Федоренко Ирина Владимировна
Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей физики
Национального исследовательского университета
«МИЭТ».

Движение по окружности в заданиях ЕГЭ и олимпиадах по физике

В статье обсуждаются особенности равномерного и неравномерного движения по окружности. Рассмотрены задачи, предлагавшиеся в разные годы на Едином государственном экзамене, а также задачи олимпиад по физике.

...Круговое движение первичнее прямолинейного,
поскольку оно проще и более совершенно.
Аристотель «Физика»

Движение тела (материальной точки) по окружности является частным случаем криволинейного движения. В этом случае наряду с вектором перемещения $\Delta\vec{r}$ удобно рассматривать *угловое перемещение* $\Delta\varphi$ (или *угол поворота*), выражаемое в радианах (рис. 1). Длина дуги, пройденной телом, связана с углом поворота и радиусом окружности соотношением $\Delta l = R\Delta\varphi$. При малых углах поворота $\Delta l \approx \Delta r$. *Угловой скоростью* тела (выражается в рад/с) в данной точке круговой траектории называют предел отношения малого углового перемещения $\Delta\varphi$ к малому промежутку времени Δt (при $\Delta t \to 0$):

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \qquad (1)$$

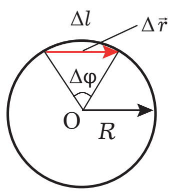

Рис.1

Линейная v и угловая ω скорости в любой момент времени связаны соотношением

$$v = \omega R. \qquad (2)$$

При равномерном движении тела по окружности модуль линейной скорости остаётся постоянным, но направление скорости всё время изменяется. Поэтому такое движение тела является движением с ускорением:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \qquad (3)$$

Ускорение направлено вдоль радиуса к центру окружности. Его называют *нормальным* или *центростремительным ускорением*. Модуль нормального ускорения

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R. \qquad (4)$$

В векторной форме нормальное ускорение может быть записано в виде

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}, \qquad (5)$$

где $\vec{R}$ – радиус-вектор материальной точки, проведенный в данную точку из центра окружности.

Если тело (материальная точка) движется по окружности неравномерно, то появляется также *касательная* (или *тангенциальная*) составляющая ускорения:

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}. \qquad (6)$$

Здесь $\Delta v = v_2 - v_1$ – изменение модуля скорости за промежуток времени Δt. Полное ускорение тела является векторной суммой двух взаимно перпендикулярных вкладов (рис. 2) – тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$, направленного по касательной к траектории, и нормального ускорения $\vec{a}_n$, направленного по нормали к траектории в сторону её вогнутости:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau.$$

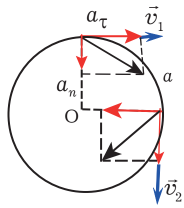

Рис. 2

Тангенциальное ускорение изменяет скорость только по модулю, нормальное ускорение изменяет её только по направлению.

В инерциальной системе отсчёта уравнением движения материальной точки является второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots. \qquad (7)$$

Пусть тело совершает *равномерное движение по окружности*, лежащей в плоскости *XOY* координатной системы. Из второго закона Ньютона следует, что при таком движении сумма сил, также как и ускорение, в любой момент времени направлена к центру окружности. Тогда, переходя в записи уравнения движения к скалярной форме, удобно записать проекции сил и ускорения не на оси *OX*, *OY* инерциальной системы отсчёта, а на подвижное направление – направление внутренней нормали, считая положительным направление к центру окружности. Это приводит к соотношению

$$ma_n = m\frac{v^2}{R} = F_{1n} + F_{2n} + \ldots. \qquad (8)$$

В рассматриваемом случае движение происходит в плоскости XOY. Тогда $a_z = 0$ и, следовательно, сумма проекций сил на направление OZ, перпендикулярное плоскости окружности, равна нулю:

$$0 = F_{1z} + F_{2z} + \ldots . \qquad (9)$$

Таким образом, для решения задач динамики равномерного движения материальной точки по окружности необходимо:

1) в инерциальной системе отсчёта привести «моментальную фотографию» движущегося тела и указать приложенные к нему силы и сообщаемое этими силами ускорение,

2) записать уравнения движения и решить полученную систему.

При *неравномерном движении по окружности* ($a_\tau \neq 0$) данных уравнений оказывается недостаточно для решения задачи. Проекция уравнения движения на направление, касательное к окружности,

$$m a_\tau = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = F_{1\tau} + F_{2\tau} + \ldots, \qquad (10)$$

(если не использовать аппарат высшей математики) не даёт существенной информации для решения задачи. Вместо последнего уравнения надо записать закон сохранения (или изменения) механической энергии.

