Мукушев Базарбек Агзашулы
*Доктор педагогических наук,
профессор кафедры физики
Государственного университета
им. Шакарима г. Семей,
обладатель государственного гранта Республики
Казахстан «Лучший преподаватель вуза-2012».*

Экспоненциальные зависимости в физике

Статья посвящена раскрытию физической сущности экспоненциальных зависимостей, где число e занимает центральное место. В ней представлены примеры из различных разделов физики, объединяющим фактором которых является экспоненциальный характер математического описания физических процессов.

Введение

Наверно, любой абитуриент или старшеклассник на вопрос, что такое число e, ответит: e – основание натуральных логарифмов. Если попросить определить это число более строго и вычислить его, он может привести следующие формулы:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

или

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots = 2{,}71828\ldots,$$

где $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$.

Всё это так, но, как известно, число e входит во множество формул и уравнений в математике, физике, химии, биологии, также в экологии и экономике. Число e сугубо междисциплинарное число, встречающееся в математических уравнениях, описывающих различные грани живого и неживого мира.

Что такое экспоненциальная зависимость?

В прикладной математике часто встречаются задачи, где *скорость изменения* некоторой величины пропорциональна уже достигнутому значению самой этой *величины*. Примером может служить прирост финансового состояния какого-либо банка: когда мы говорим, что прирост актива банка составляет, скажем, 10% в год, то тем самым утверждаем, что скорость этого прироста пропорциональна текущему объёму актива банка. В этом примере скорость изменения положительна. Можно привести пример и с отрицательной скоростью. Рассмотрим динамику изменения числа бактерий колонии в условиях вымирания (при нехватке кормов, при плохом температурном режиме и др.). Экспериментально установлено, что среднее количество бактерий, вымирающих за малый промежуток времени, пропорционально количеству имеющихся живых бактерий.

Обозначим через $y(t)$ значение рассматриваемой величины в момент времени t. Через Δy мы обозначим изменение величины y за малый промежуток Δt от t до $t + \Delta t$, то есть

$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t).$$

Скорость изменения величины y можно приближённо представить отношением $\frac{\Delta y}{\Delta t}$. Если для величины y скорость её изменения в момент времени t пропорциональна достигнутому значению $y(t)$ этой величины, то мы приходим к соотношению

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx ky,$$

где k – коэффициент пропорциональности. Этот коэффициент может быть как положительным числом (например, в процессе прироста актива банка), так и отрицательным (например, в процессе вымирании бактерий).

При $\Delta t \to 0$ это соотношение можно писать в таком виде:

$$\frac{dy}{dt} = ky.$$

Последнее уравнение называется дифференциальным уравнением первого порядка. С ним школьники старших классов знакомы из курса математики. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(t) = y(0)e^{kt}, \qquad (1)$$

где $y(0)$ называется начальным условием, т. е. это значение величины y в момент времени $t = 0$, e – основание натуральных логарифмов.

Функции зависимости от некоторых величин, содержащие число e, называют экспонентами. Формулу (1) в большинстве случаев пишут так:

$$y(t) = y(0)\exp(kt).$$

Экспоненциальные зависимости, связанные со скоростью изменения физических величин

Следующие примеры относятся к изучению экспоненциальных зависимостей, в которых центральное место занимает ситуация, когда скорость изменения некоторой физической величины пропорциональна самой этой величине.

Задача 1. Катер массой m движется по озеру со скоростью v_0. В момент $t = 0$ выключили его двигатель. Считая силу сопротивления воды движению катера пропорциональной его скорости $F = -rv$, найти скорость катера в зависимости от времени.

Решение. После выключения двигателя катер движется только под действием силы сопротивления воды. Поэтому уравнение движения катера в скалярном виде:

$$-rv = ma, \quad -rv = m\frac{dv}{dt},$$

$$\text{или } \frac{dv}{dt} = -\left(\frac{r}{m}\right)v.$$

Последнее выражение называется дифференциальным уравнением первого порядка.

