



Прохоров Вадим Константинович

Учитель физики ГБОУ

«Школа № 1526 на Покровской» г. Москва.

Электромагнитная индукция в задачах. Часть 2.

В этой части статьи будем рассматривать задачи, где сторонней силой является сила, действующая со стороны вихревого электрического поля.

Пусть в некоторой системе отсчета контур покоится, а магнитное поле сквозь контур изменяется (например, постоянный магнит движется относительно контура, или изменяется ток, в создающей магнитное поле катушке). Т. к. изначально свободные заряды в этой системе отсчета покоятся, то сила Лоренца не может появиться. В этом случае заряды проводника приходят в движение по иной причине – из-за действия на них электрического поля. Это т. н. *вихревое электрическое поле*, которое порождается не какими-либо зарядами, а переменным во времени магнитным полем и обладает следующими свойствами:

- силовые линии этого поля замкнуты (рисунок 1) в отличие от

электростатического поля, у которого силовые линии начинаются на положительном заряде и заканчиваются на отрицательном. Именно «замкнутость» силовых линий делает это поле «вихревым».

- из-за замкнутости силовых линий работа, совершаемая полем при перемещении заряда по замкнутому контуру, не равна нулю – вихревое поле не потенциально. Эта работа при перемещении единичного заряда и будет равна ЭДС.

- вихревое электрическое поле возникает вне всякой связи с наличием или отсутствием в пространстве проводящего контура. Оно может перемещать свободные заряды, если такие имеются. Если в пространстве, где возникло вихревое электриче-

ское поле, окажется проводник, то поле «с удовольствием» поработает над перемещением свободных зарядов в нем. А если проводника не окажется, то поле все равно будет существовать, только перемещать ему будет нечего.

– ЭДС индукции, возникающая вследствие действия на заряды вихревого электрического поля, не локализована в каком-то конкретном участке контура, а существует в каждом, сколь угодно малом, элементе этого контура, так что полную ЭДС можно считать суммой малых ЭДС, возникающих в этих элементах.

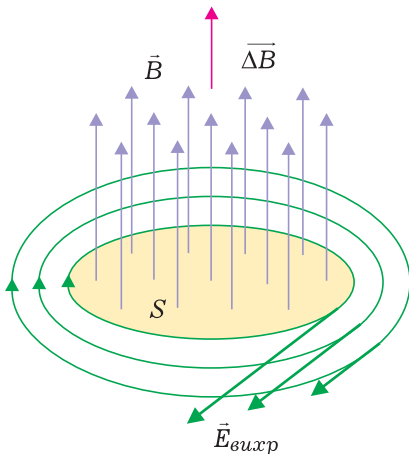


Рис. 1

Магнитное поле пронизывает поверхность в виде круга площади S . Когда магнитное поле начинает увеличиваться, в пространстве возникает электрическое поле, силовые линии которого имеют вид окружностей и направлены по часовой стрелке. Вектор напряженности этого поля направлен по касательной к этим окружностям.

Рассмотрим несколько задач.

Задача 5.

Магнитное поле между полюсами электромагнита является однородным в любой момент времени в пределах круга радиусом R (рис. 2). Силу тока в обмотке электромагнита изменяют так, что индукция магнитного поля изменяется со временем по закону:

$$B(t) = kt.$$

Вне пространства между полюсами магнитное поле отсутствует. Определить:

- 1) зависимость ЭДС индукции от расстояния r от центра круга.
- 2) зависимость напряженности электрического поля от расстояния r от центра круга.

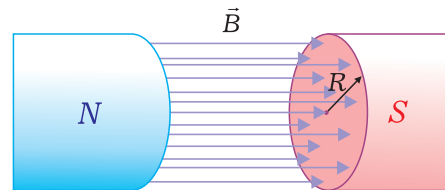


Рис. 2

Решение.

