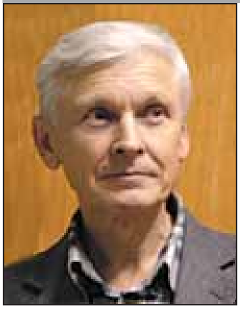


Чивилёв Виктор Иванович
Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей физики
Московского физико-технического института (МФТИ),
Заслуженный работник высшей школы,
заместитель председателя научно-методического совета
Заочной физико-технической школы (ЗФТШ) при МФТИ,
член жюри Всероссийской олимпиады школьников по физике.

СИЛА ТРЕНИЯ

В статье изложена формальная теория сухого трения, необходимая при решении задач. Рассмотрены сила трения скольжения и сила трения покоя. Разобрано большое количество задач, в которых присутствует сила трения. При решении задач применяется второй закон Ньютона как для поступательного прямолинейного, так и для вращательного движений. Требуется умение записывать уравнение второго закона Ньютона в проекциях на произвольную ось. В некоторых задачах используется закон сохранения энергии. Тексты условий и решений всех приведенных ниже задач предложены автором статьи. Идеи некоторых задач достаточно известны. Задачи разбиты по тематике на 4 группы. Сложными можно считать задачи с номерами 5, 15, 17, 18, 19.

ЭМПИРИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ СУХОГО ТРЕНИЯ

Трение, возникающее между двумя соприкасающимися твердыми телами при попытке вызвать их относительное перемещение, называется сухим трением. Силы сухого трения имеют сложную электромагнитную природу, так как возникают в результате взаимодействия электронных оболочек атомов трущихся тел. Нас будет интересовать только сам факт существования сил трения и эмпирические (опытные) законы сухого трения.

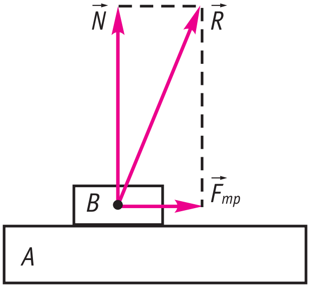


Рис. 1.

Пусть тела A и B соприкасаются по некоторой плоской поверхности (рис.1) и на них действуют внешние силы, прижимающие тела друг к другу и пытающиеся вызвать их относительное движение. При этом тела могут покоиться друг относительно друга или скользить одно по другому. Такую ситуацию можно смоделировать, прижав друг к другу два бруска и пытаясь двигать один брусок по другому.

Пусть тело A действует на тело B с некоторой силой реакции $\vec{R}$. Разложим силу реакции $\vec{R}$ на две составляющие. Составляющую по нормали (перпендикуляру) к поверхности взаимодействия назовем силой нормального давления $\vec{N}$. Составляющую по касательной к поверхности взаимодействия назовем силой трения

$\vec{F}_{тр}$, т.к. она существует благодаря явлению трения. Если тела покоятся друг относительно друга, то сила трения есть сила трения покоя $\vec{F}_{тр\ пок}$. В случае скольжения одного тела по другому имеем дело с силой трения скольжения $\vec{F}_{тр\ ск}$.

Из опыта известно, что модуль силы трения скольжения $F_{тр\ ск}$ слабо зависит от относительной скорости соприкасающихся тел и пропорционален модулю силы нормального давления N:

$$F_{тр\ ск} = \mu N. \qquad (1)$$

Безразмерный коэффициент пропорциональности μ зависит от природы и состояния трущихся поверхностей и называется коэффициентом трения скольжения (или коэффициентом трения). Для большинства известных материалов коэффициент трения скольжения меньше 1. Поэтому обычно модуль силы трения скольжения меньше модуля силы нормального давления:

$$F_{тр\ ск} < N.$$

Заметим, что в эмпирическом законе трения (1) ничего не сказано о площади соприкосновения трущихся тел и о равномерности их прижатия друг к другу по всей площади соприкосновения. Поэтому можно сделать вывод, что при постоянном значении N сила трения скольжения не зависит от площади соприкосновения тел и распределения сил нормального давления по поверхности соприкосновения. Это подтверждается опытами по соскальзыванию с наклонной плоскости бруска в форме прямоугольного параллелепипеда со значительными вмятинами на гранях, положенного на наклонную плоскость различными гранями (рис.2).

