Мукушев Базарбек Агзашулы
Доктор педагогических наук, профессор кафедры физики Государственного университета им. Шакарима г. Семей, обладатель государственного гранта Республики Казахстан «Лучший преподаватель вуза – 2012».

Динамические аналогии в физических задачах

Применение метода аналогий в научных исследованиях способствует реализации единого подхода к познанию объектов окружающей нас действительности. Единый подход к изучению физических систем позволяет глубже проанализировать любое конкретное явление, выявить аналогию между совершенно разными по природе явлениями, найти общий язык для их описания и почувствовать единство физического мира.

В статье изучены аналогии между механическими и электрическими динамическими системами посредством физических задач.

Введение

В исследованиях разного научного направления широко используются так называемые общенаучные методы познания: аналогия, моделирование, индукция, метод «от противного» [1] и др.

Аналогия – это метод познания, при котором на основе сходства объектов в одних признаках заключают об их сходстве и в других признаках. Установив такое сходство и найдя, что число совпадающих признаков достаточно большое, исследователь может сделать предположение о том, что и другие свойства этих предметов совпадают. Ход рассуждений такого рода и составляет основу аналогии.

Аналогию обычно используют в физике на этапе теоретического исследования явлений и объектов посредством сравнения основных признаков двух систем. В основе *физической аналогии* лежит схожесть математического описания сопоставляемых физических процессов и объектов. Именно при изучении аналогий пришло в физику отчётливое понимание того, что явления разной природы могут подчиняться одинаковым законам и закономерностям. Нами предложены следующие виды физических аналогий: *статические и динамические*. Более глубоко и широко рассмотрены динамические аналогии, роль которых в науке и технике особенно значительна.

Методы, основанные на применении аналогий, во многих случаях выступают как эффективные средства решения некоторых физических задач. Аналогии позволяют сводить решения некоторых задач к решениям других (уже известных) задач.

Статические аналогии

К статическим аналогиям относятся системы, параметры которых не меняются со временем. Примером статической аналогии может служить сходство между законом всемирного тяготения и законом Кулона. Выражения для силы тяготения между двумя материальными точками с массами M и m и для силы электростатического взаимодействия двух точечных разноимённых зарядов Q и q имеют вид:

$$F_{\text{т}} = G\frac{Mm}{r^2}, \quad F_{\text{э}} = k\frac{Qq}{r^2},$$

где G – гравитационная постоянная, k – коэффициент пропорциональности, r – расстояние между взаимодействующими телами.

Потенциальный характер гравитационного и электростатического полей, независимость значения работы от формы траектории при перемещении материальной точки в гравитационном и точечного заряда в электрическом полях, нулевое значение этих работ на замкнутой траектории доказывают существование аналогии между этими физическими явлениями, различными по природе. Эта аналогия легко просматривается в работах [2] и [3], хотя термин «аналогия» в явном виде отсутствует.

Динамические аналогии

Глубокое сходство обнаруживается при сопоставлении колебаний грузика на пружине (пружинный маятник) и заряда в электрическом колебательном контуре (рис.1). Здесь аналогичными оказываются процессы, протекающие во времени в физически разных системах. Аналогии такого рода называются *динамическими*. Процессы в динамически аналогичных системах описываются одинаковыми математическими уравнениями. Динамические аналогии достаточно хорошо изучены в учебнике физики для 11 класса [4].

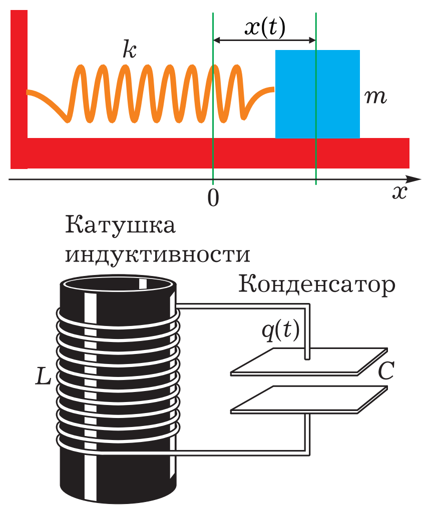

Рис.1

Рассмотрим теперь ряд задач, решения которых существенно упрощаются, если воспользоваться методом динамической аналогии.