Значит, убывание скорости катера прямо пропорционально самой скорости катера.

Дифференциальное уравнение напишем в такой форме:

$$\frac{dv}{v} = -\left(\frac{r}{m}\right)dt.$$

Интегрируя это выражение

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\int_{0}^{t}\left(\frac{r}{m}\right)dt,$$

получим

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\left(\frac{r}{m}\right)t,$$

откуда

$$v = v_0 e^{-\frac{rt}{m}}.$$

Задача 2. Найти закон изменения массы ракеты со временем, если ракета движется в отсутствие внешних сил с постоянным ускорением a, скорость истечения газа относительно ракеты постоянна и равна u, а её масса в начальный момент равна m_0.

Решение. Обозначим через m массу ракеты с топливом, v скорость её в момент времени t. Импульс системы тел «ракета – выхлопные газы» остаётся неизменным, поскольку на эту систему не действуют внешние силы. Пусть $P_1 = mv$ – её импульс в момент времени t до отделения массы выхлопного газа dm, а в последующий момент времени $t + \Delta t$ после отделения dm:

$$P_2 = (m - dm)(v + dv) - dm(u - v).$$

Так как $P_1 = P_2$, запишем:

$$mv = (m - dm)(v + dv) - dm(u - v).$$

Откуда

$$dm = -\frac{dv}{u - dv}m.$$

Поскольку $u >> dv$, $dv = adt$, напишем:

$$dm = -\frac{1}{u}madt.$$

Скорость убывания массы выражается в таком виде:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{a}{u}m,$$

или

$$\frac{dm}{m} = -\frac{a}{u}dt.$$

Проинтегрировав

$$\int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = -\int_{0}^{t} \frac{a}{u}dt,$$

получим:

$$m = m_0 e^{-\frac{a}{u}t}.$$

Задача 3. Найти давление воздуха в откачиваемом сосуде как функцию времени откачки t. Объём сосуда V, первоначальное давление p_0. Процесс считать изотермическим и скорость откачки не зависящей от давления и равной C.

Примечание. Скоростью откачки называют объём газа, откачиваемый за единицу времени, причём этот объём измеряется при давлении газа в данный момент.

Решение. За время dt объём откачки газа равен $dV = Cdt$.

Поскольку процесс изотермический, напишем:

$$pV = \text{const},$$

откуда

$$d(pV) = Vdp + pdV = 0,$$

или

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dV}{V}.$$

Следовательно,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{C}{V}dt, \text{ или}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{C}{V}p.$$

Проинтегрировав

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p}=-\int_0^t\frac{C}{V}dt,$$

найдём уравнение давления газа в зависимости от времени:

$$p=p_0e^{-\frac{C}{V}t}.$$

Задача 4. Радиусы обкладок сферического конденсатора равны a и b, причём $a<b$. Пространство между обкладками заполнено однородным веществом с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением ρ. Первоначально конденсатор не заряжен. В момент $t=0$ внутренней обкладке сообщили заряд q_0. Найти закон изменения во времени заряда на внутренней обкладке.

Решение. Вначале вычислим сопротивление между обкладками. Рассмотрим сферический слой среды между электродами, находящийся на расстоянии r и имеющий толщину dr. Поскольку ток через среду течёт (в силу симметрии) перпендикулярно этому слою, его можно рассматривать как проводник с длиной dr и площадью поперечного сечения $4\pi r^2$. Сопротивление такого проводника найдём путём интегрирования по r от a до b:

$$R=\int_a^b\frac{\rho dr}{4\pi r^2}=\frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