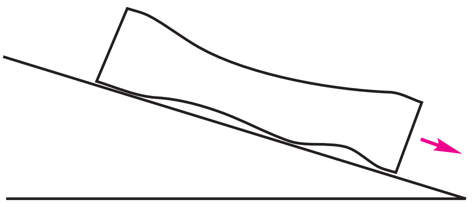


Рис. 2.

Теперь поговорим о силе трения покоя. Опыт показывает, что при постоянной силе нормального давления N сила трения покоя (по модулю) может изменяться от нуля до некоторого максимального значения $F_{тр\ пок\ макс}$, равного приближенно силе трения скольжения $F_{тр\ ск}$ при той же N:

$$0 \le F_{тр\ пок} \le F_{тр\ пок\ макс} = F_{тр\ ск} = \mu N.$$

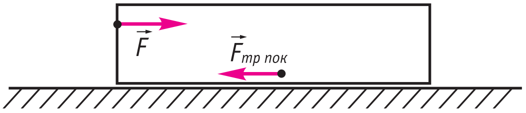


Рис. 3.

Приведем пример. Приложим к книге массой m, лежащей на столе, горизонтальную силу $\vec{F}$ (рис.3). Горизонтальность $\vec{F}$ обеспечивает постоянство N независимо от значения F: $N = mg$.

Будем постепенно увеличивать силу F. Вначале, когда F достаточно мала, книга остается неподвижной и сила F уравновешивается силой трения покоя $F_{тр\ пок}$, действующей на книгу со стороны стола:

$$F = F_{тр\ пок}.$$

По мере увеличения F растет и $F_{тр\ пок}$ до своего максимального значения, равного силе трения скольжения:

$$F_{тр\ пок\ макс} = F_{тр\ ск} = \mu N = \mu mg.$$

Здесь μ – коэффициент трения скольжения между книгой и столом. Затем книга приходит в движение и сила трения покоя

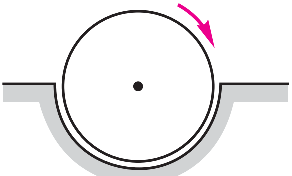


Рис. 4.

заменяется силой трения скольжения $F_{тр\ ск}$, которая не изменяется при дальнейшем увеличении F.

Сделаем три замечания – дополнения ко всему сказанному выше.

Замечание 1. Если трущиеся тела соприкасаются не по плоской поверхности, а, например, так, как показано на рис. 4, то надо разбить мысленно поверхность соприкосновения на сколь угодно малые практически плоские площадки и рассматривать силы трения, направленные по касательной к этим площадкам.

Замечание 2. Трущиеся тела могут соприкасаться по одной прямой (цилиндр на наклонной плоскости, например) или в одной точке (шар на столе или в чаше, например). В этом случае можно считать, что тела соприкасаются по некоторой небольшой по площади плоской поверхности, принадлежащей плоскости P (рис.5). Плоскость P касается поверхностей обоих тел в точке (на линии) соприкосновения тел.

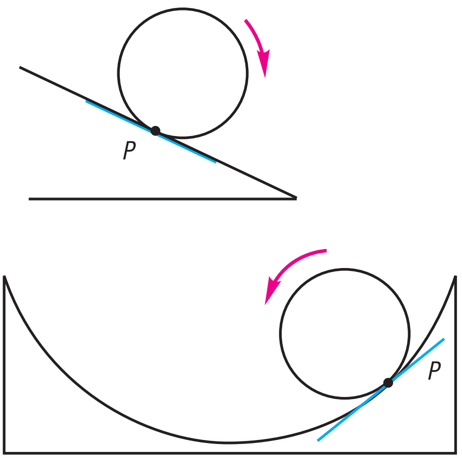


Рис. 5.

Замечание 3. Во многих случаях при решении задач удобно сразу заменять силу реакции на две составляющие силы нормального давления и трения и решать далее задачу, даже не упоминая о силе реакции.

1. ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ СИЛ РЕАКЦИИ, ТРЕНИЯ И НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

Задача 1. По горизонтальной поверхности стола скользит брусок массой m под действием силы $\vec{F}$, направленной под углом α к горизонту (рис.6). Коэффициент трения скольжения между бруском и столом равен μ. С какой силой реакции (найти модуль и направление силы с горизонтом) стол действует на брусок? Чему равна сила трения и сила нормального давления между бруском и столом?

