**Чивилёв Виктор Иванович**

к.ф.-м.н., доцент кафедры общей физики МФТИ, заслуженный работник высшей школы, заместитель председателя научно-методического совета ЗФТШ при МФТИ, член жюри Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Закон электромагнитной индукции в форме, найденной Фарадеем

Закон электромагнитной индукции в современной формулировке связывает ЭДС индукции в контуре и скорость изменения магнитного потока. Есть ещё одна запись закона электромагнитной индукции, форма которой предложена Фарадеем. В ней связаны изменение магнитного потока, прошедший заряд и сопротивление контура. Фарадей нашёл универсальную закономерность, не зависящую от условий проведения опыта. Есть ряд задач для школьников, в которых фактически требуется вывести эту универсальную закономерность для конкретного эксперимента. Часто приводится приближённое и сомнительное решение, но с правильным ответом. Для прояснения ситуации и служит эта небольшая статья, в конце которой решены типичные задачи.

1. Открытие Фарадея

М. Фарадей из своих опытов заключил, что величина заряда q , прошедшего по цепи пропорциональна изменению магнитного потока $\Delta\Phi$, пронизывающего соответствующий контур, и обратно пропорциональна сопротивлению цепи R :

$$q \sim \frac{\Delta\Phi}{R}.$$

Это соотношение представляет закон электромагнитной индукции в форме, найденной Фарадеем.

2. Приближённый вывод закона электромагнитной индукции в форме, найденной Фарадеем

Дадим приближённый вывод, который достаточно распространён и известен.

Пусть проводящий контур, полное сопротивление которого R , находится во внешнем магнитном поле. Контур может



представлять собой отдельный виток или катушку, концы которой замкнуты через резистор. Пусть за некоторое время магнитный поток через контур изменился на $\Delta\Phi$. Найдём заряд, протёкший по контуру (через произвольное поперечное сечение контура) за время опыта.

В течение опыта ЭДС индукции в контуре

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \text{ ток в контуре } I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{\Delta\Phi}{R\Delta t}.$$



Протёкший заряд $q = I \Delta t = -\frac{\Delta\Phi}{R}$. Итак,

получили, что при изменении магнитного потока через контур на $\Delta\Phi$ в контуре с сопротивлением R протекает заряд

$$q = -\frac{\Delta\Phi}{R}. \quad (1)$$

К этому выводу, да и к самой постановке задачи можно предъявить претензии и задать немало вопросов. Читатель, встречавшийся с формулой (1) при решении конкретнейших задач, мог задать ряд вопросов самому себе, другим или получить вопросы от кого-либо.

Перечислим возможные вопросы.

- 1) Изменение потока $\Delta\Phi$ есть изменение потока внешнего поля, собственного (созданного собственным током) или это изменение суммарного потока?
- 2) Как влияет на ответ индуктивность контура?
- 3) Время опыта Δt мало или необязательно?
- 4) Какой момент считать концом опыта?
- 5) ЭДС индукции и ток в цепи в течение опыта постоянны (как предполагалось неявно в приближённом выводе) или нет?
- 6) Какой смысл знака «минус» в выражении для заряда q ?

При отсутствии ответа на эти вопросы может сложиться впечатление, что физика – наука туманная и расплывчатая и её нельзя причислять к точным наукам.

Для ответа на поставленные вопросы уточним формулировку задачи и приведём строгий вывод (1).

3. Строгий вывод закона электромагнитной индукции в форме, найденной Фарадеем

Формулировка задачи. *Проводящий контур, полное сопротивление которого R , находится во внешнем магнитном поле. В течение некоторого времени (времени опыта) суммарный магнитный поток внешнего и собственного полей изменился на $\Delta\Phi$. Найти заряд, протёкший через контур за время опыта.*

Дадим пояснения к формулировке. Проводящий контур – это отдельный виток произвольной формы или катушка индуктивности. Время опыта необязательно мало и есть произвольный интервал времени в некотором эксперименте. Внешнее магнитное поле, ток в контуре, индуктивность контура могут изменяться по разным причинам до, во время и после опыта. Поэтому за время опыта изменяется как магнитный поток от внешнего поля, так и магнитный поток от собственного поля контура. Суммарный поток изменяется на $\Delta\Phi$. При этом скорость изменения магнитного потока (суммарного) не обязательно постоянна, не постоянны ЭДС и ток в контуре во время опыта. Ток в начале и в конце опыта необязательно нулевой, так как опыт может быть составной частью более длительного эксперимента.

