



### Варламов Сергей Дмитриевич

*Кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры физики специализированного  
учебно-научного центра (СУНЦ) МГУ им. М.В. Ломоносова,  
Член жюри Московской городской  
и Всероссийской олимпиады школьников по физике.*

## Что там за стенкой?

В статье рассматриваются эксперименты с сильногазированными напитками. В состав этих напитков входит углекислый газ  $CO_2$ . Он находится вместе с жидкостью в закрытой бутылке под значительным давлением. Стенки бутылки должны быть весьма прочными, чтобы выдержать это давление. Целью различных по характеру экспериментов является измерение давления газа в бутылке и установление количества (массы) газа, содержащегося в бутылке.

Описанные в статье эксперименты обеспечивают разную точность измерений и поэтому дополняют друг друга. Простые измерения геометрических размеров и использование газовых законов позволяют грубо оценить давление газа в бутылке с помощью резинового надувного (воздушного) шарика. Применение в качестве оборудования медицинского шприца позволяет провести оценку давления газа другим способом и сравнить результаты. Изучение акустического звучания бутылки вместе с напитком после ударов по бутылке позволяет с приличной точностью установить, какая часть газа выходит из бутылки после цикла «открытие-закрывание». Анализ результатов этого эксперимента даёт оценку для количества газа  $CO_2$ , которое было в бутылке до её открывания.

### Объект исследования приятен и вкусен

Трудно перечислить все возможные способы применения пластиковых бутылок, которые уже описаны неутомимыми исследователями физиками и мастерами с очень умелыми (очумелыми) ручками. Это и приборы для изучения газовых законов, и корпуса водно-воздушных ракет, и... и... и...

Меня давно интересовало, почему в пластиковых бутылках с сильногазированными напитками после очередного цикла «открыл-отпил-закрыл» вновь поднимается давление? Сколько газа выходит из бутылки при откручивании крышки, и почему он выходит не весь? Какое примерно количество углекислого газа  $CO_2$  содержится в бутылке? Как без использования специального оборудования, манометра, штуцеров в пробках и шлангов измерить давление газа?



Поскольку у нас в стране большинство населения, в том числе и школьники, пьют такие напитки, и в ожидании новогодних праздников они приобретаются в большом количестве, то каждый может задаться теми же вопросами и попытаться найти на них свой ответ.

Будем исследовать «Sprite» в двухлитровых бутылках зелёного цвета. В состав напитка входят: вода; сахар – 7 г /100 мл; диоксид углерода; лимонная кислота и ещё кое-какие вещества. Эти сведения можно почерпнуть из этикетки, наклеенной на бутылку. К сожалению, о количестве углекислого газа данных нет, а именно оно нас и интересует. В только что приобретённой бутылке с напитком, которую ещё ни разу не открывали, имеется не только жидкость, но и газ в объеме, который можно узнать прямыми измерениями с помощью линейки с миллиметровыми делениями. Чтобы оценить давление газа, которое было в этой газовой части объёма закрытой бутылки, нужно заранее измерить этот объём газа. Для разных бутылок величина объёма, по-видимому, может быть разной. Наши измерения дали примерную величину 160 мл. Объём газа, находившегося в 160 мл, увеличивается в несколько раз после открывания бутылки. Чтобы не выпустить газ просто в воздух, воспользуемся детским резиновым (воздушным) шариком. Шарик без газа внутри (сдутый) одевается на горлышко закрытой бутылки так, что прилегает к корпусу бутылки «за крышкой», крышка бутылки слегка поворачивается до появления характерного шипения. При этом шарик надувается до объёма примерно 0,8 литра. Крышку вновь закручивают, а шарик поворачивают относительно бутылки вокруг её оси на несколько оборотов. При этом резиновые стенки шарика вблизи отверстия скручиваются и газ, оказавшийся в шарике, запирается в нём. Поскольку сразу после открывания бутылки из жидкости выходит совсем немного пузырьков, можно считать, что количество газа не изменилось. Новое давление газа после расширения равно примерно одной атмосфере. Разность давлений газа внутри шарика и атмосферного давления снаружи значительно меньше атмосферного давления, и ею при проведении грубой оценки можно пренебречь. Можно считать, что температура газа не изменилась – она была и осталась комнатной (если эксперимент проводится в комнате). Используя газовый закон Бойля – Мариотта, можно получить грубую оценку давления газа, когда он находился в закрытой бутылке:

$$P \approx 1 \text{ атм} \times (800 \text{ мл}) / (160 \text{ мл}) \approx 5 \text{ атм.}$$

Чтобы убедиться в том, что из бутылки выходит именно углекислый газ, достаточно аккуратно снять шарик с горлышка бутылки и «перелить» газ из шарика в кружку подходящего объёма. Этот эксперимент показывает, что газ из бутылки имеет большую плотность, чем воздух. Для демонстрации того, что газ в кружке негорючий, в неё помещают зажжённую спичку. Оказавшись в кружке, спичка гаснет. Она, правда, может погаснуть и в других негорючих газах, но ученики, знающие химию, могут и другими способами удостовериться в том, что из бутылки выходит именно углекислый газ.