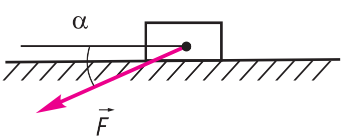


Рис. 6.

Решение. На брусок действуют сила тяжести, равная $m\vec{g}$, сила $\vec{F}$, сила реакции $\vec{R}$ со стороны стола (рис.7). Силу реакции разложим на силу нормального давления $\vec{N}$ и силу трения $\vec{F}_{тр}$. Сила трения есть сила трения скольжения, равная μN. Брусок движется с некоторым ускорением $\vec{a}$. Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на вертикальную ось y:

$$N - mg - F\sin\alpha = 0.$$

Отсюда $N = mg + F\sin\alpha.$

Сила трения $F_{тр} = \mu N = \mu(mg + F\sin\alpha).$

Сила реакции

$$R=\sqrt{N^2+F_{тр}^2}=(mg+F\sin\alpha)\sqrt{1+\mu^2}.$$

Сила реакции составляет с горизонтом угол β такой, что

$$tg\,\beta=\frac{N}{F_{тр}}=\frac{1}{\mu}.$$

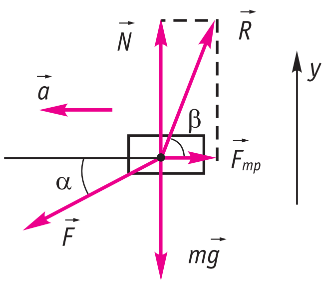


Рис. 7.

Задача 2. На брусок массой m, находящийся на горизонтальном столе, действует сила $\vec{F}$, направленная под углом α к горизонту (рис.8). Из-за трения о стол брусок не движется. Найти действующие на брусок силу нормального давления, силу трения и силу реакции (найти модуль и направление силы).

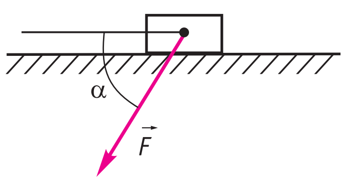


Рис. 8.

Решение. На брусок действуют сила $\vec{F}$, сила тяжести, равная $m\vec{g}$, и сила реакции $\vec{R}$ со стороны стола (рис.9). Силу реакции разложим на силу нормального давления $\vec{N}$ и силу трения $\vec{F}_{тр}$. Сила трения – сила трения покоя. Запишем условие равновесия бруска в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси x и y:

$$F\cos\alpha-F_{тр}=0,\quad N-mg-F\sin\alpha=0.$$

Отсюда $F_{тр}=F\cos\alpha,\ N=mg+F\sin\alpha.$

Сила реакции

$$R=\sqrt{N^2+F_{тр}^2}=\sqrt{(mg)^2+2mgF\sin\alpha+F^2}.$$

Сила реакции направлена под углом β к горизонту таким, что

$$tg\beta=\frac{N}{F_{тр}}=\frac{mg}{F\cos\alpha}+tg\alpha.$$

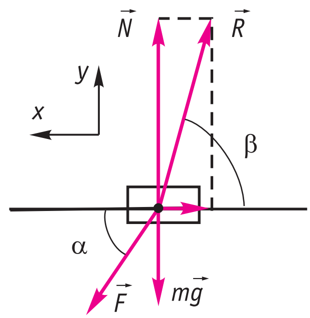


Рис. 9.

Задача 3. Шайба массой m соскальзывает по прямой с наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α. Коэффициент трения скольжения шайбы о наклонную плоскость равен μ. Найти действующие на шайбу силу нормального давления, силу трения и силу реакции (найти модуль и направление силы).

Решение. На шайбу действуют сила нормального давления $\vec{N}$ и сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$ со стороны наклонной плоскости, а также сила тяжести, равная $m\vec{g}$ (рис.10). Шайба скользит с некоторым ускорением $\vec{a}$. Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на перпендикулярную к наклонной плоско-

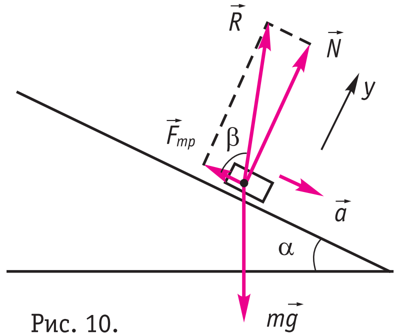


Рис. 10.

