

Прохоров Вадим Константинович
Учитель физики ГБОУ
«Школа № 1526 на Покровской» г. Москва.



Электромагнитная индукция в задачах. Часть 1

Явление электромагнитной индукции, открытое Майклом Фараде-ем в 1931 году, заключается в возникновении тока в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока через поверхность, охваченную контуром. Причиной возникновения электрического тока является ЭДС, возникающая в контуре. Согласно закону электромагнитной индукции, эта ЭДС равна скорости изменения магнитного потока:

$$E_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (I)$$

где магнитный поток Φ , свозь плоский контур площадью S , равен по определению

$$\Phi = BS \cos(\widehat{\vec{B}, \vec{n}}) \quad (II)$$

$\vec{n}$ – единичный вектор нормали к контуру.

Как мы видим из (II), есть две причины изменения магнитного потока:

- изменение величины индукции магнитного поля $\vec{B}$, пронизывающего контур;
- движение контура или его частей в магнитном поле.

ЭДС – работа сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда. И как раз *природа сторонних сил в случае изменения поля и в случае движения контура разная.*

В том случае, когда величина индукции магнитного поля изменяется со временем, сторонней силой, вызывающей движение зарядов, является сила, действующая со стороны *вихревого электрического поля*. Согласно идее Максвелла, изменяющееся со временем магнитное поле вызывает появление такого по-

ля. Ситуации, в которых возникает вихревое электрическое поле будут рассмотрены во второй части статьи.

В случае, когда контур или его части движутся в магнитном поле, то природа сторонней силы иная – это *сила Лоренца*. Известно, что сила Лоренца действует на движущиеся в данной системе отсчета заряженные частицы. Когда движется проводник, то вместе с ним движутся и находящиеся в нем свободные заряды, а значит, на них действует сила Лоренца. Продольная (направленная вдоль проводника) составляющая силы Лоренца и является сторонней силой, вызывающей появление тока. Работа этой составляющей силы Лоренца по перемещению единичного положительного заряда равна ЭДС индукции.

Закон электромагнитной индукции (I) одинаково описывает оба механизма возникновения ЭДС. Часто, решая задачи, мы не задумываемся над природой данного явления, что, впрочем, не мешает получать правильный ответ.

В этой части статьи рассмотрим случаи, когда сторонней силой является сила Лоренца. Рассмотрим пример, иллюстрирующий возникновение такого механизма.

Пусть прямой проводник движется в магнитном поле со скоростью $\vec{V}_1$ в лабораторной СО. В СО, связанной с проводником, свободные заряды проводника, под действием магнитного поля движутся вдоль проводника со скоростью $\vec{V}_2$. В ЛСО скорость этих зарядов $\vec{V}$ будет равна векторной сумме $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$, и направлена под некоторым (не прямым) углом к проводнику. Сила Ло-

ренца, действующая на заряженную частицу, направлена перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\vec{B}$ и $\vec{V}$ (см. рис. 1) и ее можно представить как векторную сумму двух сил: $\vec{F}_{L\parallel}$ и $\vec{F}_{L\perp}$.

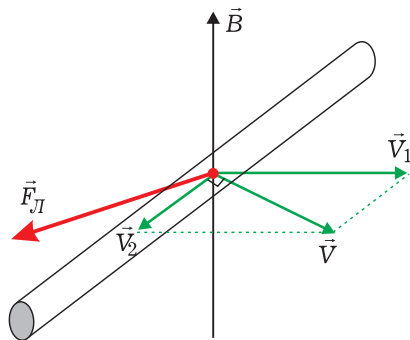


Рис. 1а

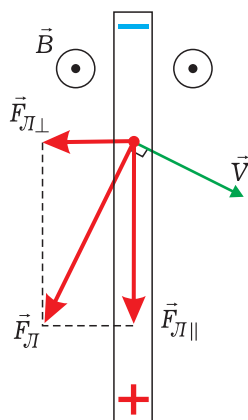


Рис. 1б

$\vec{F}_{L\perp}$ – поперечная проводнику составляющая силы Лоренца, которая при движении проводника совершает отрицательную работу. Если суммировать «поперечные силы Лоренца» по всем свободным зарядам, то мы получим *силу Ампера*, действующую на проводник.