Для начала уточним определение магнитного потока. Вообще говоря, магнитный поток через произвольную поверхность равен сумме элементарных магнитных потоков $\Delta\Phi$. Произвольную поверхность необходимо разбить на плоские элементы площади ΔS_i , настолько малые, что в пределах каждого из них магнитное поле можно считать однородным и равным B_i . Тогда:

$$\Phi = \sum_i B_i \Delta S_i \cdot \cos(\widehat{\vec{B}_i, \vec{n}_i}). \quad (1)$$

Очевидно, если магнитное поле однородно в пределах плоской по-

верхности конечной площади S , то из (1) следует:

$$\Phi = BS \cos(\widehat{\vec{B}, \vec{n}}).$$

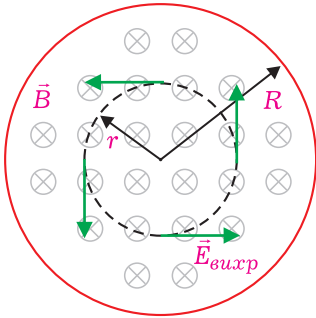


Рис. 3а

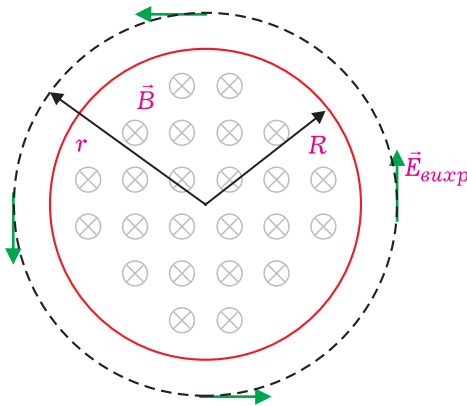


Рис. 3б

Далее рассмотрим воображаемый контур, представляющий собой окружность радиуса $r < R$. Этот контур полностью заполнен магнитным полем (рис. 3а) и магнитный поток через него равен:

$$\Phi = B \cdot \pi r^2$$

По закону электромагнитной индукции величина ЭДС:

$$\varepsilon_{ind} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{dB}{dt} \cdot \pi r^2 = k\pi r^2. \quad (2)$$

С другой стороны, ЭДС по определению:

$$\varepsilon_{ind} = \frac{A_{стор}}{q}, \quad (3)$$

где работа сторонней силы $A_{стор}$ – работа силы, действующей на заряд q со стороны вихревого электрического поля. Эта сила действует по всей длине контура, поэтому:

$$A_{стор} = qE_{вихр} \cdot 2\pi r. \quad (4)$$

Из уравнений (2) – (4) получаем:

$$E_{вихр} = \frac{kr}{2}.$$

Теперь рассмотрим контур в виде окружности радиуса $r > R$. В этом контуре магнитное поле заполняет только часть площади, равную πR^2 (рис. 3б). Оставшуюся часть площади контура магнитное поле не пронизывает и поток сквозь эту часть контура равен нулю. Поэтому в соответствие с (1) суммарный магнитный поток равен:

$$\Phi = B \cdot \pi R^2.$$

Величина ЭДС индукции в таком контуре не зависит от радиуса контура:

$$\varepsilon_{ind} = \frac{d\Phi}{dt} = k\pi R^2, \quad (5)$$

А напряженность вихревого поля:

$$E_{вихр} = \frac{kR^2}{2r}.$$

Итак:

$$\varepsilon_{ind} = \begin{cases} k\pi r^2, & \text{при } r < R, \\ k\pi R^2, & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (6)$$

$$E_{\text{вихр}} = \begin{cases} \frac{kr}{2}, & \text{при } r < R, \\ \frac{kR}{2}, & \text{при } r = R, \\ \frac{kR^2}{2r}, & \text{при } r > R, \end{cases} \quad (7)$$

Зависимости $\varepsilon_{\text{ind}}(t)$ и $E_{\text{вихр}}(t)$ изображены на графике (рис. 4а и 4б).

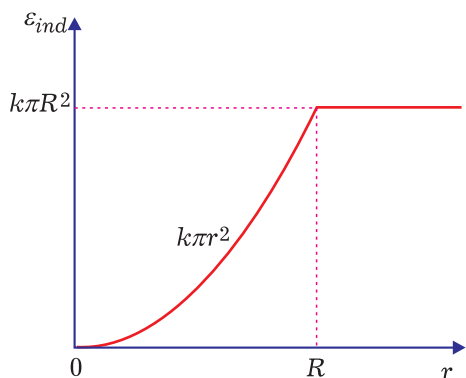


Рис. 4а

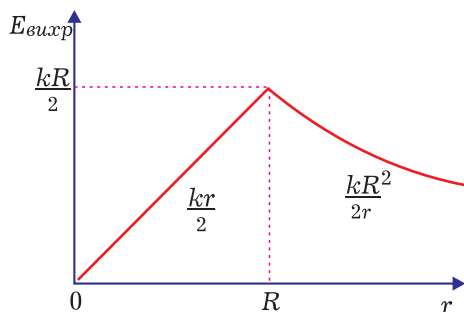


Рис. 4б

Отметим следующее обстоятельство: напряженность вихревого электрического поля численно равна ЭДС индукции единицы длины проводника. Поэтому справедливо соотношение:

$$\Delta \varepsilon_{\text{ind}} = E_{\text{вихр}} \Delta L. \quad (8)$$

Это легко проверить с помощью соотношений (6) и (7). Предлагаем читателю сделать это самостоятельно.