Задача 1. Какую работу надо совершить, чтобы изменить заряд конденсатора ёмкостью C от значения q_1 до значения q_2?

Решение. *1-й метод*. Для решения этой задачи обычно используют закономерности электростатики. Процесс зарядки конденсатора можно представить следующим образом: заряд достаточно малыми порциями Δq (такими, что разность потенциалов U на конденсаторе можно считать не изменяющейся) переносят с одной обкладки на другую. Тогда работу по переносу заряда Δq запишем в виде:

$$\Delta A = U\,\Delta q = \frac{1}{C}q\Delta q.$$

Чтобы найти полную работу при изменении заряда от q_1 до q_2, можно либо воспользоваться определённым интегралом

$$A = \int_{q_1}^{q_2} dA = \frac{1}{C}\int_{q_1}^{q_2} q\,dq = \frac{1}{2C}(q_2^2 - q_1^2),$$

либо определить работу графическим способом (рис. 2). В последнем случае площадь заштрихованной трапеции дает значение полной работы:

$$A = \frac{U_1 + U_2}{2}(q_2 - q_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{q_2}{C} + \frac{q_1}{C}\right)(q_2 - q_1) = \frac{1}{2C}(q_2^2 - q_1^2).$$

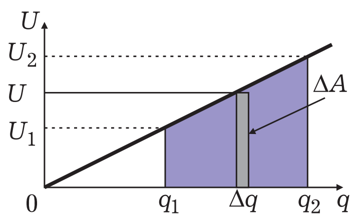

Рис. 2

2-й метод. Эту задачу можно решать на основе аналогии между механическими и электрическими колебаниями. Считаем, что масса грузика, прикреплённая к пружине, и индуктивность катушки из колебательного контура равны нулю. Деформированная пружина аналогична заряженному конденсатору. Установим соответствие между этими системами: ёмкость конденсатора аналогична обратной величине жёсткости, заряд конденсатора – координате движущегося конца пружины, напряжение между обкладками – силе, действующей на пружину.

Из курса механики известно, что работа, затраченная на деформацию пружины жёсткостью k, если её удлинение изменилось от x_1 до x_2, выражается так:

$$A = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2).$$

Если в этой формуле заменить соответствующие величины, получим формулу работы, совершённой при изменении заряда конденсатора:

$$A = \frac{1}{2C}(q_2^2 - q_1^2).$$

Посредством динамических аналогий задача решена оптимально, хотя первый, электростатический метод решения данной задачи более информативен.

Задача 2. Источник с ЭДС $\mathcal{E}$ и нулевым внутренним сопротивлением соединён последовательно с катушкой индуктивности L и конденсатором ёмкостью C (рис. 3). В начальный момент времени конденсатор не заряжен. Найти зависимость от времени заряда конденсатора и напряжения после замыкания ключа K.

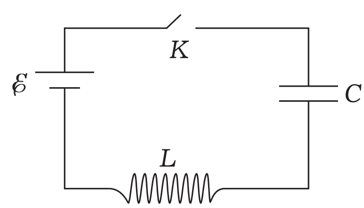

Рис. 3

Решение. Искать нужную зависимость, используя законы электромагнетизма, довольно сложно, поэтому целесообразно использовать механическую аналогию. На рис. 4 приведена аналогичная колебательная система. Аналогом источника с ЭДС может служить поле силы тяжести. При выдергивании подставки из-под прикреплённого к пружине груза начинаются его колебания.

Уравнение второго закона Ньютона имеет вид: $ma = mg - kx$. Обозначим ускорение груза через x'' и введём обозначение $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Из уравнения второго закона Ньютона получим дифференциальное уравнение второго порядка [4]:

$$x'' + \omega_0^2 x = g.$$

Решение данного дифференциального уравнения:

$$x(t) = x_0(1 - \cos\omega_0 t),$$

где $x_0 = \frac{mg}{k}$, $\omega_0 = \frac{k}{m}$.

Груз совершает гармоническое колебание около точки x_0. Смещение груза лежит в интервале $[0;\ 2x_0]$.