### **Один эксперимент – хорошо, а два – лучше**

С помощью одноразового шприца для инъекций с максимальной ёмкостью 5 мл можно *точнее* измерить давление в бутылке с этим сильногазированным напитком после одного цикла «открыл-закрыл». Для проведения измерений этот шприц нужно дополнительно подготовить. Следует сначала отрезать ножницами выступы на корпусе шприца, которые предназначены для удобства выдавливания жидкости из шприца одной рукой. После такой *операции* шприц свободно проходит в горлышко пластиковой бутылки. Поршень открытого шприца передвигается в такое положение, чтобы внутри оказалось 5 мл воздуха. Отверстие шприца закрывается резиновым колпачком (такие применяются для предотвращения потерь чернил из гелевых ручек).

Итак, шприц подготовлен. Внутри него находится воздух объёмом 5 мл при атмосферном давлении  $P_0 = 1$  атм. Процедура измерений такова. Сначала аккуратно открываем бутылку – медленно, с шипением выходящего газа, стараясь не выпустить слишком много газа из жидкости вместе с пузырьками. В открытую бутылку помещаем подготовленный шприц ёмкостью 5 мл и снова закрываем бутылку пробкой. Чтобы давление газа в бутылке быстро поднялось, нужно несколько раз сильно встряхнуть бутылку вместе с напитком. Через прозрачные стенки бутылки хорошо видно, что в шприце объём воздуха уменьшился с 5 мл до 1 мл, то есть давление воздуха стало равным 5 атм. Здесь мы снова пользуемся законом Бойля – Мариотта. На этом измерения ещё не закончились – нужно вновь открыть бутылку и аккуратно вынуть из неё шприц, не сдвигая руками поршень. Взглянув на шприц, мы увидим, что поршень не вернулся в прежнее положение (5 мл), а «застрял» на отметке 3,5 мл, то есть давление воздуха внутри шприца равно  $(5/3,5) P_0$ . Если предположить, что сила трения  $F_{\text{тр}}^{\text{ен}}$  между поршнем и стенками шприца одинакова как при сжатии воздуха, так и при его расширении, то полученных экспериментальных данных хватает, чтобы вычислить давление газов  $P_{\text{газ}}$  внутри бутылки после операции «взбалтывания» напитка. Обозначим символом  $S$  площадь поршня шприца. Запишем условия равновесия для поршня шприца в двух случаях. Внутри бутылки при внешнем давлении  $P_{\text{газ}}$ , и снаружи, когда внешнее давление равно атмосферному. Влиянием гравитации пренебрежём.

$$5P_0S + F_{\text{тр}}^{\text{ен}} = P_{\text{газ}}S,$$

$$\frac{5}{3,5}P_0S - F_{\text{тр}}^{\text{ен}} = P_0S.$$

Отсюда следует:

$$P_{\text{газ}} \approx 5,4P_0 = k_0P_0.$$

Грубая предварительная оценка 5 атм и более точное вычисление (5,4 атм) не противоречат друг другу. То есть сначала давление газа в бутылке в  $k_0 = 5,4$  раза больше, чем атмосферное давление. Сжимаемость воды невелика. По данным справочника она равна  $4,5 \times 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ , поэтому такому изменению давления ( $\Delta P = 4,4 \times 10^5 \text{ Па}$ ) соответствует изменение объёма воды (при начальной величине 2000 мл), равное примерно – 0,36 мл, то есть можно считать объём воды практически неизменным.

Объём газа в закрытой бутылке (часть объёма бутылки, не занятая жидкостью) составлял до её открывания примерно 160 мл. После открывания бутылки этот объём уменьшился примерно до 130 мл (вычислено на основании измерений с помощью миллиметровой линейки).

После открывания бутылки в первый раз из неё выходит количество углекислого газа, которое при комнатной температуре и при атмосферном давлении  $P_0$  занимает объём, равный примерно:

$$\Delta V = (160 \times 5,4 - 130) \text{ мл} \approx 730 \text{ мл}.$$

Полученная величина соответствует тому количеству газа, которое было получено из бутылки с помощью воздушного шарика (0,8 л).