Задача 1. (Олимпиада «Росатом», 2012) На часах 16:00. Через какое время после этого часовая и минутная стрелки часов встретятся во второй раз?

Решение. Поскольку минутная стрелка делает полный оборот за 60 минут, а часовая – за 12 часов, то угловые скорости минутной и часовой стрелок соответственно равны

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{60}\ \text{мин}^{-1},\ \omega_2 = \frac{2\pi}{12\cdot 60}\ \text{мин}^{-1}.$$

Очевидно, к моменту второй встречи часовой и минутной стрелок минутная стрелка повернётся на угол, больший угла поворота часовой стрелки на величину

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}.$$

Поэтому момент второй встречи стрелок определится из условия

$$(\omega_1 - \omega_2)t = \frac{8\pi}{3}.$$

Отсюда, учитывая числовые значения угловых скоростей, находим

$$t \approx 87{,}3\ \text{мин}.$$

Задача 2. (Олимпиада «Росатом», 2015) Фигуристы исполняют следующий элемент: фигуристка вращается с постоянной скоростью вокруг своей оси, фигурист также с постоянной скоростью совершает обороты вокруг партнёрши (в том же направлении). Известно, что фигурист сделал два полных оборота вокруг партнёрши за время t = 10 с, за это время фигуристка n = 9 раз повернулась лицом к своему партнёру, причем первый раз (из этих 9) фигуристка была повернута к нему лицом в самом начале элемента, последний – в конце. За какое время фигуристка совершает один оборот?

Решение. Введём обозначения: ω_1 – угловая скорость фигуриста, ω_2 – угловая скорость фигуристки ($\omega_2 > \omega_1$). Очевидно, что

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}, \qquad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}, \qquad (11)$$

где $T_1 = \dfrac{t}{2}$ – время полного оборота фигуриста, T_2 – время полного оборота фигуристки. В системе отсчёта, связанной с фигуристкой, её партнёр вращается с угловой скоростью $\omega_2-\omega_1$ в направлении, противоположном направлению вращения фигуристки. Следовательно, время, за которое фигурист делает вокруг неё полный оборот, может быть записано в виде

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1}. \qquad (12)$$

С другой стороны,

$$\tau=\frac{t}{n-1}. \qquad (13)$$

Приравнивая (12) и (13), получим

$$\frac{t}{n-1}=\frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1}. \qquad (14)$$

Из формул (14) и (11) окончательно находим время одного оборота фигуристки:

$$\frac{n-1}{t}=\frac{1}{t_2}-\frac{2}{t}, \qquad (15)$$

$$t_2=\frac{t}{n+1}=1\text{ с}. \qquad (16)$$

Задача 3. (МЦНМО, 2012) Небольшое тело совершает вращение по окружности с постоянной по модулю скоростью u = 0,1 м/с вокруг оси, совпадающей с главной оптической осью собирающей линзы. Расстояние от тела до линзы постоянно и равно a = 15 см. Фокусное расстояние линзы F = 10 см. С какой скоростью движется изображение этого тела?

Решение. Пусть тело движется по окружности радиусом r (рис. 3). Согласно формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}$$

изображение тела будет находиться на расстоянии $b=\dfrac{aF}{a-F}$ от линзы. Из

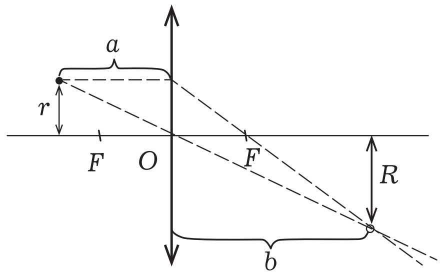

Рис. 3

рисунка следует, что радиус окружности, по которой движется изображение, равен

$$R=r\cdot\frac{b}{a}=r\cdot\frac{F}{a-F}.$$

Так как периоды обращения тела и его изображения по окружностям радиусами r и R одинаковы, получаем, что $T=\dfrac{2\pi r}{u}=\dfrac{2\pi R}{v}$. Тогда скорость движения изображения тела находится по формуле

$$v=\frac{R}{r}\cdot u=\frac{Fu}{a-F}.$$

После подстановки числовых значений получим v = 0,2 м/с.

Задача 4. (МИОО, 2013) Известно, что один оборот вокруг своей оси Венера совершает примерно за 243 земных суток, а масса Венеры составляет 0,82 от массы Земли. На орбиту какого радиуса надо вывести спутник Венеры, чтобы он всё время «висел» над одной и той же точкой поверхности? Известно, что спутники Земли, «висящие» над одной и той же точкой поверхности, летают по орбите радиусом $R_З \approx$ 42000 км.