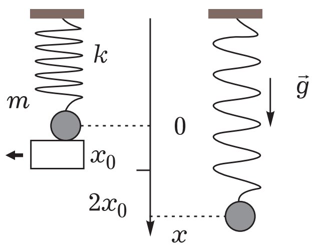

Рис. 4

Смещение груза $x(t)$ соответствует величине заряда на конденсаторе $q(t)$. Из аналогии между двумя колебательными системами установим, что величина заряда на конденсаторе со временем изменяется в интервале $[0;\ 2q_0]$.

Напишем зависимости от времени заряда и напряжения на конденсаторе после замыкания ключа:

$$q(t) = q_0(1 - \cos\omega_0 t), \text{ где } q_0 = C\mathscr{E},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}},\ U(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathscr{E}(1 - \cos\omega_0 t).$$

На рисунке 5 представлен график физических величин $x(t)$ и $q(t)$.

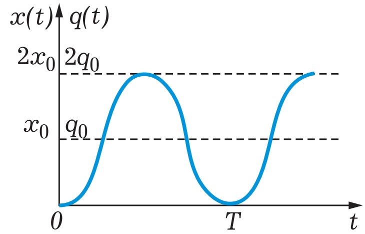

Рис. 5

Задача 3. а) Конденсатор ёмкости C и катушки индуктивности L_1 и L_2 включены в электрическую цепь, как на рис. 6. Ключ K замыкают.

а) Найти период электрических колебаний в этом контуре.

б) Найти наибольшие силы токов на каждой катушке, если конденсатор заряжен до напряжения U_0.

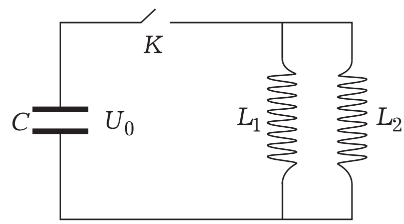

Рис. 6

Решение. а) Используем метод аналогии. Механическая аналогия данной электрической цепи представлена на рис. 7. Грузики массами m_1 и m_2 скреплены между собой пружинкой с жёсткостью k. Плоскость гладкая. Грузики сдвигают, сжимая пружину, затем их одновременно отпускают. Определить период возникших колебаний.

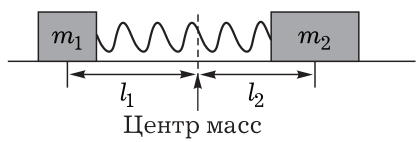

Рис. 7

Центр масс системы не должен двигаться, поэтому грузики колеблются в противофазе с одинаковой частотой, а их отклонения x_1 и x_2 от положения равновесия удовлетворяют соотношению $k_1x_1 = k_2x_2$, где k_1 и k_2 – коэффициенты жёсткости соответствующих кусков пружины длиной l_1 и l_2 (l_1 и l_2 – расстояния от грузиков до центра масс системы:

$$l_1 = l\frac{m_2}{m_1+m_2},\ l_2 = l\frac{m_1}{m_1+m_2}).$$

Известно, что удлинение $(1/n)$-й части пружины всегда n раз меньше удлинения всей пружины, т. е. $(1/n)$-я часть пружины имеет жёсткость в n раз большую, чем жёсткость всей пружины. Поэтому $k_1 = \frac{m_1+m_2}{m_2}k$. Отсюда следует, что период колебаний грузиков $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)k}}$.

Следовательно, период электрических колебаний в приведённом выше колебательном контуре

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{CL_1L_2}{L_1+L_2}}.$$

б) Из соображения аналогии установим соответствие электрических и механических величин. Напряжение на конденсаторе соответствует силе упругости пружины. Используем закон сохранения энергии для механической колебательной системы:

$$\frac{F_0^2}{2k} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2},$$

где F_0 – сила упругости сжатой пружины, v_1 и v_2 – максимальные скорости грузиков. Поскольку грузики колеблются в противофазе с одинаковой частотой, они одновременно достигают максимальной скорости. Центр масс системы остаётся неподвижным, значит, не изменится импульс колебательной системы. Импульс системы относительно плоскости равен нулю, поэтому $m_1v_1 = m_2v_2$. Решая систему уравнений, находим:

$$v_1 = F_0\sqrt{\frac{m_2}{m_2}\frac{1}{k(m_1+m_2)}},$$

$$v_2 = F_0\sqrt{\frac{m_1}{m_2}\frac{1}{k(m_1+m_2)}}.$$

Следовательно, наибольшие силы токов на каждой катушке равны:

$$I_1 = U_0\sqrt{\frac{L_2}{L_1}\frac{C}{L_1+L_2}},$$

$$I_2 = U_0\sqrt{\frac{L_1}{L_2}\frac{C}{L_1+L_2}}.$$

Задача 4. В схеме, изображённой на рисунке 8, левый конденсатор ёмкостью C_1 имеет заряд q_0, а правый – ёмкостью C_2 – не заряжен.

