Подлесный Дмитрий Владимирович
Заместитель директора по развитию, научный руководитель ГБОУ РМ «Республиканский лицей», кандидат педагогических наук, доцент, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, народный учитель Республики Мордовия.

Два подхода к решению одной известной задачи

Задача о разматывании ленты (или гибкого кабеля), о которой пойдёт речь, не нова (см., например, [1, с. 51, задача 218]), однако и по сей день она остаётся предметом споров о возможности применения для её решения закона сохранения механической энергии или же закона сохранения момента импульса. Настоящая статья, как представляется автору, должна поставить точку в многолетней дискуссии педагогов-физиков, но обо всём по порядку.

1. Постановка задачи

На жёсткий лёгкий цилиндр радиусом R намотана массивная нерастяжимая тонкая гибкая однородная лента длиной L ($L = 2\pi RN$, где $N >> 1$). Цилиндр (с намотанной лентой) по инерции катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности, при этом лента разматывается и ложится на эту поверхность (рис. 1). В начальный момент, когда вся лента была намотана на цилиндр, его центр имел скорость V_0. Найдите скорость V центра цилиндра в тот момент, когда на поверхности будет лежать часть ленты длиной x ($R << x < L - 2\pi R$). Ускорение свободного падения g.

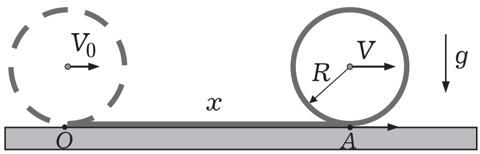

Рис. 1

2. Решение задачи в отсутствие тяготения ($g = 0$)

В этой модельной ситуации считаем, что в начальный момент свободный конец ленты находился на рассматриваемой горизонтальной поверхности и был закреплён на ней.

2.1. Энергетический подход

В основу решения положен закон сохранения механической энергии. В самом деле, при разматывании ленты мы не наблюдаем никаких механизмов диссипации энергии. При движении цилиндра без проскальзывания лента плавно ложится на поверхность и ударов с выделением теплоты не происходит. Так же нет потерь и из-за трения, так как скольжение ленты по поверхности отсутствует. Впрочем, в рассматриваемой ситуации ($g = 0$) это не актуально.

Обозначим через ρ погонную плотность (массу единицы длины) ленты. Согласно закону сохранения механической энергии, приходим к уравнению: $\rho L V_0^2 = \rho(L-x)V^2$, откуда находим искомую скорость:

$$V = V_0 \cdot \sqrt{\frac{L}{L-x}}. \qquad (1)$$

2.2. Динамический подход

В основу динамического подхода положено уравнение моментов относительно движущейся точки A (скорость точки A в любой момент равна скорости центра цилиндра). Но здесь надо быть предельно аккуратным в рассуждениях и математических выкладках!

Покажем сначала к чему приводят неправильные рассуждения и применение закона сохранения момента импульса относительно точки A. В самом деле, суммарный момент всех внешних сил, действующих на ленту, относительно точки A равен нулю и, следовательно, момент импульса ленты остаётся постоянным: $2\rho L V_0 R = 2\rho(L-x)VR$. Заметим, что получаемое отсюда выражение для скорости:

$$V = V_0 \cdot \frac{L}{L-x}$$

отличается от выражения (1), к которому мы пришли, применяя закон сохранения механической энергии.

Так что же всё-таки сохраняется при рассматриваемом движении – механическая энергия или момент импульса? Опережая ниже приведённые выкладки, сразу отметим, что сохраняется энергия (!), а момент импульса системы будет изменяться. Дело в том, что изменение момента импульса обусловливается не только суммарным моментом сил, который в рассматриваемом случае равен нулю, но и величиной, равной произведению массы системы на векторное произведение скорости $\vec{V}_C$ движения центра масс и скорости $\vec{V}_A$ движения точки A, относительно которой и вычисляется момент импульса.

Как известно (см., например, [2, с. 200]), уравнение моментов относительно движущейся точки А имеет вид:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A + m\left[\vec{V}_C \times \vec{V}_A\right]. \qquad (2)$$

Запишем уравнение (2) в проекциях на ось AZ, проходящую через точку A перпендикулярно плоскости рисунка в направлении «от нас», заметив предварительно, что:

$$L_{AZ} = 2\rho(L-x)VR,$$

$$\frac{dL_{AZ}}{dt} = -2\rho RV^2 + 2\rho R(L-x)V\frac{dV}{dx};$$

$$M_{AZ} = 0;$$

$$m\left[\vec{V}_C \times \vec{V}_A\right]_Z = -mV_{CY}V_{AX}, \quad m = \rho L,$$

$$V_{CY}=\frac{d}{dt}\left(\frac{xR}{L}\right)=\frac{R}{L}V,\ \ L_{AX}=V;$$

(здесь V_{CY} – проекция скорости движения центра масс ленты на вертикальную ось Y, направленную «вниз», а X_{AX} – проекция скорости точки A на горизонтальную ось X, направленную по движению цилиндра).