Задача 6. (МФТИ 1983 г.)

Внутри длинного прямого соленоида радиуса a создано однородное магнитное поле, меняющееся со временем по закону $B = kt$, вне соленоида поле можно считать нулевым. Однородное тонкое проволоочное кольцо сопротивлением r симметрично охватывает соленоид. Пусть точки a и b ограничивают четверть кольца.

1) Чему будет равна разность потенциалов между точками a и b ?

2) Что покажет вольтметр с очень большим внутренним сопротивлением, если его подключить к точкам a и b так как показано на рисунке 5а?

3) Что покажет вольтметр с очень большим внутренним сопротивлением, если его подключить к точкам a и b так как показано на рисунке 5б?

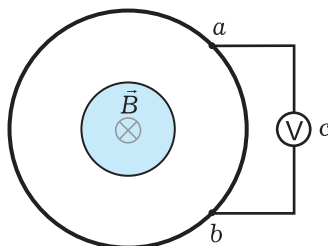


Рис. 5а

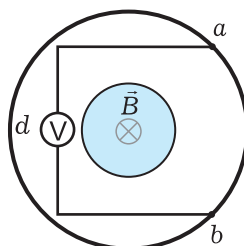


Рис. 5б



Решение.

Пусть радиус кольца равен R . ЭДС участка кольца пропорциональна его длине (см. формулу (8) задачи 5). Поэтому ЭДС индуцируемая на участке $a-b$ равна

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ab} &= E_{вихр} \cdot \frac{2\pi R}{4} = \frac{ka^2}{2R} \cdot \frac{2\pi R}{4} = \\ &= \frac{k\pi a^2}{4} = \frac{\varepsilon_{ind}}{4}.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь

$E_{вихр} = \frac{ka^2}{2R}$ – напряженность вихревого поля на расстоянии R от центра соленоида, ε_{ind} – ЭДС индуцируемая во всем кольце. Кольцо в этом случае можно представить в виде эквивалентной схемы, как показано на рисунке 5в.

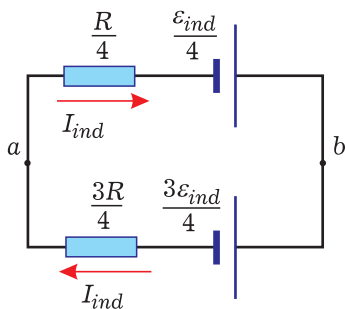


Рис. 5в

Эквивалентная схема кольца, разделенного точками a и b на две части.

Казалось бы – при подключении вольтметра к точкам a и b , он покажет нулевое значение. Но дело в том, что подключая вольтметр мы создаем новый контур $a-c-b-a$. И в проводах, соединяющих вольтметр с кольцом, возникает вихревое электрическое поле. Контур $a-c-b-a$ не пронизывается магнитным полем и

магнитный поток сквозь этот контур постоянен и равен нулю. Следовательно, суммарная ЭДС индукции в этом контуре также равна нулю. Но на участке $a-b$ индуцирована ЭДС, определяемая формулой (1). Тогда на участке $a-c-b$ должна индуцироваться ЭДС такая же по величине, но включенная «навстречу». Контур $a-c-b-a$, таким образом, эквивалентен схеме на рисунке 6а.

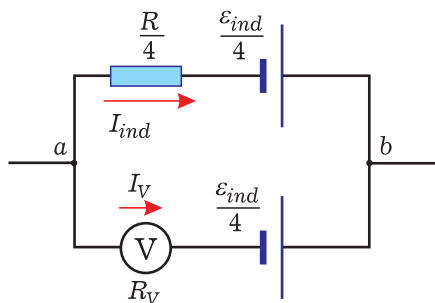


Рис. 6а

Эквивалентная схема контура $a-c-b-a$.