а) Найти уравнение изменения заряда конденсатора со временем после замыкания ключа K.

б) Определить количество выделившейся теплоты после установления гармонических колебаний в системе.

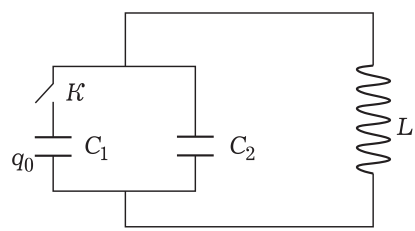

Рис. 8

Решение. Данное электрическое явление может наглядно продемонстрировать механическая аналогия, представленная на рисунке 9.

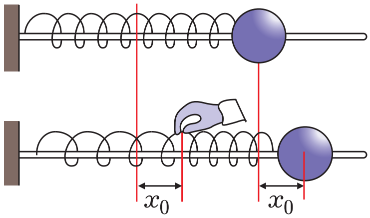

Рис. 9

Проведём эксперимент: захватим пружину за любой виток и растянем её левую часть на некоторую величину x_0 (рис. 9). Правая часть пружины остаётся в недеформированном состоянии, так что груз в начальный момент смещён из положения равновесия вправо на величину x_0 и покоится. Затем пружину отпустим, и возникают быстрые затухающие колебания самой пружины (из-за малости массы пружины по сравнению с массой груза период колебаний пружины очень маленькая величина). Из-за инертности груз не успевает заметно сдвинуться, пока происходят затухающие колебания пружины. После затухания быстрых колебаний натяжение в пружине перераспределяется, а смещение груза остается равным x_0. То есть часть потенциальной энергии деформированной пружины превращается в тепло. Если обозначить жёсткость левой части пружины через k_1, а правой части через k_2, для обратной величины общей жёсткости k можем написать так:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \text{ или } k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

Таким образом, груз на пружине будет совершать гармонические колебания по следующему закону:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}.$

На начальном этапе внешней силой была совершена механическая работа, равная $k_1 x_0^2 / 2$. После установления гармонических колебаний механической системы её полная энергия стала $k x_0^2 / 2$. Следовательно, выделившееся тепло:

$$Q = \frac{k_1 x_0^2}{2} - \frac{k x_0^2}{2}.$$

Вернёмся к электрической системе, представленной в условии задачи. При замыкании ключа возникают быстрые затухающие колебания в контуре, состоящем из конденсаторов и соединяющих их проводов. Период таких колебаний очень мал, так как мала индуктивность соединительных проводов по сравнению с индуктивностью катушки. В результате этих колебаний заряд на пластинах конденсаторов перераспределяется, после чего два конденсатора можно рассматривать как один.

После затухания быстрых колебаний в системе происходят колебания, как в контуре с одним конденсатором ёмкостью $C_1 + C_2$, заряд которого в начальный момент равен q_0:

$$q(t) = q_0 \cos \omega_0 t, \text{ где } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L(C_1 + C_2)}}.$$

Количество теплоты, выделившейся в электрической системе после установления гармонических колебаний, равно

$$Q = \frac{q_0^2}{2C_1} - \frac{q_0^2}{2(C_1 + C_2)}.$$

Задача 5. В электрической цепи из двух одинаковых конденсаторов ёмкостью C и катушки с индуктивностью L, соединённых последовательно (рис. 10), в начальный момент один конденсатор имеет заряд q_0, а второй не заряжен. Как будет изменяться со временем сила тока в контуре и заряды конденсаторов после замыкания ключа K?

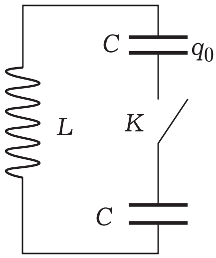

Рис. 10

Решение. Механическая аналогия данной электрической системы показана на рис. 11. Грузик удерживается на гладкой плоскости между одинаковыми пружинами жёсткостью k так, что левая пружина деформирована, а правая – нет. Если отпустим грузик, он начнёт совершать гармонические колебания.