сти ось y:

$$N - mg\cos\alpha = 0.$$

Отсюда $N = mg\cos\alpha$.

Сила трения $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$.

Сила реакции

$$R = \sqrt{N^2 + F_{тр}^2} = \sqrt{1+\mu^2}\ mg\cos\alpha.$$

Угол β между силой реакции и наклонной плоскостью такой, что

$$tg\beta = \frac{N}{F_{тр}} = \frac{1}{\mu}.$$

Задача 4. На наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α покоится монета массой m. С какой силой реакции наклонная плоскость действует на монету (найти модуль и направление силы)? Найти силу нормального давления и силу трения, действующие на монету со стороны наклонной плоскости.

Решение. На монету действуют две силы: сила тяжести, равная $m\vec{g}$, и сила реакции $\vec{R}$ со стороны наклонной плоскости (рис.11). Запишем условие равновесия монеты:

$$m\vec{g} + \vec{R} = 0.$$

Отсюда $\vec{R} = -m\vec{g}.$

Итак, сила реакции направлена вертикально вверх и равна (по модулю) силе тяжести:

$$R = mg.$$

Для нахождения силы нормального давления и силы трения разложим силу реакции $\vec{R}$ на две составляющие $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ (рис.11). Из параллелограмма сил находим модули силы нормального давления $\vec{N}$ и

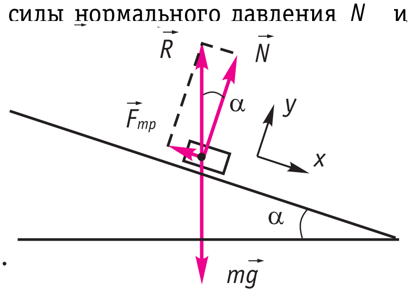


Рис. 11.

силы трения $\vec{F}_{тр}$:

$$N = R\cos\alpha = mg\cos\alpha,$$

$$F_{тр} = R\sin\alpha = mg\sin\alpha.$$

Замечание. Для нахождения N и $F_{тр}$ можно записать условие равновесия монеты под действием трех сил $m\vec{g}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{тр}$ в проекциях на оси x и y. Результат будет тем же.

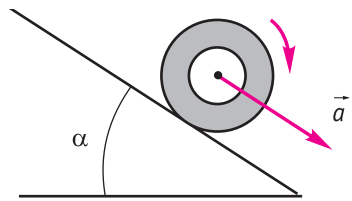


Рис. 12.

углом наклона к горизонту α катится без проскальзывания с ускорением a цилиндр массой m (рис.12). Найти действующие на цилиндр со стороны наклонной плоскости силу нормального давления, силу трения и силу реакции (найти модуль и направление силы).

Решение. На цилиндр действуют сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная в центре цилиндра, и сила реакции $\vec{R}$, приложенная к цилиндру в месте его контакта с наклонной плоскостью. Для удобства приложим все силы в центре масс цилиндра (рис.13). Разложим силу реакции $\vec{R}$ на силу нормального давления $\vec{N}$ и силу трения $\vec{F}_{тр}$. Напомним, что сумма всех сил, действующих на протяженное тело, равна массе тела, умноженной на ускорение центра масс. Это – теорема о движении центра масс, которую можно назвать вторым законом Ньютона для тела, которое уже нельзя считать материальной точкой. Итак,

$$m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{a} \quad \text{или} \quad m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}.$$

Запишем последнее уравнение в проекциях на оси x и y:

$$mg\sin\alpha - F_{тр} = ma, \quad mg\cos\alpha + N = 0.$$

Отсюда находим силы трения и нормального давления:

$$F_{тр} = m(g\sin\alpha - a), \quad N = mg\cos\alpha.$$

Сила реакции

$$R = \sqrt{N^2 + F_{тр}^2} = m\sqrt{g^2 - 2ag\sin\alpha + a^2}.$$

Сила реакции составляет угол β с нормалью к наклонной плоскости, причем

$$tg\beta = \frac{F_{тр}}{N} = tg\alpha - \frac{a}{g\cos\alpha}.$$

Заметим, что R можно найти и по теореме косинусов для треугольника, построенного на векторах $\vec{R}$ и $m\vec{a}$ (рис.13).