Решение. Разобьём время опыта на сколь угодно малые интервалы Δt_k . Пусть за время Δt_k суммарный магнитный поток от внешнего и собственного полей изменился на $\Delta\Phi_k$. ЭДС индукции в контуре

$$\mathcal{E}_k = -\frac{\Delta\Phi_k}{\Delta t_k}. \text{ Здесь } \frac{\Delta\Phi_k}{\Delta t_k} \text{ при } \Delta t_k \rightarrow 0 \text{ есть}$$

производная магнитного потока по времени, обозначаемая часто через Φ' или $\frac{d\Phi}{dt}$. По

этому записанное выражение для \mathcal{E}_k даёт мгновенное значение ЭДС и в этом смысле это выражение правильное и строгое. По закону Ома ток в контуре в течение Δt_k

$$\text{равен } I_k = \frac{\mathcal{E}_k}{R} = -\frac{\Delta\Phi_k}{R\Delta t_k}. \text{ Переносимый за}$$

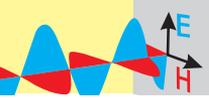
ряд за это время

$$\Delta q_k = I_k \Delta t_k = -\frac{\Delta\Phi_k}{R}.$$

Сложим равенства такого вида для всех Δt_k :

$$\Sigma \Delta q_k = -\frac{\Sigma \Delta\Phi_k}{R}.$$

Здесь $\Sigma \Delta q_k = q$ – протёкший за время опыта заряд, $\Sigma \Delta\Phi_k = \Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi$ –



изменение суммарного магнитного потока через контур, Φ_1 и Φ_2 начальный и конечный суммарные потоки. Получаем, что *за время произвольного изменения суммарного магнитного потока внешнего и собственного полей на $\Delta\Phi$ в проводящем контуре с сопротивлением R проходит заряд*

$$q = -\frac{\Delta\Phi}{R}. \quad (1')$$

Результат совпал с полученной приближённой формулой (1).

На ряд поставленных выше вопросов ответы уже получены при разъяснении формулировки задачи и в процессе решения.

Разберёмся с влиянием индуктивности контура и найдём где она «запрятана» в (1'). Изменение суммарного потока равно сумме изменений внешнего и собственного потоков:

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_{\text{внешн}} + \Delta\Phi_{\text{соб}}.$$

Здесь $\Delta\Phi_{\text{соб}} = \Delta(LI) = L_2I_2 - L_1I_1$, где L_2 и L_1 – индуктивности контура в конце и в начале опыта, I_2 и I_1 токи в контуре в конце и в начале опыта. Теперь (1') принимает вид

$$q = -\frac{\Delta\Phi_{\text{внешн}} + \Delta(LI)}{R} = -\frac{\Delta\Phi_{\text{внешн}} + (L_2I_2 - L_1I_1)}{R}.$$

Если конечная и начальная индуктивности одинаковы и равны L , например, индуктивность остаётся постоянной во время опыта, то

$$q = -\frac{\Delta\Phi_{\text{внешн}} + L\Delta I}{R} = -\frac{\Delta\Phi_{\text{внешн}} + L(I_2 - I_1)}{R}.$$

Если при $L_1 = L_2 = L$ конечный и начальный токи оказываются равными, например, оба нулевые, то индуктивность «выпадает» из окончательной формулы:

$$q = -\frac{\Delta\Phi_{\text{внешн}}}{R}.$$

Это не означает, что индуктивностью пренебрегают. Просто она не влияет на окончательный ответ.