$\vec{F}_{L\parallel}$ – продольная составляющая силы Лоренца – совершает положи-

тельную работу. Это и есть *сторонняя сила*, которая заставляет заряды двигаться по проводнику. В движущемся проводнике эта сила разделяет положительные и отрицательные заряды, направляя их в противоположные концы проводника, создавая тем самым разность потенциалов между ними. Если замкнуть концы движущегося проводника, то есть *создать контур*, то по этому контуру потечет ток, а сам движущийся проводник становится источником ЭДС. Эта ЭДС будет равна:

$$E = \frac{A_{\parallel}}{q} = \frac{F_L \cos \alpha \cdot L}{q} = \frac{qVBL \cos \alpha}{q} = BV_1 L \quad (\text{III})$$

где α - угол между $\vec{F}_L$ и проводником, L - длина проводника.

Отметим также следующие факты:

1) каждая составляющая силы Лоренца совершает работу, но работа самой силы Лоренца равна нулю, т. к. она направлена перпендикулярно скорости. Поэтому: $A_{\parallel} + A_{\perp} = 0$.

2) источником энергии, благодаря которому в контуре возникает ток, является внешняя сила, приложенная к проводнику. При равномерном движении проводника эта сила должна быть равна силе Ампера, действующей на проводник и работа этой силы равна работе тока, текущего по контуру.

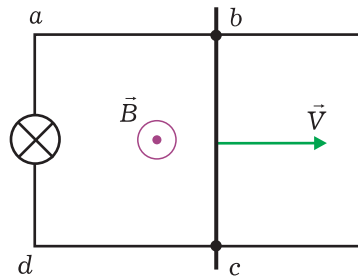
3) Формулу (3) можно получить из (1), не вдаваясь в детали о происхождении сторонних сил (задача 1).

Рассмотрим несколько задач.

Задача 1.

Плоскость прямоугольной проводочной рамки $abcd$ перпендику-

лярна однородному магнитному полю, индукция которого равна $B = 0,1$ Тл. Сторона рамки bc длиной $L = 1$ м может скользить без нарушения контакта с постоянной скоростью $V = 10$ м/с по сторонам ab и bc . Между точками a и d включена лампочка сопротивлением $R = 5$ Ом. Какую силу необходимо приложить к стороне bc для осуществления такого движения? Сопротивление остальной части рамки пренебрежимо мало.



Решение.

В проводнике bc при движении в магнитном поле возникает ЭДС, разделяющая заряды внутри проводника. Сторонней силой в данном случае является сила Лоренца. Движущийся проводник тогда представляет собой батарейку с ЭДС равной (в соответствии с формулой (III):

$$E = BVL. \quad (1)$$

Ток, возникающий в рамке равен:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{BVL}{R}. \quad (2)$$

Направление тока указано на рисунке 2 – через лампочку, т. е. на внешнем участке $badc$ ток течет под действием электрического поля от «плюса» к «минусу», а по проводнику bc ток течет, как и любой батарейке, от «минуса» к «плюсу» под действием сторонней силы Лоренца.