И эксперимент с воздушным шариком, и эксперимент со шприцем не обеспечивают высокой точности измерений, и они не дают возможности оценить долю газа, которая покидает бутылку после очередного её открывания. Поэтому для повышения точности оценки количества содержащегося в бутылке углекислого газа был проведён ещё один технически немного более сложный эксперимент.

## Необычный резонатор

Бутылка с жидкостью, находящейся под давлением, представляет собой резонатор, подобный, как ни странно выглядит это сравнение, барабану. От размеров бутылки, давления внутри неё и от механических характеристик пластиковых стенок бутылки зависят частоты, на которых звучит бутылка после возбуждения в ней колебаний. Бутылку можно подвесить на нити за горлышко и ударами линейкой (ложкой, пальцем) по стенкам заставлять её звучать. Звук, излучаемый бутылкой, весьма продолжителен, и на слух состоит из нескольких «нот». Если известна связь между частотой колебаний и давлением внутри бутылки, то можно установить, какая доля содержащегося в бутылке газа выходит наружу после очередного аккуратного открывания бутылки. Для этого нужно измерить частоты звучания бутылки до и после очередного цикла: «открыл – закрыл – взболтал». Как измерить частоты, на которых звучит бутылка?

Проанализировать звук можно с помощью «домашних средств». Известно, что компьютеры сейчас встречаются в домах школьников гораздо чаще, чем манометры, термометры и другие физические приборы, поэтому для большинства школьников и учителей физики добыть компьютер со звуковой картой существенно проще, чем какой-нибудь манометр. Вот его-то (компьютер) и можно использовать в качестве физического прибора для получения информации о том, что происходит внутри бутылки. Конечно, к звуковой карте должен быть подключён микрофон, и в компьютере должна быть установлена программа анализа звуковых сигналов. Достать такую программу при наличии подключения компьютера к Интернету не представляет никакого труда.

В приведенной ниже таблице указаны величины некоторых (самых низких) резонансных частот, на которых «звучит» бутылка в зависимости от количества  $N$  проведённых циклов «открыл-закрыл-взболтал». Точность измерения частоты в той программе, которой я пользовался, была примерно 3 Гц. Измерения проводились с одной единственной бутылкой, то есть статистика по нескольким сериям подобных экспериментов может быть получена и проанализирована заинтересовавшимися читателями самостоятельно.

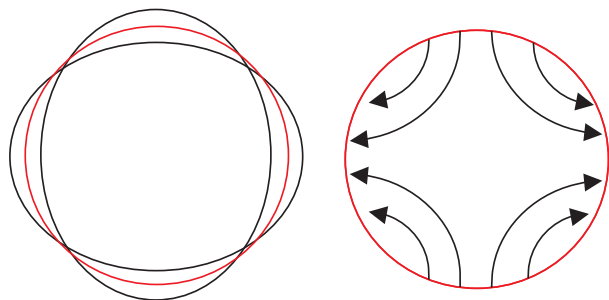
$N$ / Частота (Гц)	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
0	150	300	450	620
1	145	285	430	590
2	140	280	400	550
3	130	260	390	540
4	125	250	350	480

Колебания на указанных в таблице частотах возникали, если удары производились по боковой поверхности бутылки, то есть импульс удара был направлен перпендикулярно оси симметрии бутылки.

Если же ударять по доньшку вдоль оси бутылки, то дополнительно возникали колебания на частотах 250 Гц и 350 Гц. По мере увеличения числа  $N$  и эти частоты постепенно уменьшались.

Самая низкая частота «поперечных к оси» колебаний жидкости в бутылке, соответствовала, по-видимому, колебаниям, при которых форма бутылки в разные моменты времени имеет вид (если смотреть на неё вдоль оси), показанный на рисунке слева. Отклонения формы поперечного к оси бутылки сечения от круга (линия красного цвета) показаны непропорционально большими, чтобы рисунок был наглядным. На рисунке справа

схематически показано распределение скоростей жидкости в момент времени, соответствующий прохождению равновесного положения.



При указанном изменении формы в процессе колебаний вблизи положения равновесия периодически изменяется потенциальная и кинетическая энергии системы «стенки бутылки – жидкость». Кинетическая энергия системы связана с движением жидкости (масса стенок бутылки много меньше массы жидкости в бутылке). Потенциальная энергия системы колеблется вблизи минимального значения, имеющего место при форме поперечного сечения бутылки в виде круга. Эта энергия связана с упругим дополнительным растяжением стенок бутылки, возникающим при деформациях бутылки.

