

Подлесный Дмитрий Владимирович
 Заместитель директора по развитию,
 научный руководитель ГБОУ РМ
 «Республиканский лицей»,
 кандидат педагогических наук, доцент,
 заслуженный работник высшей школы Российской
 Федерации, народный учитель Республики Мордовия.



Диод в колебательном контуре

Настоящая статья посвящена электрическим колебаниям, происходящим в колебательных контурах, в которых присутствуют идеализированные диоды. Наряду с идеальными диодами рассмотрены и диоды, открывающиеся при определённом пороговом напряжении. Большое внимание в статье уделено решению задач повышенной сложности. Разобран ряд задач, ранее предлагавшихся на вступительных экзаменах в МФТИ и Всероссийских олимпиадах школьников по физике.

1. Немного теории

Напомним, что диод – это элемент, обладающий односторонней проводимостью. Идеальный диод D имеет нулевое сопротивление, если ток протекает через него в направлении, указываемым стрелкой в его обозначении (рис. 1). Если пытаться через идеальный диод создать ток в противоположном направлении, то ничего не получится, так как в этом случае диод имеет бесконечно большое сопротивление, представляя собой по сути разрыв цепи. Вольт-амперная характеристика идеального диода представлена на рисунке 2.

Наряду с идеальным диодом в электрических цепях можно встре-



Рис. 1

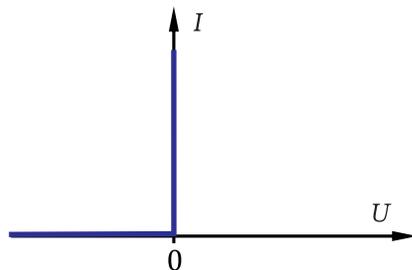


Рис. 2

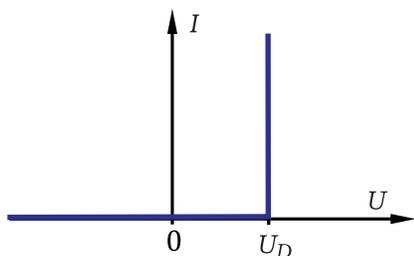


Рис. 3

титель так называемый «диод с порогом», который открывается, то есть начинает пропускать электрический ток, только при подаче на него некоторого порогового напряжения U_D . Вольт-амперная характеристика такого диода изображена на рисунке 3. Если «диод с порогом» присутствует в электрической цепи и через него протекает электрический заряд q , то на нём неизбежны потери энергии, равные $Q_D = qU_D$.

Рассмотрим колебательный контур с идеальным диодом D , изображённый на рисунке 4. В начальный момент конденсатор ёмкости C заряжен до напряжения U_0 , ток в катушке индуктивности L не течёт, а ключ K разомкнут. Опишем процессы, происходящие в контуре после замыкания ключа, и представим графики зависимостей от времени напряжения U на конденсаторе и силы тока I в катушке индуктивности.

После замыкания ключа K в контуре возникают электрические колебания, сопровождаемые взаимными превращениями энергии электрического поля конденсатора

$W_C = \frac{CU^2}{2}$ и энергии магнитного по-

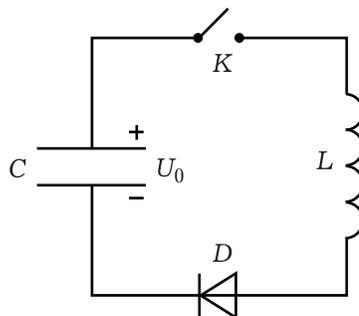


Рис. 4

ля катушки $W_L = \frac{LI^2}{2}$. При этом полная энергия W колебаний, равная сумме энергий конденсатора и катушки индуктивности, остаётся постоянной и равной начальной энергии конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2}.$$

Так будет продолжаться не долго, а именно, пока диод открыт, то есть до тех пор, пока конденсатор не перезарядится. Время τ , в течение которого происходит перезарядка конденсатора, равняется половине периода T колебаний в нашем контуре при отсутствии диода:

$$\tau = \frac{1}{2}T = \pi\sqrt{LC}.$$

При $t < \tau$ временные зависимости напряжения $U(t)$ на конденсаторе и силы тока $I(t)$ в цепи имеют вид:

$$U(t) = U_0 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}; \quad I(t) = I_0 \sin \frac{t}{\sqrt{LC}},$$