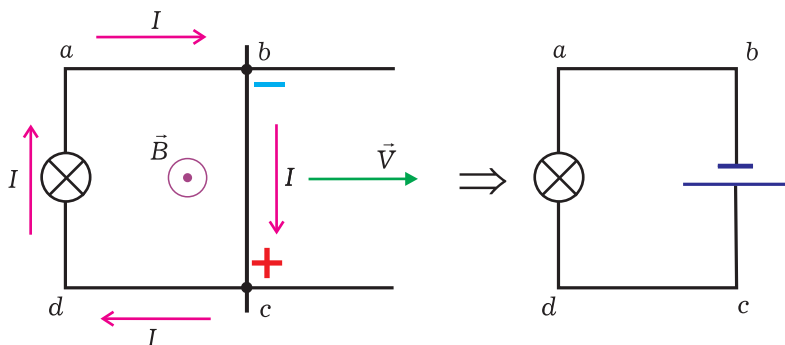


Рис. 2

Сила Ампера, действующая на проводник bc равна

$$F_A = BIL \quad (3)$$

и направлена влево. Так как проводник движется равномерно, то внешняя сила, приложенная к нему равна силе Ампера и направлена противоположно ей. Таким образом, с учетом (1) – (3) получаем:

$$F = BIL = \frac{B^2 L^2 V}{R}.$$

Мощность, развиваемая этой силой равна:

$$N = FV = \frac{B^2 L^2 V^2}{R}.$$

Заметим, что эта мощность равна мощности тока, выделяющейся на лампе. В этом нетрудно убедиться подставив (2) в выражение для мощности тока $P = I^2 R$. Т. е источником энергии для лампочки является «тот, кто прикладывает силу к проводнику bc ».

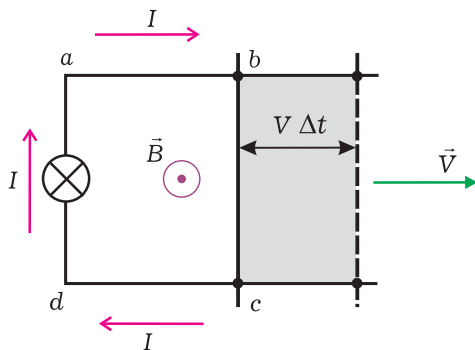
Тот же результат можно получить из закона электромагнитной индукции (I), не вдаваясь в детали происхождения ЭДС.

Если за время Δt проводник bc переместился на расстояние равное $V\Delta t$, то значит, за это время площадь контура увеличилась на

$\Delta S = VL\Delta t$. Это и привело к изменению магнитного потока сквозь контур. ЭДС индукции равна:

$$E = \frac{BVL\Delta t}{\Delta t} = BVL.$$

Направление же тока определяется по правилу Ленца – так как магнитный поток увеличивается, то магнитное поле индукционного тока должно быть направлено против внешнего поля – «от наблюдателя». По правилу правого винта индукционный ток должен быть направлен по часовой стрелке.



То есть мы получили для ЭДС индукции то же выражение, которое дает выражение (III).

Окончательно получаем:

$$N = \frac{B^2 L^2 V^2}{R} = 0,2 Bm.$$

Таким образом, два разных подхода к решению приводят к одному результату.

Ответ: 0,02 Н.

Задача 2.

Прямоугольная рамка, площадь которой S , помещена в магнитное поле индукции B , причём в начальный момент времени плоскость рамки перпендикулярна линиям поля.

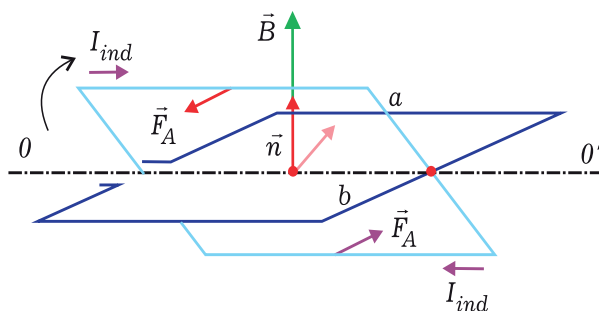


Рис. 3а

Эту задачу решим на основе закона электромагнитной индукции (I).

Рассмотрим рамку в произвольный момент времени t . В этот момент угол между векторами $\vec{B}$ и $\vec{n}$ (нормалью к плоскости рамки) равен: $\alpha = \omega t$. Зависимость магнитного потока от времени:

$$\Phi(t) = BS \cos \omega t$$

По закону электромагнитной индукции – ЭДС, возникающая в рамке, равна производной от магнитного потока по времени:

$$E_{ind}(t) = -\Phi' = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t$$

Индукционный ток, в соответствии с законом Ома:

Рамка вращается с угловой скоростью ω .