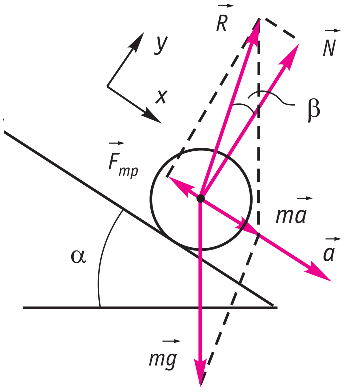


Рис. 13.

2. ЗАДАЧИ С ОДНИМ ТЕЛОМ НА УСЛОВИЕ ОТСУТСТВИЯ ИЛИ НАЛИЧИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ

Задача 6. К телу массой $m = 1$ кг, лежащему на горизонтальной поверхности стола, прикладывают горизонтальную силу $\vec{F}$. Коэффициент трения скольжения между телом и столом $\mu = 0{,}3$. Найти силу трения при двух значениях F: $F_1 = 2$ Н, $F_2 = 5$ Н.

Решение. На тело действуют сила $\vec{F}$, сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормального давления $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$, независимо от того, движется тело или покоится (рис.14). В любом случае

$$N = mg.$$

Это можно показать, записав уравнение второго закона Ньютона в проекциях на вертикальную ось y. Если тело скользит, то сила трения скольжения

$$F_{тр\,ск} = \mu N = \mu mg \approx 3 \text{ Н}.$$

Если F превышает $F_{тр\,ск}$, то тело скользит с некоторым ускорением и сила трения равна силе трения скольжения. Если F меньше $F_{тр\,ск}$, то тело покоится и сила трения есть сила трения покоя, равная F (следует из условия равновесия, записанного в проекциях на горизонтальную ось x). В задаче

$$F_1 < F_{тр\,ск}, \text{ а } F_2 > F_{тр\,ск}.$$

Теперь можно найти значения сил трения $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$ в обоих случаях. При $F_1 =$ 2 Н сила трения равна силе трения покоя, которая равна F_1:

$$F_{тр1} = F_1 = 2 \text{ Н}.$$

При $F_2 =$ 5 Н сила трения равна силе трения скольжения:

$$F_{тр2} = F_{тр\,ск} = \mu mg \approx 3 \text{ Н}.$$

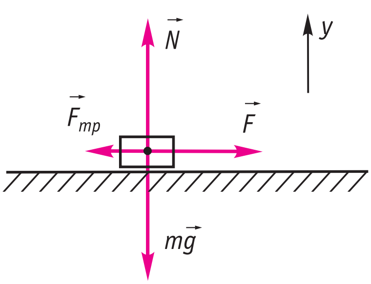


Рис. 14.

Задача 7. К бруску массой m, лежащему на горизонтальной поверхности закрепленной доски, прикладывают горизонтальную силу F, постепенно увеличивая ее, начав с нулевого значения. Коэффициент трения скольжения между бруском и доской равен μ. Изобразить графически зависимость силы трения между доской и бруском от F.

Решение. В условиях опыта сила нормального давления N остается постоянной:

$$N = mg.$$

Пока сила F меньше максимальной силы трения покоя, брусок неподвижен и сила трения есть сила трения покоя и равна F. Считаем, что максимальная сила трения покоя равна силе трения скольжения:

$$F_{тр\ пок\ макс} = F_{тр\ ск} = \mu N = \mu mg.$$

Когда F больше $F_{тр\ пок\ макс}$ брусок скользит с ускорением и сила трения равна силе

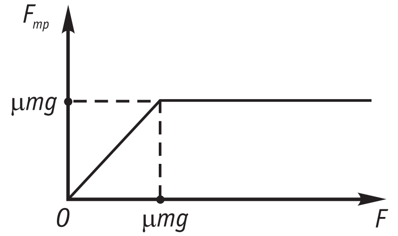


Рис. 15.

трения скольжения $F_{тр\ ск}$, т.е. сила трения остается постоянной. График зависимости силы трения от F показан на рис.15.

Задача 8. На наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α находится тело. Коэффициент трения скольжения тела о наклонную плоскость равен μ. При каком соотношении между α и μ тело не будет скользить?