где амплитудное (максимальное) значение силы тока I_0 легко находится из закона сохранения энергии и равняется:

$$I_0 = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

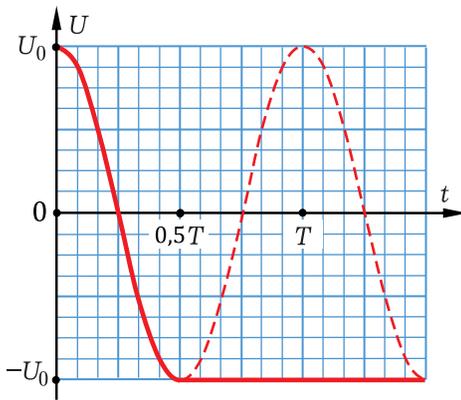


Рис. 5

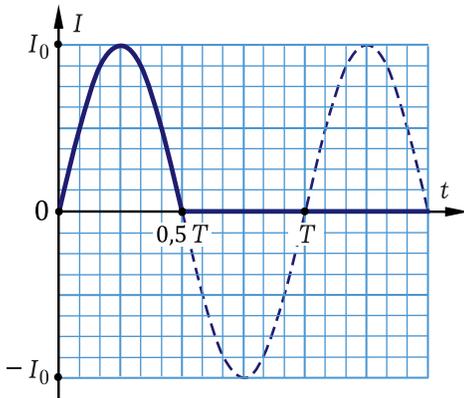


Рис. 6

В момент времени $t = \tau$ диод закрывается и ток в цепи прекращается. При $t > \tau$ диод закрыт, сила тока в цепи равна нулю. Напряжение на конденсаторе перестаёт изменяться, принимая отрицательное значение, равное по модулю U_0 .

Графики зависимостей от времени напряжения U на конденсаторе и силы тока I в катушке индуктивности после замыкания ключа представлены на рисунках 5 и 6, где пунктирными линиями показаны рассматриваемые графики в отсутствии диода.

В случае включения в колебательный контур «диода с порогом», вольт-амперная характеристика которого представлена на рисунке (3), дело обстоит несколько иначе. Во-первых, если начальное напряжение на конденсаторе U_0 меньше порогового напряжения диода U_D , то после замыкания ключа K диод не откроется, следовательно, никакого тока в цепи не возникнет, и конденсатор не будет разряжаться. Во-вторых, при $U_0 > U_D$, когда диод открыт и конденсатор разряжается, на диоде, как уже отмечалось, неизбежно теряется энергия, и поэтому конденсатор перезаряжается до напряжения U_1 , меньшего по модулю, чем начальное на нём напряжение U_0 .

С учётом потерь на диоде уравнение закона сохранения энергии имеет вид:

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} + qU_D,$$

где $q = (CU_0 - CU)$ – заряд, протекший через нелинейный элемент.

В момент, когда конденсатор перезаряжается до максимального по модулю напряжения, сила тока в катушке становится равной нулю, и мы приходим к уравнению:

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{CU_1^2}{2} + C(U_0 - U_1)U_D,$$

решая которое, находим напряжение перезарядки:

$$U_1 = -U_0 + 2U_D.$$

Можно показать, что конденсатор перезаряжается, как и в случае с идеальным диодом, за время

$$\tau = \frac{1}{2}T = \pi\sqrt{LC}.$$

В момент времени $t = \tau$ диод также закрывается, и ток в цепи прекращается. При $t > \tau$ диод закрыт, сила тока в цепи равна нулю. Напряжение на конденсаторе перестаёт изменяться, оставаясь равным $U_1 = -U_0 + 2U_D$.