Запишем формулу ёмкости сферического конденсатора:

$$C=4\pi\varepsilon\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}.$$

Известно, что

$$dq=-Idt,\quad I=\frac{U}{R},\quad U=\frac{q}{C}.$$

Отсюда

$$dq=-\frac{q}{CR}dt,$$

или

$$\frac{dq}{dt}=-\frac{1}{CR}q$$

(скорость убывания количества заряда на конденсаторе). Перепишем:

$$\frac{dq}{q}=-\frac{dt}{CR}.$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\int_{q_1}^{q_2}\frac{dq}{q}=\int_0^t\frac{dt}{CR},$$

где

$$CR=\varepsilon\varepsilon_0\rho.$$

Получим закон изменения во времени заряда на внутренней обкладке конденсатора:

$$q=q_0e^{-\frac{t}{\varepsilon\varepsilon_0\rho}}.$$

Задача 5. По двум гладким медным шинам, установленным под углом α к горизонту, из состояния покоя скользит под действием силы тяжести медная перемычка массой m (рис. 1). Вверху шины замкнуты на сопротивление R. Расстояние между шинами l. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, перпендикулярной к плоскости, в которой перемещается перемычка. Сопротивления шин, перемычки и скользящих контактов, а также самоиндукция контура пренебрежимо малы. Найдите зависимость скорости перемычки от времени.

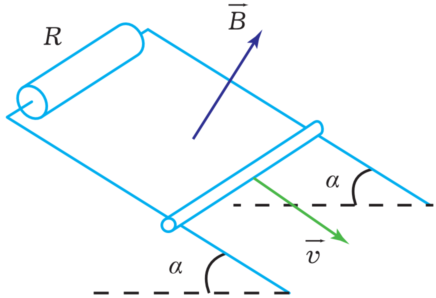

Рис. 1

Решение.

$$\mathcal{E}_i=-\frac{d\Phi}{dt}=-B\frac{dS}{dt}=-Blv.$$

Из закона Ома

$$I = \frac{|\mathscr{E}_i|}{R} = \frac{Blv}{R}.$$

Запишем второй закон Ньютона для движения перемычки:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_A,$$

где $F_A = IBl$ – сила Ампера. Или в скалярной форме:

$$m\frac{dv}{dt} = mg\text{sin}\alpha - IBl = mg\text{sin}\alpha - \frac{B^2l^2v}{R}.$$

Последнее уравнение напишем в следующей форме дифференциального уравнения:

$$\frac{dv}{dt} = \gamma\left(\frac{g\ \sin\alpha}{\gamma} - v\right),$$

где $\gamma = \dfrac{B^2l^2}{mR}$.

Это уравнение запишем так:

$$\frac{d\left(\frac{g\sin\alpha}{\gamma} - v\right)}{\frac{g\sin\alpha}{\gamma} - v} = -\ \gamma dt.$$

Проинтегрируем:

$$\int_0^v \frac{d(\frac{g\sin\alpha}{\gamma} - v)}{\frac{g\sin\alpha}{\gamma} - v} = -\int_0^t \gamma dt$$

и получим следующее уравнение:

$$\ln\frac{\frac{g\sin\alpha}{\gamma} - v}{\frac{g\sin\alpha}{\gamma}} = -\ \gamma t.$$

Отсюда

$$v(t) = g\frac{mR\sin\alpha}{B^2l^2}\left(1 - e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\right).$$

При $t \to \infty$ установившаяся скорость перемычки будет равна

$$v = g\frac{mR\sin\alpha}{B^2l^2}.$$

Задача 6. Найти закон радиоактивного распада как функцию времени t. В начальный момент ($t = 0$) мы имели N_0 радиоактивных атомов. Из эксперимента известно, что среднее число атомов, распадающихся за малый промежуток времени, пропорционально количеству имеющихся атомов.

Решение. Из условия задачи мы можем написать следующее уравнение:

$$-\frac{\Delta N}{\Delta t} = kN.$$

Знак минус перед скоростью распада означает что идёт убыль численности нераспавшихся атомов.