Решение. Уравнение движения спутника по круговой орбите радиусом R в поле тяготения любой планеты имеет вид

$$m\omega^2R=G\frac{mM}{R^2}, \qquad (17)$$

где m и M – массы спутника и планеты, ω – угловая скорость вращения спутника вокруг планеты. Для геостационарного спутника, «висящего» над одной и той же точкой поверхности Земли,

$$\omega = \omega_З = \frac{2\pi}{T_З}, \qquad (18)$$

где $T_З$ = 24 ч (земные сутки). Из формул (17) и (18) следует, что радиус геостационарной орбиты равен

$$R_З = \left(\frac{GM_З}{4\pi^2} T_З{}^2\right)^{1/3}. \qquad (19)$$

Радиус аналогичной орбиты для спутника, «висящего» над Венерой, определяется выражением

$$R_В = \left(\frac{GM_В}{4\pi^2} T_В{}^2\right)^{1/3} = \left(\frac{G \cdot 0{,}82M_З}{4\pi^2}(243T_З)^2\right)^{1/3} \approx \qquad (20)$$
$$\approx 1531000 \text{ км}.$$

Задача 5. (МИОО, 2013) В вертикальной плоскости расположена гладкая трубка, изогнутая периодически в виде дуг окружностей одинакового радиуса R (рис. 4). В верхнее отверстие трубки без начальной скорости запускают шарик массой m = 10 г. С какой по модулю силой F шарик действует на трубку в точке A, в конце первого периода своего движения по трубке?

Решение. В точке A шарик движется по дуге окружности радиуса R. Поскольку трубка по условию гладкая, а движение по окружности неравномерное, то для решения задачи необходимо записать уравнение движения шарика в проекции на направление нормали к окружности и закон сохранения механической энергии. Уравнение движения шарика имеет вид

$$\frac{mv^2}{R} = N, \qquad (21)$$

где N – нормальная составляющая силы реакции со стороны трубки.

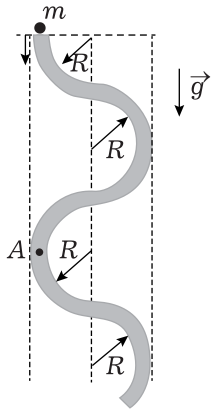

Рис. 4

К концу первого периода движения по трубке шарик переместится по вертикали на расстояние $h = 4R$, поэтому его скорость в точке A равна

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{8gR}. \qquad (22)$$

По третьему закону Ньютона искомая сила равна нормальной составляющей силы реакции трубки, поэтому из формул (21) – (22) находим

$$F = \frac{mv^2}{R} = 8mg = 0{,}8 \text{ Н}. \qquad (23)$$

Задача 6. (ЕГЭ, 2013) В установке, изображённой на рисунке 5, грузик A соединён перекинутой через блок нитью с бруском B, лежащим на горизонтальной поверхности трибометра, закреплённого на столе. Грузик отводят в сторону, приподнимая его на некоторую высоту h, и отпускают. Какую величину должна превзойти эта высота, чтобы брусок сдвинулся с места в тот момент, когда грузик проходит нижнюю точку траектории? Масса грузика m, масса бруска M, длина свисающей части нити L, коэффициент трения между бруском и поверхностью μ. Трением в блоке, а также размерами блока пренебречь.

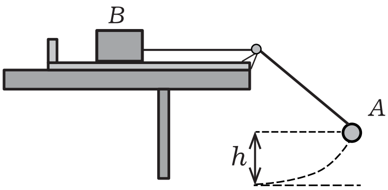

Рис. 5

Решение. На покоящийся брусок B, находящийся на поверхности трибометра, действуют сила тяжести $M\vec{g}$, нормальная составляющая реакции опоры $\vec{N}$, сила натяжения нити $\vec{T}_1$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$. Для того чтобы брусок пришёл в движение, сила натяжения нити должна превысить максимальное значение силы трения покоя, равное μN.

На грузик A в нижней точке траектории действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_2$, причем если нить и блок невесомы, то

$$\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_2\right| = T\,.$$

Учтём, что грузик движется по дуге окружности радиуса L, и запишем для него закон сохранения механической энергии и второй закон Ньютона, спроецировав его на направление нормали к окружности в момент прохождения грузиком нижней точки траектории:

$$m\frac{v^2}{L} = T - mg, \tag{24}$$

$$mgh = \frac{mv^2}{2}\,. \tag{25}$$

В момент начала движения бруска

$$T = \mu N = \mu mg. \tag{26}$$

Уравнения (24) – (26) позволяют найти условие, которому должна удовлетворять высота h, чтобы брусок сдвинулся с места при прохождении грузиком нижней точки траектории:

$$h \ge \left(\frac{\mu M}{m} - 1\right)\frac{L}{2}\,. \qquad (27).$$