а) Постройте график зависимости тока, текущего в рамке, от времени. Сопротивление рамки R .

б) Как зависит от времени момент сил, необходимый для поддержания постоянной скорости вращения рамки?

Решение.

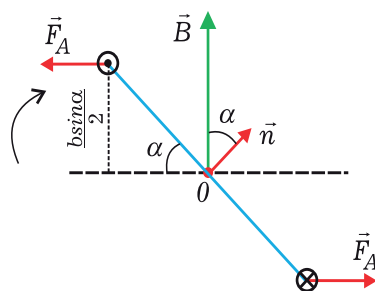


Рис. 3б

$$I_{ind}(t) = \frac{E_{ind}}{R} = \frac{BS\omega}{R} \sin \omega t. \quad (1)$$

График зависимости тока от времени изображен на рисунке 4. Вращающаяся в магнитном поле рамка является источником переменного (синусоидального) тока с амплитудой

$$I_{\max} = \frac{BS\omega}{R}.$$

При вращении рамки на ее стороны со стороны магнитного поля действуют силы Ампера. Но вращающий момент создают только те силы Ампера, которые действуют на стороны длины a (через которые не проходит ось вращения). На каждую сторону a действует сила

$$F_A(t) = BI(t)a \sin 90^\circ \quad (2)$$

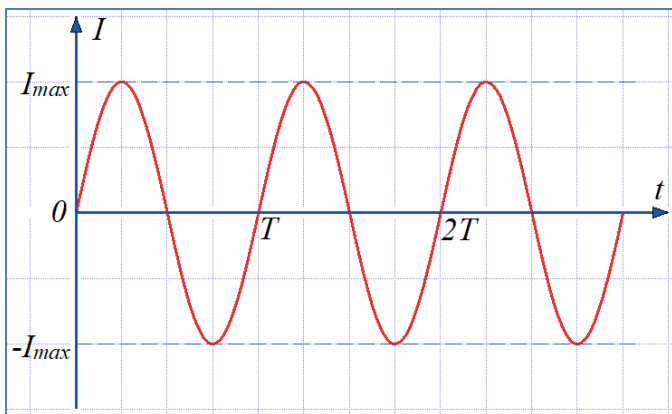


Рис. 4

Момент этих сил равен:

$$M_A(t) = 2F_A \frac{b}{2} \sin(\omega t). \quad (3)$$

Здесь b – сторона рамки через которую проходит ось вращения, $\frac{b}{2} \sin(\omega t)$ – плечо силы Ампера. Из уравнений (1) – (3) получаем:

$$M_A(t) = \frac{B^2 S^2 \omega}{R} \sin^2(\omega t).$$

Чтобы рамка вращалась с постоянной угловой скоростью нужно к ней приложить момент силы равный моменту силы Ампера.

Ответ: 1) см. формулу (1), см. рисунок 4;

$$2) M(t) = \frac{B^2 S^2 \omega}{R} \sin^2(\omega t)$$

Задача 3. (ЕГЭ 2014)

Квадратную рамку из медной проволоки со стороной $b = 5$ см перемещают вдоль оси Ox вдоль горизонтальной плоскости с постоянной скоростью $v = 1$ м/с. Начальное положение рамки изображено на рис. 5. За время движения рамка успевает полностью пройти между полюсами магнита. Чему равно сопротивление

провода рамки, если суммарная работа внешней силы, приложенной к рамке, за время движения $A = 2,5 \cdot 10^{-3}$ Дж? Ширина полюсов магнита $d = 20$ см, магнитное поле имеет резкую границу, однородно между полюсами, а его индукция $B = 1$ Тл.