Поскольку $\Delta t \to 0$, последнее выражение напишем в форме дифференциального уравнения:

$$\frac{dN}{N} = -\ kdt.$$

Отсюда найдём закон радиоактивного распада:

$$N = N_0e^{-kt}.$$

Если использовать понятие периода полураспада T, то этот закон примет вид:

$$N = N_0e^{-\frac{\ln 2}{T}t}.$$

Экспоненциальные зависимости, характеризующие взаимосвязь между физическими величинами

При решении некоторых задач, где отсутствует скорость изменения физических величин, можно иметь дело с экспоненциальными зависимостями.

Задача 7. Точка движется, замедляясь, по окружности радиуса R так, что в каждый момент времени её тангенциальное и нормальное ускорения по модулю равны друг другу. В начальный момент $t = 0$ скорость точки равна v_0. Найти скорость точки и её полное ускорение в зависимости от пройденного пути.

Решение.

$$a_t = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Так как $a_t = a_n$ и точка замедляется, то

$$-\frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{R},$$

отсюда

$$v^2 dt = -R dv.$$

Проинтегрируем

$$\int_0^t dt = -R\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2}$$

и найдём $t = R\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right)$,

отсюда

$$v = \frac{v_0 R}{R + tv_0}. \qquad (2)$$

С другой стороны:

$$v = \frac{dS}{dt}.$$

Значит

$$\frac{v_0 R}{R + tv_0} = \frac{dS}{dt}.$$

Отсюда

$$v_0 R dt = (R + tv_0) dS, \text{ или}$$

$$\frac{v_0 R}{R + tv_0} dt = dS.$$

Проинтегрируем

$$\int_0^t \frac{v_0 R}{R + tv_0} dt = \int_0^s dS.$$

Получим следующее выражение

$$\ln \frac{R + tv_0}{R} = \frac{S}{R}, \text{ или}$$

$$t = \frac{R(e^{-\frac{S}{R}} - 1)}{v_0}.$$

Это выражение подставим в (2) и получим:

$$v = v_0 e^{-\frac{S}{R}}. \qquad (3)$$

Полное ускорение вычисляется по формуле

$$a_{пол} = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

По условию задачи

$$a_n = a_t, \quad a_{пол} = \sqrt{2} a_n = \frac{v^2}{R}\sqrt{2}. \quad (4)$$

Подставим (3) в (4) и получим:

$$a_{пол} = \sqrt{2}\,\frac{v_0^2}{R} e^{-\frac{2S}{R}}.$$

Задача 8. На неподвижный цилиндр намотана нить N раз. Один конец нити тянут с силой T_0. Коэффициент трения между нитью и поверхностью цилиндра равен μ. Определить силу натяжения второго конца нити (T), если известно, что это максимальная сила, при которой ещё отсутствует проскальзывание.

Решение. Обозначим угол касания нити с цилиндром через α. Следовательно, $\alpha = 2\pi N$.

Рассмотрим малый элемент нити, прилегающий к цилиндру (рис. 2).

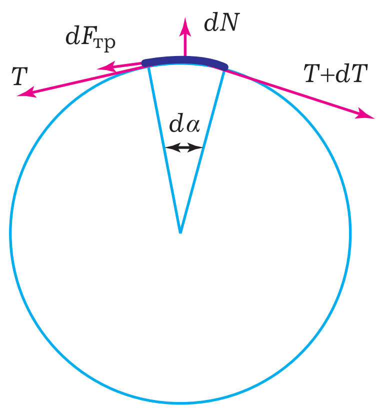

Рис. 2

Очевидно, $dT = dF_{тр} = \mu dN$, а $dN = T d\alpha$. Отсюда

$$\frac{dT}{T} = k d\alpha.$$

Нам нужно проинтегрировать последнее выражение. Для левой части уравнения отрезок интегрирования лежит между значениями T_0 и T, а для правой части – между значениями 0 и α.

$$\int_{T_0}^{T}\frac{dT}{T}=\int_0^{\alpha}kd\alpha,$$

или

$$\ln\frac{T}{T_0}=k\alpha.$$

Следовательно,

$$T=T_0e^{k\alpha}=T_0e^{k2\pi N}.$$

Задача 9. Идельный газ с массой m и молярной массой M расширяется изотермически. Температура газа T и его начальный объём V_0. Нужно найти закон изменения объёма газа в зависимости от совершённой газом работы.