Найдём ещё максимальное значение силы тока I_1 в катушке в процессе разрядки-перезарядки конденсатора. Примем во внимание, что в момент, когда сила тока в катушке достигает максимального значения, ЭДС самоиндукции катушки обращается в ноль. Тогда на основании второго правила Кирхгофа можно утверждать, что в этот момент напряжение на конденсаторе U равно напряжению на диоде U_D . С учётом этого для определения I_1 приходим к уравнению:

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{CU_D^2}{2} + \frac{LI_1^2}{2} + C(U_0 - U_D)U_D,$$

решая которое, находим максимальную силу тока в катушке:

$$I_1 = (U_0 - U_D) \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Получим теперь временные зависимости напряжения $U(t)$ на конденсаторе и силы тока $I(t)$ в катушке индуктивности после замыкания ключа в случае диода с порогом. Запишем уравнение второго правила Кирхгофа в произвольный момент времени t процесса разрядки-перезарядки конденсатора после замыкания ключа K (направление обхода контура показано пунктирной линией со стрелкой на рисунке 7):

$$-L \frac{dI}{dt} = U_D - U.$$

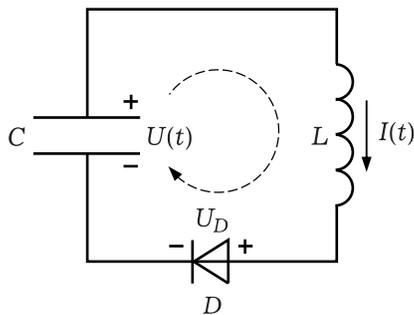


Рис. 7

Принимая во внимание связь силы тока I в цепи с зарядом q и, как следствие, с напряжением U на конденсаторе:

$$I = -\dot{q} = -C\dot{U},$$

приходим к дифференциальному уравнению для функции $U(t)$:

$$\ddot{U} + \frac{1}{LC}U = \frac{1}{LC}U_D. \quad (1)$$

Решая полученное уравнение с учётом начальных условий

$$(U(0) = U_0 > U_D; \quad \dot{U}(0) = -\frac{1}{C}I(0) = 0),$$

приходим к зависимости напряжения конденсатора от времени, разумеется при $t < \tau$:

$$U(t) = U_D + (U_0 - U_D) \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}. \quad (2)$$

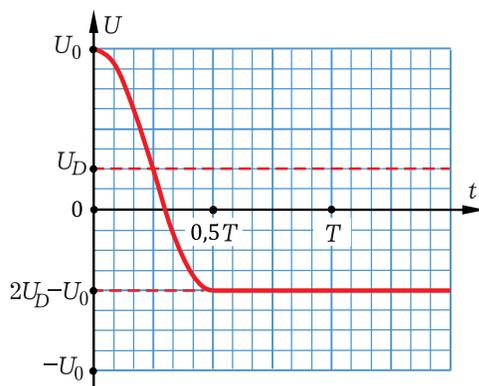


Рис. 8

С учётом этого находим зависимость тока в цепи от времени:

$$I(t) = -C\dot{U}(t) = (U_0 - U_D)\sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \sin \frac{t}{\sqrt{LC}} = I_1 \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}.$$

Графики зависимостей от времени напряжения $U(t)$ на конденсаторе и силы тока $I(t)$ в катушке индуктивности после замыкания ключа (в случае диода с порогом) представлены на рисунках 8 и 9, где, как и ранее, $T = 2\pi\sqrt{LC}$ – период собственных незатухающих колебаний в контуре при отсутствии диода.

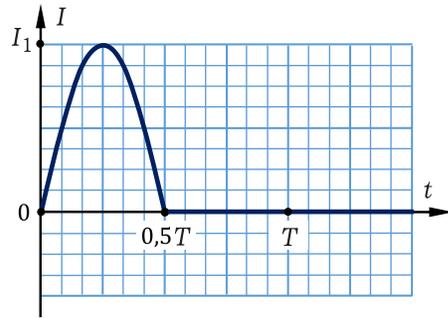


Рис. 9

2. Решение задач

Задача 1. В электрической цепи, показанной на рисунке 10, в начальный момент конденсатор ёмкости C заряжен до напряжения U_0 , ключ K разомкнут, токи в катушках с индуктивностями L_1 и L_2 не текут. Омические сопротивления катушек пренебрежимо малы, диод идеальный. Затем ключ замыкают, и через некоторое время τ после этого напряжение на конденсаторе становится равным нулю, а ещё через некоторое время конденсатор полностью перезарядается до некоторого максимального напряжения. Требуется определить:

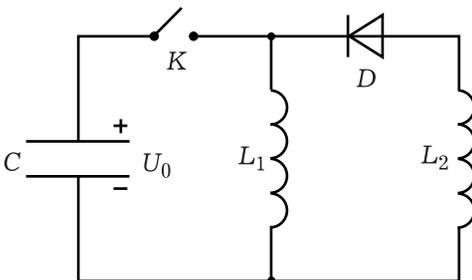


Рис. 10

1. время τ , в течение которого конденсатор полностью разрядится в первый раз;

2. силу тока I_D , протекающего через диод в момент полной перезарядки конденсатора;

3. максимальное напряжение U перезарядки конденсатора. (*Вступительные экзамены в МФТИ, 1998 г. Автор: В. Можжев.*)

Решение. После замыкания ключа в цепи возникнут электрические колебания. При этом в течение искомого времени τ диод будет закрыт, и «работать» будет только катушка L_1 . Это время, очевидно, равно четверти периода колебаний, которые прошли бы в контуре при отсутствии диода и второй катушки:

$$\tau = \frac{1}{4}T = \frac{\pi}{2}\sqrt{L_1C}.$$

В этот момент ($t = \tau$) сила тока в катушке L_2 всё ещё равна нулю, а в катушке L_1 – достигает своего максимального значения I_0 , которое нетрудно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{L_1 I_0^2}{2}; \rightarrow I_0 = U_0 \sqrt{\frac{C}{L_1}}. \quad (3)$$

В дальнейшем идёт процесс перезарядки конденсатора, и диод открывается. Сила тока I_1 в катушке L_1 (рис. 11) убывает, а сила тока I_2 в катушке L_2 возрастает. (Сила тока через диод всегда равна силе тока через катушку L_2). При этом магнитный поток, через контур, состоящий из двух катушек и диода, сохраняется, поскольку диод идеальный, а омические сопротивления катушек пренебрежимо малы:

$$L_1 I_0 = L_1 I_1 + L_2 I_2 \quad (4)$$

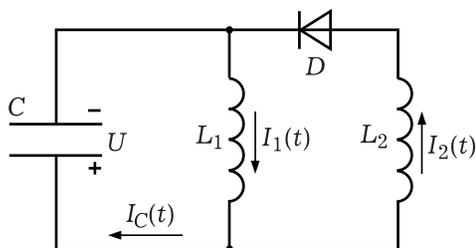


Рис. 11

В момент времени, когда напряжение на конденсаторе в процессе перезарядки достигает своего максимального значения U , сила тока I_C , текущего к нему, обращается в ноль, а силы токов в катушках сравниваются в соответствии с первым правилом Кирхгофа. Сила тока I_D через диод в этот момент времени и будет равна току в катушках ($I_D = I_2 = I_1$). С учётом этого из уравнения (4) и соотношения (3) для искомой силы тока имеем:

$$I_D = \frac{L_1 I_0}{L_1 + L_2} = \frac{U_0 \sqrt{L_1 C}}{L_1 + L_2}.$$

Максимальное напряжение U перезарядки конденсатора найдём из закона сохранения энергии с учётом вышеизложенного:

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{L_1 I_0^2}{2} = \frac{(L_1 + L_2) I_D^2}{2} + \frac{CU^2}{2};$$

$$U = U_0 \sqrt{\frac{L_2}{L_1 + L_2}}.$$

Задача 2. Цепь, показанная на рисунке 12, содержит два конденсатора, ёмкости которых равны $C_1 = C$ и $C_2 = 3C$, катушку индуктивности L , идеальный диод D и ключ K . Омическое сопротивление катушки и сопротивление соединительных проводов пренебрежимо малы. В начальный момент конденсатор C_1 заряжен до напряжения U_0 , конденсатор C_2 не заряжен, ключ K разомкнут, ток в катушке не течёт.

1. Через какое время τ после замыкания ключа K напряжение на конденсаторе C_1 окажется первый раз равным нулю?

2. Постройте графики зависимостей от времени напряжений U_1 и U_2 на конденсаторах после замыкания ключа K с указанием координат характерных точек. (Окружной этап Всероссийской олимпиады школьников по физике, 1998 г. Автор: Д. Подлесный).