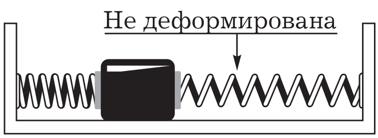

Рис. 11

Из соображений симметрии колебания грузика происходят между точками 0 и x_0 с амплитудой $A = x_0 / 2$. Эти выводы позже докажем более строго. Считаем грузик материальной точкой. Скорость грузика меняется по гармоническому закону: $v = v_0 \sin \omega_0 t$, где ω_0 – частота колебаний и v_0 – амплитуда скорости (рис. 12).

Общая жёсткость системы пружин равна $2k$. Поэтому $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$.

Для того чтобы найти v_0, воспользуемся законом сохранения энергии. Если x_1 – смещение левой пружины в момент времени t, то координата правой пружины равна $x_2 = x_0 - x_1$, и согласно закону сохранения энергии

$$\frac{kx_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} + \frac{k(x_0 - x_1)^2}{2},$$

где v – скорость грузика в момент времени t. Отсюда

$$v^2 = \frac{2k}{m} x_1 (x_0 - x_1). \qquad (*)$$

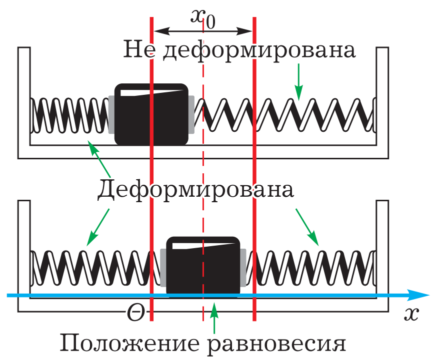

Рис. 12

Исследуя на экстремум правую часть этого уравнения, убедимся, что она максимальна при $x_1 = x_0 - x_1 = x_0 / 2$. Поэтому для амплитуды скорости грузика получаем

$$v_0 = x_0 \sqrt{k / 2m}.$$

Следовательно,

$$v = x_0 \sqrt{\frac{k}{2m}} \sin \omega_0 t.$$

Подставляя это выражение в (*), имеем:

$$x_1 = \frac{x_0}{2}(1 + \cos \omega_0 t).$$

Координата второй пружины

$$x_2 = x_0 - x_1 = \frac{x_0}{2}(1 - \cos \omega_0 t).$$

Все эти данные из механической аналогии перенесём на электрическую систему и получим следующие результаты.

Циклическая частота электрических колебаний в контуре равна:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}}.$$

Сила тока в нём меняется по гармоническому закону:

$$I = q_0\sqrt{\frac{1}{2LC}}\sin\omega_0 t.$$

Амплитуда тока равна

$$I_0 = q_0\sqrt{\frac{1}{2LC}}.$$

Заряд первого конденсатора меняется со временем:

$$q_1 = \frac{q_0}{2}(1+\cos\omega_0 t).$$

Для заряда второго конденсатора:

$$q_2 = q_0 - q_1 = \frac{q_0}{2}(1-\cos\omega_0 t).$$

Следующая задача иллюстрирует обратный переход от механической системы к аналогичной электрической. Именно такой вид аналогии нашел широкое применение в науке и технике. Здесь уместно привести высказывание на этот счёт академика Л.И. Мандельштама: «Попутно я хотел бы спросить, что для вас нагляднее: механические или электрические системы? Кельвин говорил: “Я могу сказать, что понял явление, если я могу составить для него механическую модель”. Многие современные физики сказали бы обратное: “Я понимаю механическое явление, если я создал для него электрическую модель”» [5].

Задача 6. Найти максимальную скорость груза на пружине в вязкой среде при действии на него переменной силы $f = 10\cdot\sin 10t$ (Н) (рис.13). Масса груза m = 0,1 кг, жёсткость пружины k = 2 Н/м, коэффициент сопротивления вязкой среды $\beta = 1$ (Н· м)/с.

Примечание. Сила сопротивления вязкой среды выражается по формуле $F_{вязк} = -\beta v$.