Решение. При малом изменении объёма элементарная работа газа вычисляется по формуле

$$\delta A=pdV.$$

Выразив давление по формуле Менделеева – Клапейрона, получим:

$$\delta A=\frac{mRT}{MV}dV.$$

Работа газа при расширении от V_0 до V равна:

$$A=\frac{mRT}{M}\int_{V_0}^{V}\frac{dV}{V}=\frac{mRT}{M}\ln\frac{V}{V_0}.$$

Отсюда

$$V=V_0e^{\frac{M}{mRT}A}.$$

Задача 10. Идеальный газ с молярной массой M находится в высоком вертикальном цилиндрическом сосуде, площадь основания которого S и высота H. Температура газа T, его давление на нижнее основание p_0. Считая, что температура и ускорение свободного падения g не зависят от высоты, найдите массу газа в сосуде.

Решение. Сначала получим формулу давления газа в зависимости от высоты. Известно, что давление газа на некой высоте определяется таким образом:

$$p=\frac{F}{S}=\frac{\rho ghS}{S}=\rho gh.$$

Возьмём произвольную цилиндрическую колонну газа с площадью сечения S и высотой h и выделим в ней тонкий слой газа высотой dh (рис. 3). Ясно, что такой слой вызывает изменение давления на величину dp:

$$dp=-\rho gdh.$$

Знак минус показывает, что с увеличением высоты давление уменьшается.

Рассматривая атмосферный воздух как идеальный газ, можно воспользоваться уравнением Менделеева – Клапейрона:

$$pV=\frac{m}{M}RT.$$

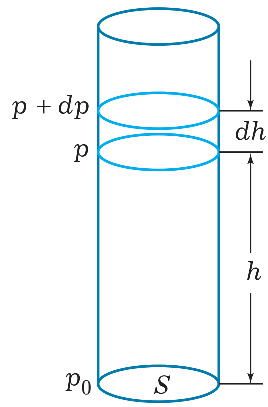

Рис. 3

Из этого уравнения находим плотность газа

$$\rho=\frac{Mp}{RT}.$$

Подставляя найденную плотность газа в уравнение, где мы нашли изменение давления, получаем:

$$\frac{dp}{p}=-\frac{Mg}{RT}dh.$$

Теперь необходимо проинтегрировать обе части нашего уравнения:

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p}=-\int_0^{H}\frac{Mg}{RT}dh,$$

откуда

$$p = p_0 e^{-\frac{MgH}{RT}}.$$

Сила, действующая на нижнюю часть сосуда:

$$F_\text{н} = p_0 S.$$

Сила, действующая на верхнюю часть сосуда:

$$F_\text{в} = pS.$$

Масса газа в сосуде равна

$$m = \frac{F_\text{н} - F_\text{в}}{g} = p_0 S \left(1 - e^{-\frac{MgH}{RT}}\right).$$

Ответ. $m = p_0 S \left(1 - e^{-\frac{MgH}{RT}}\right)$.

Задача 11. Двухпроводная телефонная лини протянута от населённого пункта A до населённого пункта B, расстояние между ними 10 км. Сопротивление одного метра проволоки равно r = 0,05 Ом. Из-за несовершенства изоляции сопротивление между проводами составляет $R = 10^7$ Ом на каждый метр линии. К концам линии в пункте A подключают источник с напряжением U = 100 В. Что покажет вольтметр, если его подключить а) к концам линии в пункте B? б) в середине линии?