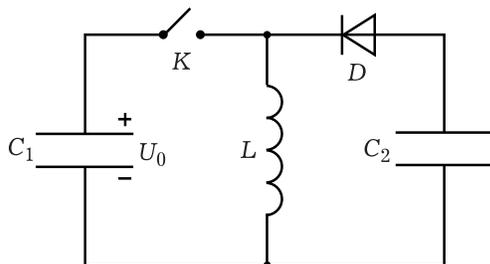


Рис. 12

Решение. После замыкания ключа в цепи возникнут электрические колебания. При этом в течение искомого времени τ диод будет закрыт, и конденсатор C_2 «работать» не будет. Это время, очевидно, равно четверти периода T колебаний, которые проходили бы в контуре при отсутствии диода и конденсатора C_2 :

$$\tau = \frac{1}{4}T = \frac{\pi}{2}\sqrt{LC_1} = \frac{\pi}{2}\sqrt{LC}.$$

В момент времени $t = \tau$, когда конденсатор C_1 полностью разряжается, а конденсатор C_2 по-прежнему ещё не заряжен, сила тока в катушке достигает своего максимального значения I_0 , которое нетрудно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}; \rightarrow I_0 = U_0\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

В дальнейшем происходит процесс перезарядки конденсатора C_1 одновременно с зарядкой конденсатора C_2 . Этот процесс сопровождается превращением энергии катушки в энергию конденсаторов. В момент, когда ток в катушке прекратится, напряжения на конденсаторах достигают некоторого значения

U , модуль которого нетрудно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{LI_0^2}{2} = \frac{(C_1 + C_2)U^2}{2}; \rightarrow U = I_0\sqrt{\frac{L}{C_1 + C_2}} = \frac{1}{2}I_0\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{U_0}{2}.$$

При рассмотренной перезарядке «работают» уже оба конденсатора. Длительность этого процесса равна четверти периода T' колебаний, которые протекали бы в контуре с параллельным соединением конденсаторов в отсутствие диода:

$$\tau' = \frac{1}{4}T' = \frac{\pi}{2}\sqrt{L(C_1 + C_2)} = \pi\sqrt{LC} = 2\tau.$$

При $t > \tau + \tau' = 3\tau = \frac{3\pi}{2}\sqrt{LC}$ диод

всегда закрыт, напряжение на конденсаторе C_2 не изменяется, а в левом контуре происходят незатухающие колебания с амплитудой напряжения $U = U_0/2$ на конденсаторе C_1 и периодом:

$$T = 2\pi\sqrt{LC_1} = 2\pi\sqrt{LC} = 4\tau.$$

Графики зависимостей от времени напряжений U_1 и U_2 на конденсаторах после замыкания ключа K приведены на рисунке 13.

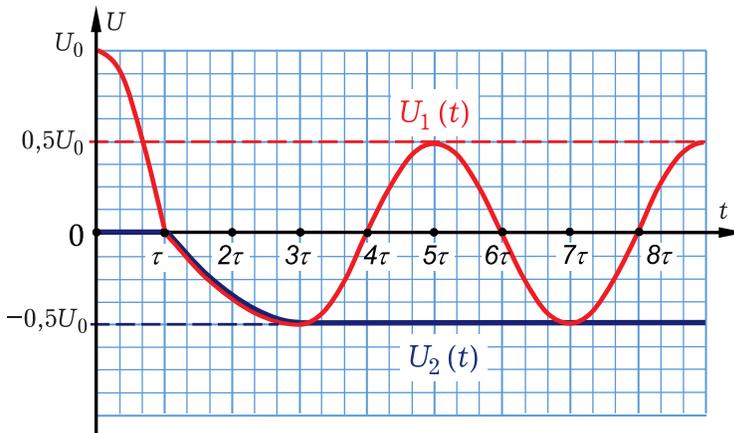


Рис. 13

Задача 3. В электрической цепи, показанной на рисунке 14, ключ K разомкнут, конденсатор ёмкости C заряжен до напряжения U_0 , ЭДС источника \mathcal{E} , индуктивность катушки L , диод D имеет вольт-амперную характеристику, показанную на рисунке 3. Требуется найти максимальное значение силы тока I_{\max} в цепи и установившееся напряжение $U_{\text{уст}}$ на конденсаторе после замыкания ключа K . Омическим сопротивлением катушки и внутренним сопротивлением источника пренебречь. (Автор: Д. Подлесный (по мотивам задач вступительных экзаменов по физике в МФТИ))

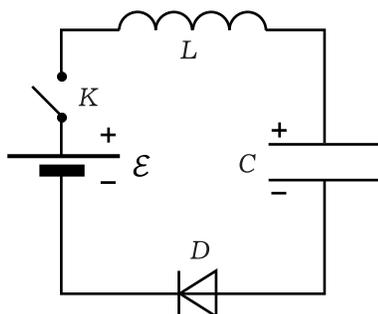


Рис. 14

Решение. Поскольку численные значения известных величин не приводятся в условии задачи, то мы рассмотрим две возможные ситуации.