Полная ЭДС в контуре равна нулю.

I_V – ток через вольтметр,

r_V – сопротивление вольтметра.

Запишем правило Кирхгофа для этого контура:

$$I_{ind} \frac{r}{4} - I_V r_V = \frac{\varepsilon_{ind}}{4} - \frac{\varepsilon_{ind}}{4} = 0. \quad (2)$$

Вольтметр, очевидно, показывает значение напряжения равное:

$$U_V = I_V r_V = \frac{\varepsilon_{ind}}{4}.$$

Когда вольтметр подключен к тем же точкам, но в положении, показанном на рисунке 5б, то образуется контур $a-d-b-a$, который, в отличие от $a-c-b-a$, пронизывается магнитным полем. Полная индукция в этом контуре равна ε_{ind} . Эквивалентная схема этого контура представлена на рисунке 6б. Для этого

контура правило Кирхгофа имеет вид:

$$I_{ind} \frac{r}{4} + I_V r_V = \frac{\varepsilon_{ind}}{4} + \frac{3\varepsilon_{ind}}{4} = \varepsilon_{ind}, \quad (3)$$

откуда с учетом (3) получаем показания вольтметра для этого случая:

$$U_V = I_V r_V = \frac{3\varepsilon_{ind}}{4}.$$

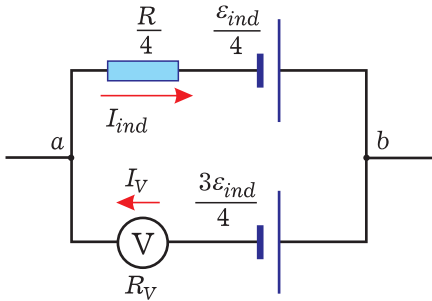


Рис. 6б

Эквивалентная схема контура a-d-b-a.

Полная ЭДС в контуре равна ε_{ind} .

Таким образом, вольтметр, подключенный к одним и тем же точкам показывает разные значения в разных положениях — а «виновником» такой странности является вихревое электрическое поле.

Задача 7 (МФТИ 1983 г.).

Проволочный виток в виде кольца состоит из двух тонких проводников в форме полуокружностей одинаковой длины с равными площадями поперечного сечения, но с разными удельными электрическими сопротивлениями. Виток помещён в однородное магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен к плоскости витка. Найти максимальные напряжённости электрического поля в проводниках, если известно, что индукция магнитного поля изменяется во

времени по гармоническому закону $B(t) = B_0 \cos \omega t$. Длина каждого проводника равна L , а отношение удельных электрических сопротивлений проводников $\rho_1/\rho_2 = \beta$.

Решение.

Если по проводникам с различными сопротивлениями протекает электрический ток, то в месте контакта этих проводников образуется некоторый заряд. На рисунке 7 изображён контакт двух таких проводников.

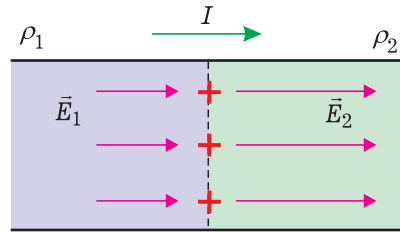


Рис. 7

Запишем закон Ома в дифференциальной форме для каждого проводника:

$$j_1 = \frac{E_1}{\rho_1}, \quad j_2 = \frac{E_2}{\rho_2}$$

Если поперечные сечения проводников одинаковы, то плотность тока в них тоже одинакова и тогда мы видим, что на границе раздела напряженность поля испытывает скачок. Этот скачок обусловлен наличием на границе раздела объемного заряда. Если $\rho_2 > \rho_1$, то этот заряд положительный, в противном случае заряд отрицательный. В нашем кольце два таких контакта — в одном накапливается положительный заряд, а в другом отрицательный. Эти заряды создают электрическое (не вихревое) поле, которое необходимо учесть в задаче.