С учетом этого уравнение (2) примет вид:

$$-2\rho RV^2+2\rho R(L-x)V\frac{dV}{dx}=-\rho RV^2.$$

Разделяя переменные, получаем: $\frac{dV}{V}=\frac{dx}{2(L-x)}$, и после интегрирования для искомой скорости V приходим к выражению, в точности совпадающему с выражением (1), полученным из закона сохранения механической энергии:

$$V=V_0\cdot\sqrt{\frac{L}{L-x}}.$$

3. Решение задачи с учётом силы тяжести

3.1. <u>Энергетический подход</u>

Искомую скорость находим из закона сохранения механической энергии, учитывая изменение потенциальной энергии ленты в поле тяжести:

$$\rho LV_0^2+\rho xgR=\rho(L-x)V^2;$$

$$V=\sqrt{V_0^2\frac{L}{L-x}+Rg\frac{x}{L-x}}. \qquad (3)$$

3.2. <u>Динамический подход</u>

Решение задачи с учётом силы тяжести динамическим методом практически полностью повторяет выкладки, приведённые в пункте 2.2 настоящего изложения. Отличие состоит лишь в том, что момент сил M_{AZ} становится отличным от нуля.

Получим выражение для этого момента, обусловленного действием сил тяжести на части ленты, оставшиеся на цилиндре (моменты сил тяжести, действующих на части ленты, находящихся на горизонтальной поверхности, компенсируются соответствующими моментами сил реакции поверхности).

Если отмотанный кусок ленты длиной x намотать обратно на цилиндр, то результирующий момент сил тяжести относительно точки A окажется равным нулю. Следовательно, искомый момент M_{AZ} равен моменту сил тяжести, действующих на части ленты общей длины x и намотанной на цилиндр в обратном направлении (рис. 2). Найдём этот момент:

$$dM_{AZ}=dmg\cdot R\sin\varphi=\rho gR^2\sin\varphi\cdot d\varphi;$$

$$M_{AZ}=\int dM_{AZ}=\rho gR^2\int_0^{\frac{x}{R}}\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=\rho gR^2\left(1-\cos\frac{x}{R}\right).$$

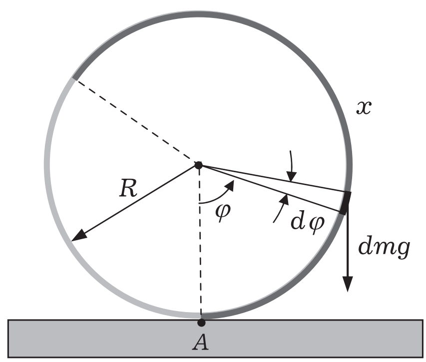

Рис. 2

Рассматриваемый момент M_{AZ} зависит от x, однако в уравнение (2) может быть подставлено его среднее значение за каждый оборот вращения цилиндра: $\langle M_{AZ}\rangle = \rho g R^2$ (среднее значение функции $\cos\frac{x}{R}$ за период $2\pi R$ обращается в ноль). Это приближение разумно, так как $x >> R$.

С учётом вышеизложенного приходим к уравнению, отличающемуся от уравнения (3) дополнительным слагаемым $\rho g R^2$ в правой части:

$$-2\rho R V^2 + 2\rho R(L-x)V\frac{dV}{dx} = $$

$$= \rho g R^2 - \rho R V^2.$$

Разделяя переменные и интегрируя, приходим к окончательному результату, в точности совпадающему с результатом (3), полученному из энергетических соображений:

$$V = \sqrt{V_0^2\frac{L}{L-x} + Rg\frac{x}{L-x}}.$$

В заключение отметим, что в динамическом подходе можно использовать и уравнение моментов относительно неподвижной точки O (см. рис.1). В этом случае второе слагаемое правой части уравнения (2) обращается в ноль, однако результирующий момент внешних сил становится отличным от нуля. Также изменяется выражение момента импульса и его производной по времени. Это связано с неравномерным движением центра масс системы в вертикальном направлении. Предлагаем читателю провести необходимые выкладки самостоятельно и прийти к результатам (1) и (3).

Отметим также, что приведённые выше решения являются приближёнными и носят оценочный характер. И дело здесь не только в том, что в уравнение (2) мы подставляли не точное выражение момента M_{AZ}, а его среднее значение $\langle M_{AZ}\rangle$. Дело ещё и в том, что, записывая выражения для момента импульса L_{AZ}, кинетической энергии $\left(\rho(L-x)V^2\right)$, скорости движения центра масс V_{CY}, мы как бы считали, что цилиндр сделал целое число оборотов, что вообще говоря не справедливо для произвольного x. В общем случае надо аккуратно учитывать последний неполный виток, проводя интегрирование подобное тому, что сделано при нахождении момента силы тяжести в п. 3.2. Однако, при $x >> R$ (см. условие задачи), вкладом «неполного витка» в значения перечисленных выше физических величин можно пренебречь, что и было сделано автором.

Литература

1. Сборник задач по элементарной физике: Пособие для самообразования / Буховцев Б. Б., Кривченков В. Д., Мякишев Г. Я., Сараева И. М. – 6-е изд., дополн. – М.: Физматлит, 2000. – 448 с. – ISBN 5-9221-0076-9.

2. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Учебное пособие: Для вузов. В 5 т. Т. 1. Механика. – 4-е изд., стереот. М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2002. – 560 с. – ISBN 5-9221-0225-7; 5-89155-078-4.