Решение. Эту телефонную линию можно представить приблизительно как электрическую цепь, состоящую из множества одинаковых звеньев (рис 4).

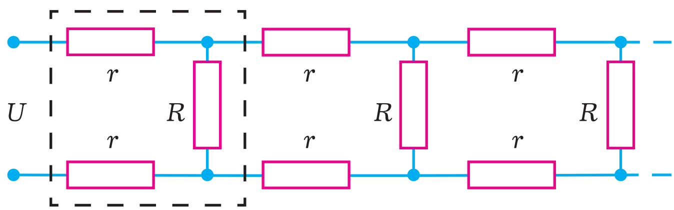

Рис. 4

Каждое звено представим в виде эквивалентной схемы из трёх резисторов. Если одно звено соответствует 1 м длины линии, то последовательные резисторы имеют сопротивление r = 0,05 Ом, а параллельный резистор – сопротивление $R = 10^7$ Ом. Ясно, что два резистора, подключённые последовательно, можно заменить одним, сопротивление которого равно $2r$ = 0,1 Ом.

Число звеньев такой цепочки очень велико. Будем считать эту цепочку бесконечной, а потом, получив решение, обсудим правомерность этого приближения.

Найдём сначала сопротивление $R_\text{общ}$ такой цепи. Для этого добавим ещё одно звено впереди цепочки. Очевидно, полное сопротивление такой удлинённой цепи (рис. 5) опять составит $R_\text{общ}$:

$$\frac{R \cdot R_\text{общ}}{R + R_\text{общ}} + 2r = R_\text{общ}.$$

Отсюда находим $R_\text{общ}$:

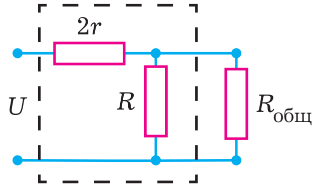

Рис. 5

$$R_{\text{общ}} = r + \sqrt{r^2 + 2rR} = 0,05 + \\ + \sqrt{(0,05)^2 + 10^6} \approx 10^3 \text{ Ом}.$$

Если ко входным зажимам схемы на рис. 5 подключить напряжение U, то после этого напряжение добавочного звена уменьшится на величину

$$\Delta U = 2rI = 2r\frac{U}{R_{\text{общ}}}.$$

Это означает, что после одной ячейки напряжение станет меньше в

$$N = \frac{U}{U - \Delta U} = \frac{1}{1 - \dfrac{2r}{R_{\text{общ}}}} \approx 1{,}0001 \text{ раз},$$

и каждая следующая ячейка уменьшает напряжение во столько же раз. Значит, после n ячеек напряжение на оставшейся части цепи будет равным

$$U_n = \frac{U}{N^n}.$$

При нашем разбиении число ячеек равно $n = 10^4$, значит, напряжение в пункте B составит

$$U_n = \frac{U}{N^n} = \frac{100}{(1 + 0{,}0001)^{10000}}.$$

Выражение, стоящее в знаменателе – это приближённое значение числа e.

Итак, напряжение в пункте B составляет

$$U_n = \frac{U}{e} \approx \frac{100}{2{,}718} \approx 36{,}79 \text{ В}.$$

Напряжение посередине линии

$$U_{n/2} = \frac{U}{\sqrt{e}} \approx 60{,}61 \text{ В}.$$

Упражнения

1. Ньютоном доказано, что при наличии разности температур между телом и окружающей средой теплоотдача тела за время Δt определяется формулой

$$\delta Q \approx k(T - T_c) \cdot \Delta t,$$

δQ – количество отдаваемой теплоты тела к окружающей среде за время Δt, T – температура тела, T_c – температура окружающей среды, коэффициент k зависит от величины поверхности и природы тела.

Пусть тело нагрето до температуры T_0; температуру окружающей среды считаем постоянной ($T_c < T_0$). Найти зависимость температуры T тела от времени охлаждения t.