Решение. В связи с тем, что такой сложный процесс, какой представлен в условии этой задачи, в школьном курсе физики не изучается, обратимся к аналогии. Аналогичная электрическая система выглядит как колебательный контур, содержащий внешний источник переменного тока (рис. 14). Из закона Ома для переменного тока максимальная сила тока:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

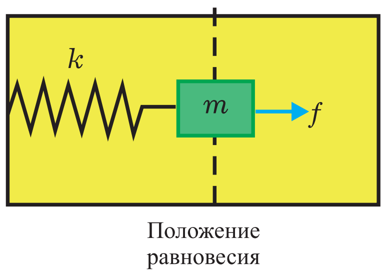

Рис. 13

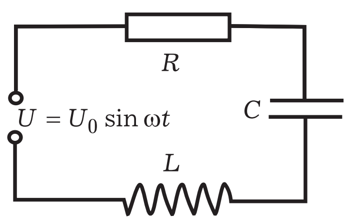

Рис. 14

Установим соответствия характеристик механической и электрической систем:

$\beta \leftrightarrow R,\quad f \leftrightarrow U,\quad m \leftrightarrow L,\quad k \leftrightarrow 1/C.$

Учитывая аналогичность систем, получаем:

$$v_0 = \frac{F_0}{\sqrt{\beta^2 + (\omega m - \frac{k}{\omega})^2}}.$$

При подстановке данных из условия задачи $\beta = 1(\text{Н} \cdot \text{м})/c$, $F_0 = 10\text{Н}$, $\omega = 10\text{с}^{-1}$, $m = 0{,}1\,\text{кг}$ окончательно получаем $v_0 = 7{,}8$ м/с.

Заключение, или Фейнмановская оценка динамических аналогий

В заключение отметим, что рассмотренные нами динамические аналогии широко используются в прикладных физических исследованиях и инженерных расчётах. Интересно, что принцип работы *аналоговой вычислительной машины* основан на аналогичности механического и электрического процессов. Лауреат Нобелевской премии по физике американский физик-учёный Ричард Фейнман об этом говорил так: «Предположим, что мы построили автомобиль и хотим узнать, сильно ли его будет трясти на ухабах. Соберём электрическую цепь, в которой индуктивности скажут нам об инерции колёс, об упругости колёс представление дадут ёмкости, сопротивления заменят амортизаторы и т. д. В конце концов, мы заменим элементами цепи все части автомобиля. Теперь дело за ухабами. Хорошо, подадим на схему напряжение от генератора – он сможет изобразить любой ухаб; измеряя заряд на соответствующем конденсаторе, мы получаем представление о раскачке колеса. Измерив заряд (это сделать легко), мы решим, что автомобиль трясёт слишком сильно. Надо что-то сделать. То ли ослабить амортизаторы, то ли усилить их. Неужели придётся переделывать автомобиль, снова проверять, как его трясет, а потом снова переделывать? Нет! Просто нужно повернуть ручку сопротивления: сопротивление номер 10 – это амортизатор номер 3; так можно усилить амортизацию. Трясёт ещё сильнее – не страшно, мы ослабим амортизаторы. Всё равно трясёт. Изменим упругость пружины (ручка номер 17). Так мы всю наладку произведём с помощью электричества, многократным поворотом ручек.

Вот вам *аналоговая вычислительная машина*. Так называют устройства, которые имитируют интересующие нас задачи, описываемые теми же уравнениями, но совсем другой природы. Эти устройства легко построить, на них легко провести измерения, отладить их, и... разобрать!» [7].

Литература

1. *Мукушев Б.А.* Использование метода «от противного» при решении физических задач на доказательства // Потенциал – 2012 – №7.
2. *Мукушев Б.А.* «Энергия связи» в задачах // Потенциал – 2011 – №11.
3. *Мукушев Б.А., Мукушев М.А.* Характеристики гравитационных полей небесных тел // Потенциал – 2016 – №6.
4. *Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б., Чаругин В.М.* Учебник. Физика, 11 класс. – М.: «Просвещение». –2010 г.
5. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. – М.: Наука, 1972.
6. Фейнмановские лекции по физике. – М.: Мир, 1977. – Т.1–2.
7. *Козел С.М.* Физические аналогии // Квант – 1975. – №11.
8. *Бутиков Е.И.* и др. Физика для поступающих в вузы. – М.: Наука. – 1982.