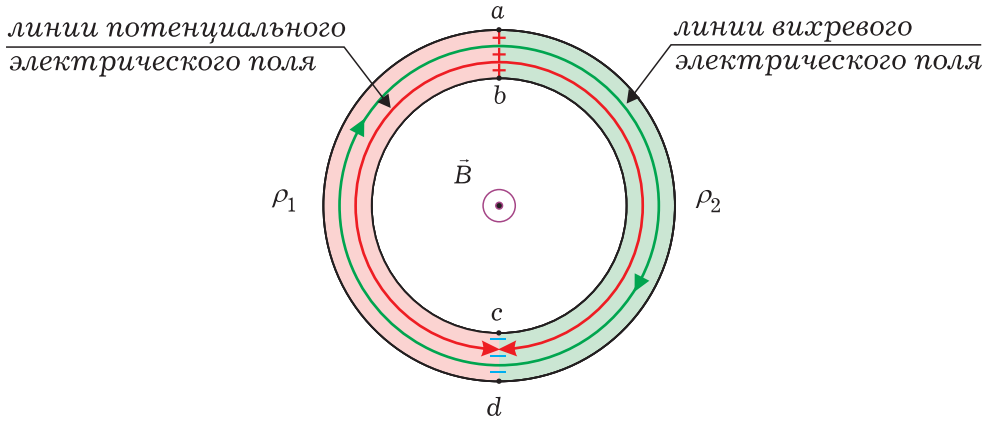


Рис. 8.

Проводники с разными удельными сопротивлениями показаны разным цветом. В местах контакта проводников (сечения a-b и c-d) накапливаются положительные и отрицательные заряды. Эти заряды создают потенциальное электрическое поле (линии этого поля показаны красным цветом). Зеленым цветом показана силовая линия вихревого электрического поля, возникающего вследствие изменения магнитного поля сквозь контур. Суммарное электрическое поле в проводниках различно из-за того, что в первом проводнике вихревое и потенциальное поля противоположно направлены, а во втором проводнике совпадают по направлению.

Суммарное электрическое поле в первом и втором проводниках является суперпозицией вихревого электрического поля $E_{вихр}$ и поля E_0 , созданного зарядами, возникающими в месте контакта проводников с разными удельными сопротивлениями (рисунок 8):

$$E_1 = E_{вихр} - E_0, \quad (1)$$

$$E_2 = E_{вихр} + E_0 \quad (2)$$

Поля E_1 и E_2 определяют величину тока в кольце:

$$E_1 = \frac{I_{ind}\rho_1}{S_{сеч}} \quad (3)$$

$$E_2 = \frac{I_{ind}\rho_2}{S_{сеч}} \quad (4)$$

Из уравнений (1) – (4) получим:

$$E_0 = \frac{I_{ind}(\rho_1 - \rho_2)}{2S_{сеч}}. \quad (5)$$

Индукционный ток:

$$I_{ind} = \frac{\varepsilon_{ind}}{R} = \frac{\varepsilon_{ind}S_{сеч}}{(\rho_1 + \rho_2)L} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5) получаем для электрического поля зарядов:

$$E_0 = \frac{\varepsilon_{ind}(\rho_1 - \rho_2)}{2(\rho_1 + \rho_2)L} \quad (7)$$

Это поле в проводниках направлено в противоположные стороны от «плюса» к «минусу» (см. рисунок),

является потенциальным – его работа по перемещению заряда вдоль всего кольца равна нулю.

По определению ЭДС – отношение работы сторонней силы по перемещению положительного заряда к величине этого заряда. Сторонней силой является сила, действующая на заряды со стороны вихревого электрического поля.

$$\varepsilon_{ind} = \frac{A_{cm}}{q} = \frac{qE_{вихр} \cdot 2L}{q} = 2E_{вихр}L.$$

Отсюда получаем:

$$E_{вихр} = \frac{\varepsilon_{ind}}{2L} \quad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (1) и (2) после преобразований получаем значения для напряженностей суммарных электрических полей в проводниках:

$$E_1 = \frac{\varepsilon_{ind}\rho_2}{L(\rho_1 + \rho_2)} = \frac{\varepsilon_{ind}}{L(1 + \beta)}, \quad (9)$$

$$E_2 = \frac{\varepsilon_{ind}\rho_1}{L(\rho_1 + \rho_2)} = \frac{\varepsilon_{ind}\beta}{L(1 + \beta)}. \quad (10)$$

По закону электромагнитной индукции:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ind} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dB}{dt}S_{окр} = \\ &= \omega B_0 \pi r^2 \sin \omega t = \frac{\omega B_0 L^2}{\pi} \sin \omega t \quad (11) \end{aligned}$$