Чтобы найти связь между частотой колебаний и давлением внутри бутылки, нужно вычислить кинетическую и потенциальную энергии колеблющейся системы. При малых потерях затухание колебаний происходит медленно, и можно считать, что колебания близки по форме к гармоническим.

### **Сохранение энергии и уравнение колебаний**

Обозначим равновесные координаты небольшого (физически малого) объёма жидкости внутри бутылки в плоскости, перпендикулярной оси бутылки, через  $x_0$  и  $y_0$ . Начало координат совпадает с осью бутылки. Предположим, что все точки жидкости совершают колебания, которые описываются следующей зависимостью координат от времени:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 [1 + \alpha \cos(\omega t)], \\y(t) &= y_0 [1 - \alpha \cos(\omega t)].\end{aligned}$$

Здесь  $\alpha = \text{const} \ll 1$ . При такой зависимости координат от времени суммарная площадь сечения бутылки очень мало отличается от равновесной величины. Скорость движения каждой точки равна:

$$V(t) = \alpha \omega \sin(\omega t) \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Как видно из этой формулы, скорость каждой точки пропорциональна расстоянию  $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  от этой точки до оси бутылки.

Пусть высота жидкости в цилиндрической части бутылки равна  $H$ , плотность жидкости  $\rho$ , радиус равновесной окружности  $R$ . Кинетическая энергия всей движущейся жидкости в бутылке равна:

$$E_{кин} = \frac{\rho H [\alpha \omega \sin(\omega t)]^2}{2} \int_0^R 2\pi r^3 dr = \frac{1}{4} \rho H \pi R^4 [\alpha \omega \sin(\omega t)]^2.$$

Стенки бутылки растянуты и сдерживают внутреннее давление в бутылке. Сила натяжения стенки  $F$  (если её измерить поперёк мысленного разреза вдоль оси бутылки) равна:

$$F = \frac{1}{2} H \times 2R \times P_0 (k_0 - 1).$$

В связи с тем, что объём жидкости практически не изменяется, можно найти увеличение длины  $\Delta L$  стенки бутылки, измеренной по периметру сечения, перпендикулярного оси бутылки. И затем, соответственно, можно найти связанное с этим дополнительным растяжением стенок бутылки увеличение потенциальной энергии деформации стенок

$$\pi R \left[ 1 + \alpha \cos(\omega t) \right] \left( 1 + \frac{\Delta L}{2\pi R} \right)^2 \times R \left[ 1 - \alpha \cos(\omega t) \right] \approx \pi R^2,$$

$$\left[ 1 - \alpha^2 \cos^2(\omega t) \right] \left( 1 + \frac{\Delta L}{2\pi R} \right)^2 \approx 1,$$

$$\Delta L = \pi R \alpha^2 \cos^2(\omega t).$$

Далее находим увеличение потенциальной энергии деформации стенок бутылки:

$$E_{ном} = F \Delta L = H R P_0 (k_0 - 1) \pi R \left[ \alpha \cos(\omega t) \right]^2.$$

При колебаниях сохраняется сумма кинетической и потенциальной энергий:

$$E_{кин} + E_{ном} = \frac{1}{4} \rho H \pi R^4 \left[ \alpha \omega \sin(\omega t) \right]^2 + H R P_0 (k_0 - 1) \pi R \left[ \alpha \cos(\omega t) \right]^2 = const.$$

Это условие может быть выполнено только в том случае, если множители при  $\cos^2(\omega t)$  и при  $\sin^2(\omega t)$  будут одинаковыми. Отсюда следует, что:

$$\omega^2 = \frac{4P_0(k_0 - 1)}{\rho R^2},$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4(k_0 - 1)P_0}{\rho R^2}}.$$

При измеренных значениях отношения давления в бутылке к атмосферному давлению  $k_0 = 5,4$  и радиуса поперечного сечения бутылки  $R = 5 \div 4,5$  см получается частота  $f$ , равная  $133 \div 148$  Гц. Вычисленная величина весьма близка к самой низкой (150 Гц) частоте колебаний, полученной экспериментально.