Решение. При охлаждении тела количество отдаваемой теплоты выражается как $\delta Q = C\Delta T$. Тогда мы можем написать следующее уравнение:

$$C\Delta T = -\,k(T - T_c) \cdot \Delta t,$$

или

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} \approx -\frac{k}{C}(T - T_c).$$

Следовательно,

$$\frac{dT}{dt} \approx -\frac{k}{C}(T - T_c).$$

Знак минус выбран потому, что с возрастанием времени t температура T тела уменьшается.

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dT}{T - T_c} = -\frac{k}{C}t.$$

Отсюда

$$\ln(T - T_c) = -\frac{k}{C}t + \ln C.$$

Подставляя начальное условие $T_{t=0} = T_0$, найдём C:

$$C = T_0 - T_c.$$

Окончательно закон охлаждения тела в условиях постоянства температуры окружающей среды имеет вид:

$$T = T_c + (T_0 - T_c)e^{-\frac{k}{C}t}.$$

При условии $T_c = 0\ ^{o}C$ получим

$$T = T_0 e^{-\frac{k}{C}t}.$$

2. На рис. 6 представлена электрическая цепь, состоящая из катушки с индуктивностью L, сопротивлением R и источника тока $\mathcal{E}$. Найти закон изменения тока в зависимости от времени в цепи после включения ключа K.

Решение. Напишем закон Ома для полной цепи:

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_i = IR, \text{ или } \mathcal{E} - L\frac{dI}{Dt} = IR.$$

Отсюда

$$L\frac{dI}{dt} = \mathcal{E} - IR.$$

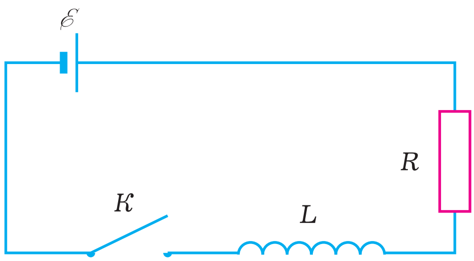

Рис. 6

Это дифференциальное уравнение напишем так:

$$L\frac{dI}{\mathcal{E} - IR} = dt \text{ или}$$

$$-\frac{L}{R}\frac{d(\mathcal{E} - IR)}{\mathcal{E} - IR} = dt.$$

Проинтегрировав последнее, получим

$$\ln\frac{\mathcal{E} - IR}{\mathcal{E}} = -\frac{R}{L}t.$$

Отсюда закон изменения тока в цепи от времени:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

3. Установить формулу, характеризующую динамику цепной ядерной реакции в зависимости от времени, если известны следующие параметры данной реакции: скорость развития цепной реакции зависит от коэффициента k размножения нейтронов и от среднего времени τ между двумя последовательными актами деления. Таким образом, коэффициент пропорциональности, характеризующий скорость прироста нейтронов, приблизительно равен

$$\frac{k-1}{\tau}.$$

Решение. Прирост числа нейтронов за единицу времени характеризуется следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(k-1)}{\tau}.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$N = N_0 e^{\frac{(k-1)}{\tau}t}.$$

4. Доказано, что параллельный пучок лучей (или частиц), проходя через слой вещества, уменьшает свою интенсивность. Если толщина слоя достаточно мала, то изменение интенсивности пучка пропорционально толщине слоя:

$$\Delta I \approx k_1 \Delta l.$$

А количество поглощённых квантов (или рассеянных частиц) пропорционально интенсивности пучка:

$$\Delta I = -k_2 I.$$

Коэффициенты k_1 и k_2 зависят от свойств поглощающей среды. Найти закон ослабления интенсивности излучения при прохождении через поглощающую среду.

Решение. Объединяя обе формулы, приведённые в условии задачи, получим:

$$\Delta I \approx -kI \cdot \Delta l.$$

Отсюда

$$I = I_0 e^{-kl}.$$