1. ЭДС источника не превосходит сумму порогового напряжения диода с начальным напряжением на конденсаторе, то есть $\mathcal{E} \leq U_D + U_0$. В этом случае диод не откроется, следовательно, ток в цепи не возникнет, а, значит, никакого изменения заряда конденсатора происходить не бу-

дет. Таким образом, в рассмотренной ситуации: $I_{\max} = 0$; $U_{\text{уст}} = U_0$.

2. ЭДС источника больше суммы порогового напряжения диода с начальным напряжением на конденсаторе, то есть $\mathcal{E} > U_D + U_0$. Здесь после замыкания ключа диод открывается, и в цепи возникает электрический ток, в результате чего происходят изменения заряда конденсатора и, следовательно, напряжения на нём.

Рассмотрим цепь в произвольный момент времени после замыкания ключа, когда ток течёт, и напряжение на конденсаторе ещё не достигло искомого установившегося значения. Пусть U и I напряжение на конденсаторе и сила тока в катушке (в цепи) в этот момент.

К этому моменту времени по цепи протекает электрический заряд q , равный изменению заряда конденсатора: $q = CU - CU_0$. Источник при этом совершает работу $A_{\text{ист}} = q\mathcal{E} = C(U - U_0)\mathcal{E}$, которая в соответствии с законом сохранения энергии идёт на изменение энергии конденсатора с катушкой индуктивности и на неизбежные потери на диоде ($Q_D = qU_D = C(U - U_0)U_D$). С учётом этого приходим к уравнению:

$$C(U - U_0)\mathcal{E} = \left(\frac{CU^2}{2} - \frac{CU_0^2}{2} \right) + \frac{LI^2}{2} + C(U - U_0)U_D. \quad (5)$$

В момент, когда напряжение на конденсаторе достигает максимального значения U_{\max} , ток в цепи прекращается, то есть $I = 0$. (Очевидно, что это происходит в момент времени $t = \pi\sqrt{LC}$). С учётом этого приходим к уравнению:



$$C(U_{\max} - U_0)\mathcal{E} = \frac{CU_{\max}^2}{2} - \frac{CU_0^2}{2} + C(U_{\max} - U_0)U_D,$$

решая которое, находим:

$$U_{\max} = 2(\mathcal{E} - U_D) - U_0.$$

Если $\mathcal{E} = (U_0 + U_D) + \Delta$, где $\Delta > 0$, то $U_{\max} = U_0 + 2\Delta$.

В дальнейшем, то есть при $t > \pi\sqrt{LC}$ диод закрыт, ток в цепи отсутствует, напряжение на конденсаторе не изменяется. Таким образом, установившееся напряжение на конденсаторе равняется найденному его максимальному напряжению:

$$U_{\text{уст}} = U_{\max} = 2(\mathcal{E} - U_D) - U_0.$$

При достижении силой тока I своего максимального значения I_{\max} , как уже отмечалось ранее, ЭДС самоиндукции катушки обращается в ноль, и, следовательно, на основании второго правила Кирхгофа приходим к уравнению:

$$\mathcal{E} = U + U_D. \quad (6)$$

Решая систему уравнений (5) и (6) для максимального тока в цепи, получим:

$$I_{\max} = (\mathcal{E} - U_0 - U_D)\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Задача 4. В колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности $L = 0,1$ Гн и конденсатора ёмкости $C = 10$ мкФ, включён «электронный ключ», составленный из двух одинаковых диодов (рис. 15). Вольт-амперная характеристика диодов представлена на рисунке 3. Пороговое напряжение, при котором диод открывается, $U_D = 0,7$ В. Перед замыканием ключа K напряжение на конденсаторе $U_0 = 4,5$ В.