Учитывая, что максимальное значение ЭДС принимает в моменты, когда $\sin \omega t = 1$, из (9), (10) и (11) получаем выражение для максимальных напряженностей в проводниках:

$$E_{1max} = \frac{\omega B_0 L}{\pi(1 + \beta)},$$

$$E_{2max} = \frac{\omega B_0 L \beta}{\pi(1 + \beta)}.$$



Задача 8. (МФТИ)

Проволочный контур в виде квадрата со стороной a и сопротивлением R , расположен на гладкой горизонтальной поверхности (рисунок 9). Часть контура находится в однородном магнитном поле с индукцией B_0 , перпендикулярной плоскости контура. Контур неподвижен и входит в область однородного магнитного поля на глубину b . После выключения магнитного поля контур приобретает некоторый импульс. Определить величину и направление этого импульса, полагая, что за время спада индукции магнитного поля смещение контура пренебрежимо мало. Величина индукции поля при выключении изменяется равномерно. Самоиндукцией пренебречь.

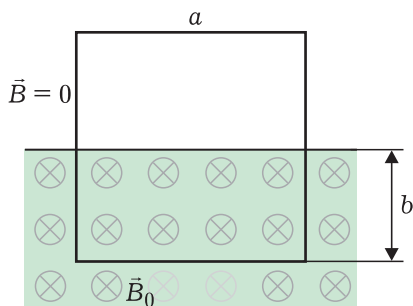


Рис. 9

Решение.

При выключении магнитного поля магнитный поток изменяется на величину

$$\Delta\Phi = B_0 ab \quad (1)$$

Изменение магнитного потока приводит к тому, что в контуре возникает индукционный ток (Δt – интервал времени, в течение которого индукция уменьшается до нуля):

$$I_{ind} = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = \frac{B_0 ab}{\Delta t R}, \quad (2)$$

направленный по часовой стрелке (т. к. его магнитное поле, по правилу Ленца, должно компенсировать уменьшение внешнего поля). Тогда на части рамки, находящиеся в магнитном поле, действуют силы Ампера, показанные на рисунке 10.

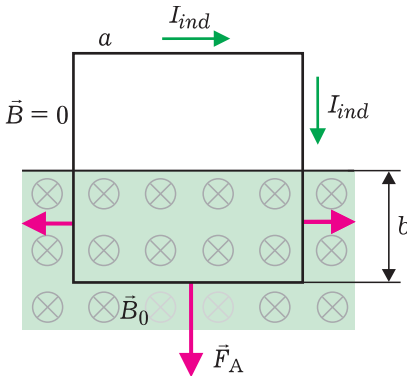


Рис. 10

Суммарная сила Ампера в любой момент времени пропорциональна величине индукции:

$$F_A(t) = B(t) \frac{B_0 a^2 b}{R \Delta t},$$

а т. к. индукция уменьшается равномерно, то сила Ампера линейно уменьшается от значения

$$F_{A0} = \frac{B_0^2 a^2 b}{R \Delta t}$$

до нуля – в соответствии с графиком на рисунке 11.

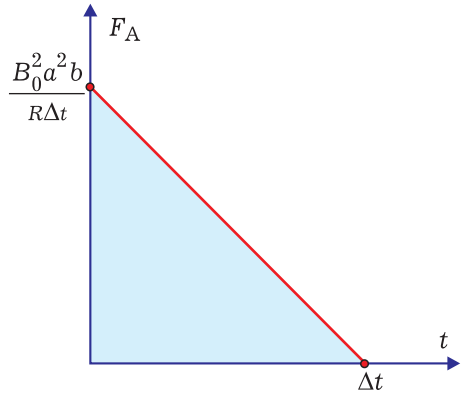


Рис. 11

За время выключения поля Δt сила Ампера и сообщает контуру искомый импульс, который численно равен площади, заштрихованной под графиком $F_A(t)$:

$$p = \frac{B_0^2 a^2 b}{2R}.$$

В заключении хотелось бы отметить следующее: природа возникновения ЭДС индукции (сила Лоренца или вихревое электрическое поле) определяется системой отсчета относительно которой рассматривается та или иная ситуация. Если контур движется в некоторой системе отсчета, то сторонней силой является сила Лоренца, а если мы будем рассматривать этот контур в системе отсчета движущейся вместе с этим контуром, то сторонней силой будет являться сила со стороны вихревого электрического поля. В этом собственно кроется глубокая связь электрического и магнитного полей как проявлений одного – электромагнитного поля.

Автор выражает признательность Киркинскому А.И. за ценные замечания по содержанию статьи.