## Сколько всего углекислого газа в бутылке?

Из полученной таблицы частот колебаний и выведенной формулы можно сделать вывод о том, что эта самая низкая частота колебаний пропорциональна корню квадратному из величины дополнительного давления внутри бутылки:  $f \sim \sqrt{(k_0 - 1)P_0}$ . Первое открывание бутылки и «сбрасывание» объёма газа, приведённого к атмосферному давлению,  $\Delta V = 0,73 \div 0,8$  л приводит к уменьшению частоты колебаний на 5 Гц. Относительное изменение частоты при этом равно  $5 \text{ Гц} / 150 \text{ Гц} = 1/30$  от первоначальной величины, что видно из таблицы. Если считать, что равновесное давление в бутылке пропорционально полному количеству углекислого газа в ней, то можно составить несколько соотношений. В них  $\beta$  – это некоторая постоянная величина,  $V$  – это объём, который займёт при атмосферном давлении весь углекислый газ, содержащийся в бутылке, а  $k_1$  – это отношение давления газа в бутылке к атмосферному давлению после одного цикла «открыл-закрыл-взболтал»:

$$k_0 P_0 = 5,4 P_0 = \beta V; \quad k_1 P_0 = \beta (V - \Delta V); \quad \sqrt{\frac{(k_0 - 1)P_0}{(k_1 - 1)P_0}} = \frac{30}{29}.$$



$$k_1 \approx 5,11; \quad \frac{5,4}{5,11} = \frac{V}{V - \Delta V}; \quad V \approx 18,6 \times \Delta V \approx 15 \div 13,6 \text{ л.}$$

Итак, в 2-х литровую бутылку поместилось столько  $CO_2$ , сколько его содержится примерно в 14 литрах газа при комнатной температуре и атмосферном давлении или около 25 грамм. Если газ в таком количестве просто сжать при постоянной температуре до объёма 2 литра, то давление поднимется до величины 6,5 атм. Эта величина мала в сравнении с давлением насыщенного пара  $CO_2$  при комнатной температуре (57 атм). Но заметим, что большую часть объёма бутылки (2000 мл из 2160 мл) уже занимает вода! Получается, что молекулы углекислого газа «встраиваются» в полости между молекулами воды (растворяются в ней) или образуют с ними химическое соединение: угольную кислоту  $H_2CO_3$ . В учебнике химии отмечается, что растворимость углекислого газа в воде «мала»: в одном объёме воды при 20°С растворяется 0,88 объёма газа, а при 0°С – 1,7 объёма газа. Если ориентироваться на величину растворимости газа в воде, то полученная оценка давления 6,5 атм вполне соответствует экспериментально измеренной величине 5,4 атм.

Итак, проводя описанные эксперименты, мы ставили перед собой цель измерить давление газа в бутылке и узнать общее количество газа в бутылке. Поскольку мы использовали данные, полученные на основе весьма грубых оценок, наши результаты (давление около 5,4 атм и масса газа примерно 25 грамм) имеют такую же невысокую точность, как и проведённые оценки. Заинтересовавшиеся проблемой читатели могут, по-видимому, существенно улучшить точность измерений, если усовершенствуют технику эксперимента.

### **Как быстро устанавливается равновесие газа в бутылке?**

Скорость установления равновесного распределения газа в объёме бутылки, то есть внутри жидкости и в свободной от жидкости части объёма бутылки, зависит от соотношения между объёмом, занятым, и объёмом, не занятым жидкостью, от площади поверхности, через которую молекулы углекислого газа ( $CO_2$ ) путешествуют из одной среды в другую, а также от температуры жидкости. Ещё на скорость этого процесса могут влиять те самые *кое-какие вещества*, о которых есть упоминание на этикетке бутылки. Если не взбалтывать жидкость в бутылке перед её открыванием, то в ней поверхность раздела «жидкость–газ» невелика, так как крупных пузырьков газа в жидкости нет – они все давно всплыли и образовали один газовый объём в верхней части бутылки. Аккуратное открывание бутылки не приводит к образованию пузырьков в жидкости, и давление в верхней части бутылки сразу становится равным атмосферному. При этом концентрация растворенного в воде углекислого газа остаётся соответствующей высокому прежнему давлению. Открытой бутылка держится небольшое время, а затем снова закрывается. После завершения очередного цикла «открыл-закрыл» давление в верхней части бутылки постепенно (в течение часов) поднимается за счёт выделяющегося из жидкости газа, и со временем устанавливается новое равновесное состояние, соответствующее новым (меньшим) величинам давления газа и концентрации молекул газа в жидкости. Чтобы сократить время эксперимента, жидкость в закрытой бутылке можно взболтать. Тогда образовавшиеся в ней пузырьки значительно ускоряют процесс установления равновесия.

Вопрос в подзаголовке последней части статьи поставлен. Подготовить эксперимент и придумать теоретическую модель явления заинтересовавшиеся читатели, как мне кажется, должны попробовать самостоятельно!