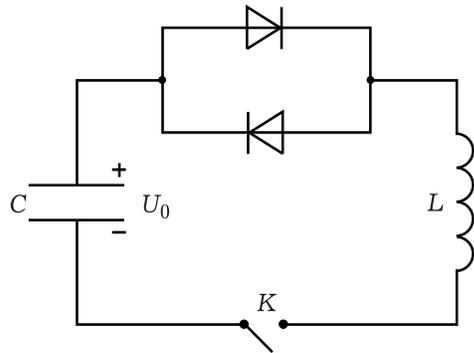


Рис. 15

1. Через какое время τ_0 после замыкания ключа K колебания в контуре прекратятся и установится стационарный режим?

2. Чему равно установившееся (остаточное) напряжение $U_{\text{уст}}$ на конденсаторе?

3. Постройте график зависимости напряжения U на конденсаторе от времени после замыкания ключа K . (Заключительный этап Всероссийской олимпиады школьников по физике, 1994 г. Автор: Ю. Чешев).

Решение. Поскольку $U_0 > U_D$, то после замыкания ключа K верхний диод будет открыт, и в цепи возникнут электрические колебания, описываемые дифференциальным уравнением (1), решением которого является функция (2).

Так будет продолжаться в течение времени $\tau = \frac{1}{2}T = \pi\sqrt{LC}$, пока ток в катушке не прекратится, а напряжение на конденсаторе не станет равным $U_1 = 2U_D - U_0$ и меньшим по модулю начального напряжения U_0 на величину $2U_D$:

$$|U_1| = U_0 - 2U_D = 3,1 \text{ В.}$$

Поскольку в нашем случае $|U_1| > U_D$, то колебания будут продолжаться, так как при этом открывается нижний диод. Проводя аналогичные рассуждения, получим, что после n полупериодов τ напряжение на конденсаторе окажется:

$$U_n = (-1)^n (U_0 - 2nU_D).$$

Очевидно, что колебания в контуре прекратятся, и контур перейдёт в стационарное состояние при таком n , когда:

$$|U_n| < U_D.$$

С учётом численных данных в условии задачи находим $n = 3$, поэтому время установления стационарного режима:

$$\tau_0 = 3\tau = 3\pi\sqrt{LC} \approx 9,4 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Установившееся напряжение на конденсаторе при этом равно:

$$U_{\text{уст}} = U_3 = 6U_D - U_0 = -0,3 \text{ В.}$$

График зависимости напряжения U на конденсаторе от времени представлен на рисунке 16. Заметим, что колебания прекращаются, если процесс перезарядки заканчи-

вается в так называемой «зоне застоя», отмеченной на рисунке серым цветом.

В заключение отметим, что рассмотренный колебательный процесс в контуре, аналогичен механическим колебаниям груза на пружине, происходящим на горизонтальном столе при наличии сухого трения между грузом и поверхностью стола.

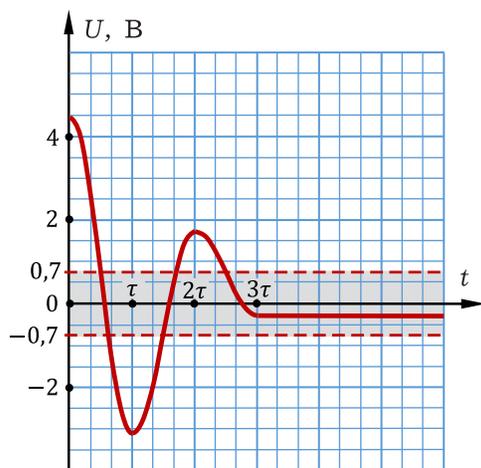


Рис. 16

Мудрые мысли

Мудрые мысли

Мудрые мысли

* * *

– Эксперт – это человек, который совершил все возможные ошибки в очень узкой специальности.

* * *

– Ваша идея, конечно, безумна. Весь вопрос в том, достаточно ли она безумна, чтобы оказаться верной.

* * *

– Если тебя квантовая физика не испугала, значит, ты ничего в ней не понял.

Нильс Бор,
датский физик и философ,
лауреат Нобелевской премии по физике.