Осталось сказать о знаке «минус» в (1'). Этот вопрос связан с правилом знаков для магнитного потока, ЭДС индукции, тока в контуре. Все эти величины считаются алгебраическими, т.е. могут принимать поло-

жительные и отрицательные значения. Это отдельный вопрос и поясним его поэтому на частном случае контура в виде небольшого плоского витка. Из двух векторов единичной нормали к плоскости витка выбирается какой-нибудь один, назовём его \vec{n} , причём $|\vec{n}| = 1$. Магнитный поток через виток

$$\Phi = \vec{B}\vec{n}S = BS \cos \alpha, \text{ где } S \text{ – площадь витка,}$$

α – угол между вектором индукции \vec{B} магнитного поля и \vec{n} . Из этого определения потока следует, что Φ может быть как положительным, так и отрицательным (при $90^\circ < \alpha < 180^\circ$). С вектором нормали связывают положительное направление обхода контура правилом буравчика (правого винта). Если ток идёт в положительном направлении обхода контура, то он считается положительным, в противном случае – отрицательным. Аналогично с ЭДС индукции. Интересно, что формула для собственного магнитного потока $\Phi_{\text{соб}} = LI$ удовлетворяет этому правилу знаков. Отрицательный знак в (1') означает, что заряд протёк так, что индукционный ток и $\Delta\Phi$ оказались противоположного знака.

4. Задачи

Разберём наиболее типичные задачи, иллюстрирующие применение формулы (1').

Задача 1. *Перпендикулярно плоскости проводящего кольца радиусом $r = 2$ см и сопротивлением $R = 10$ м направлено однородное магнитное поле с индукцией $B_1 = 8$ мТл. Индукция магнитного поля в течение некоторого времени уменьшилась до $B_2 = 2$ мТл. Найти заряд, протёкший по кольцу за это время.*

Решение. При решении задачи нужно вывести формулу (1'), а затем воспользоваться ею. Начальный поток Φ_1 внешнего поля удобно взять положительным, поэтому сонаправим вектор нормали \vec{n} с вектором \vec{B}_1 (рис.1). Изменением собственного магнитного потока можно пренебречь по сравнению с изменением внешнего потока из-за



малой индуктивности кольца (даже если в конце опыта ток продолжает течь из-за продолжающегося изменения внешнего поля). Итак, изменение потока

$$\Delta\Phi = \pi r^2 (B_2 - B_1), \text{ протёкший заряд}$$

$$q = -\frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{\pi r^2 (B_1 - B_2)}{R} \approx 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

Положительность заряда означает, что он прошёл в положительном направлении обхода контура, показанном на рис.1. Следует отметить, что направление прохождения заряда (тока) можно найти и по правилу Ленца.

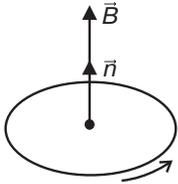


Рис. 1

Задача 2. Катушка из W витков, площадь каждого из которых равна S , присоединена к баллистическому гальванометру (баллистический гальванометр измеряет прошедший через него заряд). Сопротивление всей цепи R . Вначале катушка находилась между полюсами магнита в области, где магнитная индукция \vec{B} постоянна по модулю и направлена перпендикулярно виткам катушки. Затем катушку переместили в пространство, где магнитное поле отсутствует. Чему равен заряд q , прошедший через гальванометр? (Мякишев Г.Я. и др. Физика: Электродинамика. М.: Дрофа, 1998. Упражнение 9, задача 1).

Решение. Будем считать, что составная часть решения задачи – вывод (1') – уже выполнена. В процессе переноса катушки внешний магнитный поток через катушку изменялся (и не обязательно равномерно). Это привело к появлению ЭДС индукции и индукционного тока в катушке, замкнутой на гальванометр. Изменяющийся ток при неизменной индуктивности вызвал появление ЭДС самоиндукции. Разделить эти ЭДС можно только условно. В конце перемещения катушки по ней может идти ток, который не исчезает мгновенно (аналог инерции в механике). Но через некоторое время ток

перестает течь (затухает). В этой задаче неявным образом под временем окончания опыта подразумевается не момент окончания движения катушки, а момент, когда ток перестает течь. Итак, начальный I_1 и конечный I_2 токи в опыте можно считать нулевыми. Поэтому изменение собственного потока при постоянной индуктивности

$$\Delta\Phi_{\text{соб}} = L(I_2 - I_1) = 0.$$

Изменение внешнего потока

$$\Delta\Phi_{\text{внешн}} = 0 - BSW = -BSW.$$

Отметим, что при подсчёте потока нормаль к каждому витку катушки мы сонастроили с полем и начальный поток внешнего поля получился положительным и равным BSW . Направление нормали задаёт положительное направление обхода витков катушки.