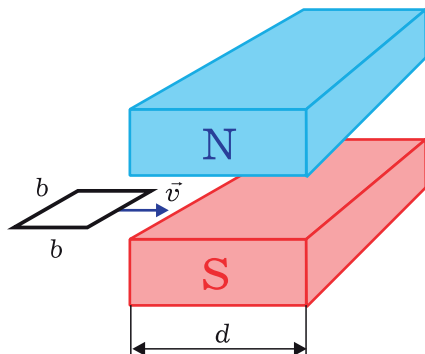


Рис. 5

Решение.

Решим эту задачу на основе закона электромагнитной индукции.

Все самое интересное происходит в процессе вхождения рамки в магнитное и в процессе выхода из него. Рассмотрим эти процессы.

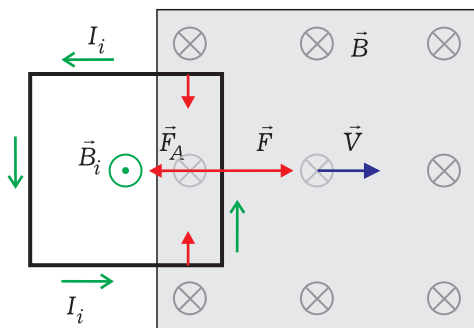


Рис. 6а

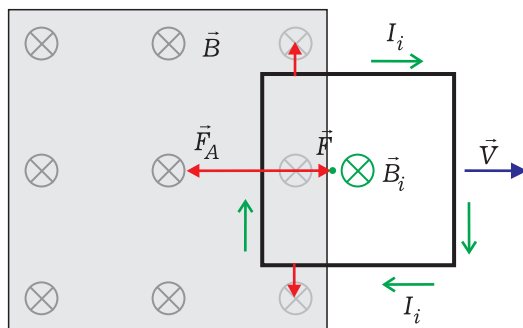


Рис. 6б

При вхождении рамки в область магнитного поля (см. рис 6а) магнитный поток через рамку увеличивается. В соответствии с законом электромагнитной индукции в рамке (а она представляет собой замкнутый контур) возникает ЭДС индукции и течет индукционный ток I_i . По *правилу Ленца* магнитное поле этого тока B_i направлено так, чтобы компенсировать увеличение магнитного потока сквозь рамку, т. е. против внешнего магнитного поля (на рисунке вектор B_i направлен «на нас»). Чтобы создать такое поле, индукционный ток (по *правилу «правого винта»*) должен течь по рамке против часовой стрелки. При этом на переднюю сторону рамки действует сила Ампера, которая (по *правилу «левой руки»*) направлена против скорости и оказывает тормозящее действие на рамку. Чтобы поддерживать равномерное движение рамки к ней нужно приложить внешнюю силу F , которая и совершает работу.

При вхождении рамки в магнитное поле, магнитный поток изменяется за счет увеличения той части площади рамки, которая пронизывается магнитным полем. За

интервал времени Δt , рамка, двигаясь с постоянной скоростью v , переместится на расстояние $v\Delta t$, а площадь рамки, пронизываемая магнитным полем, увеличится на $\Delta S = bv\Delta t$. Таким образом, величина ЭДС, возникающей в рамке равна:

$$E = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = \frac{B\Delta S \cos 0}{\Delta t} = Bbv. \quad (1)$$

Индукционный ток определяется законом Ома:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{Bbv}{R}. \quad (2)$$

Сила Ампера, действующая на переднюю часть рамки:

$$F_A = BIlb = \frac{B^2 b^2 v}{R}. \quad (3)$$

Надо отметить, что на параллельные движению стороны рамки тоже действуют силы Ампера (на рис показаны маленькими красными стрелками), но их сумма равна нулю и они не влияют на движение тела.

