки множитель $2ml^2\varphi'$, стоящий перед второй производной угла:

$$ml^2\,2\varphi'(\varphi''+\frac{\varphi g}{l}+\frac{k}{4m}\varphi)=0.$$

Откуда получаем уравнение, описывающее свободные колебания в данной системе:

$$\varphi''+\frac{kl+4mg}{4ml}\varphi=0.$$

Из уравнения находим квадрат круговой частоты колебаний:

$$\omega^2 = \frac{kl + 4mg}{4ml}.$$

Следовательно, период колебаний равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4ml}{kl + 4mg}}.$$

Задача 3. Один конец жёсткого невесомого стержня длины l шарнирно закреплён на оси A, а другой конец прикреплён к пружине жёсткостью k (рис. 3). На расстоянии a от шарнира на стержне закреплён груз массой m. Система может совершать колебания в горизонтальной плоскости, совпадающей с плоскостью рисунка, вокруг вертикальной оси A. В положении равновесия стержень горизонтален, а пружина не деформирована и перпендикулярна стержню. Найти период малых колебаний груза.

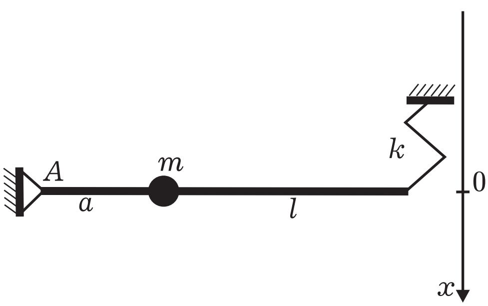


Рис. 3

Решение. Пусть мгновенное положение груза при колебаниях характеризуется некоторой координатой x. Ось Ox расположим в плоскости колебаний, а начало координат совместим с положением равновесия груза системы. Полная механическая энергия колебательной системы имеет вид:

$$\frac{kd^2}{2} + \frac{mx'^2}{2} = \text{const}, \qquad (5)$$

где d – деформация пружины. Используя выражение для деформации пружины $d = (l/a)x$, продифференцируем левую и правую части выражения (5):

$$\frac{kl^2}{2a^2}2xx' + \frac{m}{2}2x'x'' = 0.$$

Вынесем за скобки множитель mx':

$$mx'\left(x'' + \frac{kl^2}{ma^2}x\right) = 0.$$

Откуда получаем уравнение, описывающее свободные колебания в данной системе:

$$x'' + \frac{kl^2}{ma^2}x = 0.$$

Отсюда период колебаний системы:

$$T = 2\pi\frac{a}{l}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Заметим, что при $a = l$ данная формула переходит в известную формулу периода колебаний груза на пружине.

Стоит отметить, что энергетический метод нахождения периода и частоты колебательной системы позволяет быстро получить желаемый результат по сравнению с методами, использующими законы динамики Ньютона. Всё это делает энергетический метод крайне удобным и простым для решения подобного рода задач.

3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 4. Найти период колебаний механической системы, изображённой на рисунке 4. Массой блока, трением в его оси, а также трением груза о поверхность пренебречь. Нить при колебаниях остаётся натянутой. Учесть, что в положении равновесия пружина уже напряжена.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$.

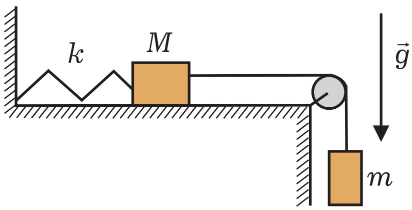


Рис. 4

Задача 5. Найти период малых колебаний маятника, состоящего из невесомого жёсткого стержня длиной l_2 и двух грузов массами m_1 и m_2, прикреплённых к стержню на расстояниях l_1 и l_2 от точки подвеса соответственно (рис. 5). Колебания происходят в вертикальной плоскости. Трение в оси вращения и о воздух не учитывать.

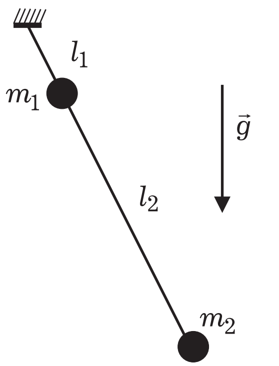
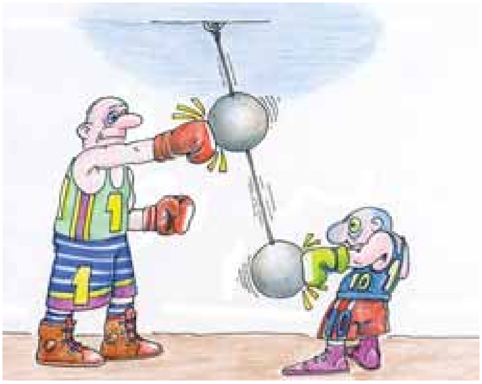


Рис. 5

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{g(m_1 l_1 + m_2 l_2)}}$.



Задача 6. Колебательная система, состоящая из лёгкого и жёсткого стержня, шарика массой m и двух невесомых пружин с коэффициентами жёсткости k_1 и k_2, может совершать колебания в горизонтальной плоскости, совпадающей с плоскостью рисунка, вокруг вертикальной оси O (рис. 6). В положении равновесия пружины не деформированы и перпендикулярны стержню. Точки крепления пружин к стержню делят его на три равные части. Определить период малых колебаний стержня. Трением в системе пренебречь.

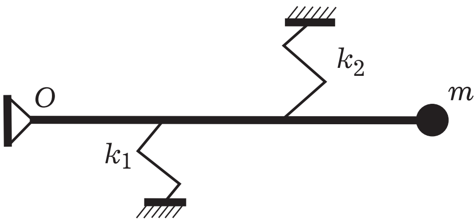


Рис. 6

Ответ: $T = 6\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + 4k_2}}$.