Итак, изменение суммарного потока за время опыта

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_{\text{внешн}} + \Delta\Phi_{\text{соб}} = \Delta\Phi_{\text{внешн}} = -BSW.$$

Заряд, протёкший в цепи (и через гальванометр тоже):

$$q = -\frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{BSW}{R} > 0.$$

Прошедший заряд q получился положительным. Это означает, что он прошёл в положительном направлении обхода витков катушки.

Обратим внимание, что индуктивностью катушки мы не пренебрегали, индуктивность «выпала» не из-за её малости, а из-за того, что начальный и конечный токи в опыте равны нулю.

Задача 3. Катушка сопротивлением $R = 40 \text{ Ом}$ и индуктивностью $L = 0,01 \text{ Гн}$ замкнута накоротко и находится во внешнем магнитном поле (рис.2). Начиная с определённого момента внешнее поле начинает изменяться. В результате за некоторое время магнитный поток внешнего поля через катушку возрос на $0,002 \text{ Вб}$, а ток достиг значения $0,08 \text{ А}$. Какой заряд прошёл за это время по катушке?

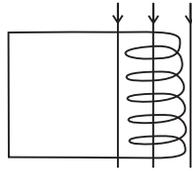


Рис. 2

Решение. Изменяющееся внешнее поле вызывает в катушке ЭДС индукции, в результате чего возникает изменяющийся со временем ток, являющийся причиной появления ЭДС самоиндукции. Свяжем направление нормали к виткам катушки и положительное направление обхода витков правилом буравчика. Этим будет задаваться связь между знаками магнитного потока, тока и обеих ЭДС в контуре. Если направление нормали к виткам катушки выбрать таким, чтобы было изменение внешнего потока положительным, т.е. $\Delta\Phi_{\text{внешн}} = 0,002 \text{ Вб}$, то значение конечно-

го тока I_2 надо взять отрицательным, т.е. $I_2 = -0,08 \text{ А}$. Это следует из правила Ленца: знак индукционного тока должен быть противоположен знаку изменения магнитного потока, вызвавшего этот ток.

Будем считать, что формула (1') уже выведена в процессе решения этой задачи. Изменение суммарного потока

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_{\text{внешн}} + \Delta\Phi_{\text{соб}},$$

где $\Delta\Phi_{\text{внешн}} = 0,002 \text{ Вб}$, $\Delta\Phi_{\text{соб}} = L(I_2 - I_1)$.

Начальный ток $I_1 = 0$, $I_2 = -0,08 \text{ А}$. Протёкший по катушке заряд

$$q = -\frac{\Delta\Phi_{\text{внешн}} + \Delta\Phi_{\text{соб}}}{R} = -\frac{\Delta\Phi_{\text{внешн}} + L(I_2 - I_1)}{R} = -3 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}.$$

Отрицательный знак заряда означает, что он прошёл в отрицательном направлении обхода витков катушки.



- ✦ Вот гиря, вот селедка... А где торсионные силы?
- ✦ Дж. Бруно развивал идеи Коперника, за что Коперника сожгли.
- ✦ Чем более силен электрон, тем ему более плевать на существование потенциальной ямы. А слабый электрон на столько дохл, что ему там так трудно! Он стонет, плачет!
- ✦ Нелинейность уравнения Навье-Стокса является основной трудностью гидродинамики, не считая отсутствия денег.
- ✦ Если карандаш поставить точно вертикально и точно с нулевой скоростью, то он будет находиться в таком состоянии вечно, можете проэкспериментировать.
- ✦ Всего три буквы, благодаря которым летают все спутники и космические корабли. Они определили законы небесной механики
- ✦ Тепловая энергия — это бардак.
- ✦ Ньютон любил называть вещи своими именами. Так появились кольца Ньютона, зрительная труба Ньютона, формула Ньютона-Лейбница и много других замечательных названий.