Сила F , которая двигает рамку вперед, равна силе Ампера и совершает работу:

$$A = Fb = \frac{B^2 b^3 v}{R}.$$

Когда рамка полностью вошла в поле, магнитный поток перестает

изменяться, ток прекращается, и сила Ампера исчезает. Рамка движется по инерции со скоростью пока не начнет выходить из магнитного поля (см. рис. 6б) и тут вся история повторяется: возникает индукционный ток, сила Ампера и к рамке снова надо прикладывать силу, чтобы она продолжила равномерное движение. На этом этапе внешняя сила совершит такую же работу как и при вхождении в поле. Таким образом, полная работа, необходимая для того чтобы протащить рамку через пространство между полюсами равна:

$$A_{\text{полн}} = \frac{2B^2b^3v}{R}. \quad (4)$$

Из последней формулы находим сопротивление рамки:

$$R = \frac{2B^2b^3v}{A_{\text{полн}}}.$$

Зададимся вопросом: а на что пошла работа, совершаемая внешней силой? Если рамка двигалась с постоянной скоростью, то ее механическая энергия не изменилась и тогда, по закону сохранения энергии, работа превратилась в тепло:

$$A = Q = \frac{2B^2b^3v}{R}.$$

Это тепло и выделилось в рамке при прохождении по ней тока. Этот же результат можно получить также и из закона Джоуля – Ленца:

$$Q = 2I^2R = 2\left(\frac{Bbv}{R}\right)^2 R = \frac{2B^2b^3v}{R}.$$

Решение и этой задачи можно было бы провести на основе уравнения (III).

При вхождении рамки в область магнитного поля – ЭДС возникает на передней стороне рамки. Когда рамка полностью находится в поле –

ЭДС возникают и на передней и на задней сторонах рамки. Причем, будучи одинаковыми по величине, они включены противоположно, и в итоге ток в рамке равен нулю. Ну а когда рамка покидает поле – ЭДС остается только на задней стороне рамки. Предлагаем читателю самостоятельно сделать расчеты и убедиться, что и этот способ решения приведет к выражению (4).

Задача 4.

Проволочная квадратная рамка массой m падает, оставаясь вертикальной в неоднородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости рамки (см. рис. 7). Через некоторое время скорость рамки перестает изменяться. Определите установившуюся скорость $V_{\text{уст}}$, если известно, что индукция магнитного поля нарастает по линейному закону:

$$B(y) = B_0 + ky,$$

где k – постоянный коэффициент, а координатная ось OY направлена вертикально вниз. Сопротивление проволоки, из которой изготовлена рамка равно R , сторона рамки равна b .

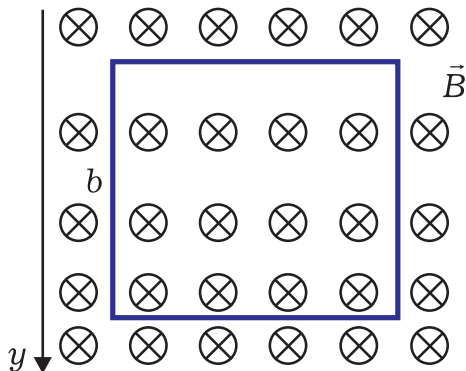


Рис. 7

Решение.

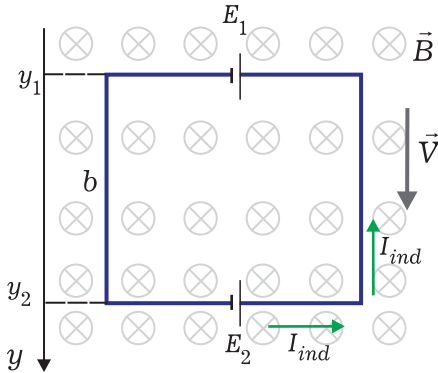


Рис. 8а

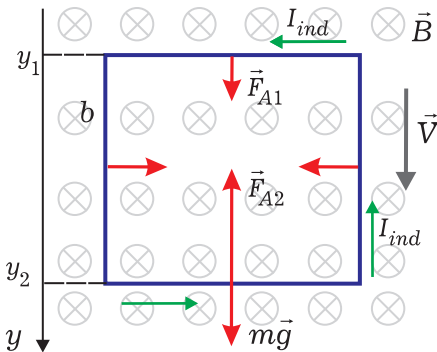


Рис. 8б

При движении рамки в магнитном поле в ней возникает ЭДС индукции. Эта ЭДС является суммой ЭДС, возникающих в верхней и нижней сторонах рамки. Рассчитаем их как ЭДС, возникающие на концах движущегося в магнитном поле проводника. В верхней стороне рамки возникает ЭДС равная:

$$E_1 = B_1 Vb = (B_0 + ky_1) Vb,$$

в нижней:

$$E_2 = B_2 Vb = (B_0 + ky_2) Vb$$

На рис.8а символически изображены эти ЭДС в соответствие с тем, как сторонняя сила (в данном случае, сила Лоренца) распределяет

заряды в проводниках. Эти ЭДС включены «навстречу друг другу», поэтому величина эквивалентной ЭДС равна:

$$E = E_2 - E_1 = kVb(y_2 - y_1) = kVb^2.$$

(Если бы рамка падала в однородном магнитном поле, то ЭДС в верхней и нижней сторонах были бы одинаковыми, и эквивалентная ЭДС была бы равна нулю).

Значение этой ЭДС можно получить непосредственно из закона электромагнитной индукции. Магнитное поле неоднородно – чем ниже, тем поле больше – при движении рамки вниз площадь рамки пересекает все больше линий магнитного поля и магнитный поток увеличивается:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta B}{\Delta t} S \cdot \cos 0 = \\ &= \frac{k(y_2 - y_1)b^2}{\Delta t} = kVb^2. \end{aligned}$$

Индукционный ток направлен против часовой стрелки. Это следует и из того что «нижняя» ЭДС E_2 больше «верхней» E_1 и в соответствии с правилом Ленца. Величина этого тока:

$$I_{ind} = \frac{kVb^2}{R}.$$

Рассмотрим рамку в некоторый момент времени, когда движение рамки установилось и ее скорость постоянна и равна V . На рамку действуют: сила тяжести и силы Ампера – на каждую из сторон рамки. Направления векторов сил Ампера действующих на каждую сторону рамки изображены на рис.8б. Скорость рамки становится постоянной, когда сумма всех сил равна нулю:

$$F_{A1} + mg = F_{A2},$$



где $F_{A1} = B_1 I_{ind} b = (B_0 + k y_1) \frac{k V b^3}{R},$

$$F_{A2} = B_2 I_{ind} b = (B_0 + k y_2) \frac{k V b^3}{R}.$$

Из последних трех уравнений получаем для скорости рамки:

$$V = \frac{mgR}{k^2 b^4}.$$

Ответ: $V = \frac{mgR}{k^2 b^4}.$



Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

На одном из выступлений Альберта Эйнштейна одна женщина, чтобы показать подругам свою образованность, решила задать ему вопрос:

— Вы не могли бы мне объяснить связь между временем и вечностью?

Эйнштейн: — Видите ли, если бы у меня хватило времени, чтобы вам это объяснить, вам бы понадобилась вечность, чтобы это понять.

В раю Архимед, Паскаль и Ньютон играют в прятки. Архимед водит и начинает считать. Паскаль убегает за горизонт, а Ньютон оглядывается, берёт палку, рисует вокруг себя квадрат со стороной 1 метр и становится внутрь квадрата. Архимед заканчивает считать, открывает глаза и видит Ньютона:

— Я вижу Ньютона

— Э, нет! Ньютон на метр квадратный — это Паскаль!

На конечной станции кондуктор осматривает вагоны и в одном видит на лавочке заснувшего студента, а рядом лежит книжка Ландау «Теория поля».

Кондуктор будит студента:

— Ну вставай, агроном, приехали!

Учительница:

— Вовочка, кто такой был Архимед?

— Ну... это был ученый... как-то раз он мылся в ванне и закричал: "Эврика!"

— И что означает "эврика"?

— Ну... это означает "нашел".

— И что же он нашел?

— Не знаю... Мыло, наверное.