Решение. На тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормального давления $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$ (рис. 16). Если тело покоится, то сила трения есть сила трения покоя $\vec{F}_{тр\ пок}$ и

$$m\vec{g} + \vec{F}_{тр\ пок} + \vec{N} = 0.$$

Запишем это уравнение в проекциях на ось x:

$$mg\sin\alpha - F_{тр\ пок} = 0.$$

Отсюда $F_{тр\ пок} = mg\sin\alpha.$

Скольжение отсутствует при $F_{тр\ пок} < \mu N.$

Так как $N = mg\cos\alpha$ независимо от наличия или отсутствия скольжения, то

$$mg\sin\alpha < \mu mg\cos\alpha.$$

Отсюда находим условие отсутствия скольжения: $tg\alpha < \mu$.

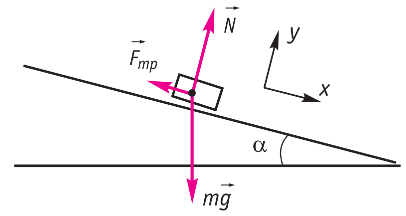


Рис. 16.

Замечание. При условии $tg\alpha = \mu$ скольжение может быть, а может и не быть. Записывать ответ задачи в виде $tg\alpha \le \mu$ и спорить куда включать переходную ситуацию покой – скольжение не стоит еще и по другой причине: все эмпирические законы сухого трения очень приближенные и на практике многие споры теряют смысл.

Задача 9. На горизонтальной платформе, вращающейся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = 2\,c^{-1}$, находится пуговица на расстоянии $R = 25$ см от оси вращения. При каких значениях коэффициента трения скольжения μ между пуговицей и платформой пуговица не сможет удержаться на платформе?

Решение. Пусть пуговица вращается вместе с платформой. На пуговицу действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормального давления $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр\ пок}$ (рис.17). Покажем, что сила трения, действующая на пуговицу вдоль поверхности диска, направлена к оси вращения, а не как-то вбок. Пуговица движется равномерно по окружности радиусом R с ускорением $\vec{a}$, направленным горизонтально к оси вращения. По второму закону Ньютона $m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{тр}=m\vec{a}$.

Вектора $\vec{g}$, $\vec{N}$ и $\vec{a}$ лежат в вертикальной плоскости, проходящей через ось вращения и пуговицу. Поэтому вектор $\vec{F}_{тр}$ лежит тоже в этой плоскости.

Запишем последнее векторное равенство в проекциях на оси x и y:

$$F_{тр}=ma, \quad -mg+N=0.$$

Здесь $a=\omega^2 R$. Запишем условие отсутствия скольжения:

$$F_{тр}<\mu N.$$

Из записанных скалярных равенств и одного неравенства получаем $\mu>\omega^2 R/g$. Пуговица не сможет удержаться на платформе, т.е. будет скользить, при

$$\mu<\omega^2 R/g\approx 0{,}1.$$

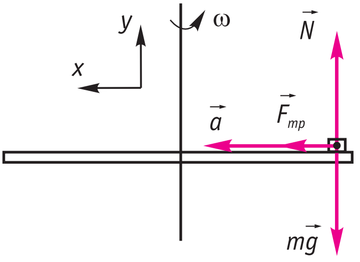


Рис. 17.

3. ЗАДАЧИ С ДВУМЯ ТЕЛАМИ НА УСЛОВИЕ ОТСУТСТВИЯ ИЛИ НАЛИЧИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ

Задача 10. На горизонтальной поверхности доски находится брусок. Коэффициент трения скольжения между бруском и доской $\mu=0{,}3$. С каким горизонтальным ускорением надо двигать доску, чтобы брусок не скользил по доске?

Решение. Доска пытается выскользнуть из под бруска, и сила трения, действующая на брусок, направлена в сторону ускорения. Покажем это более строго, используя второй закон Ньютона. Брусок движется вместе с доской с ускорением $\vec{a}$. На брусок массой m действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормального давления $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$, направление которой в плоскости поверхности доски пока не очень ясно (рис.18). По второму закону Ньютона

$$m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{тр}=m\vec{a}.$$

Анализ этого векторного равенства показывает, что вектор $\vec{F}_{тр}$ сонаправлен с $\vec{a}$. Теперь, зная направления всех сил, найдем ускорение.

Запишем последнее векторное равенство в проекциях на оси x и y (рис.18):

$$F_{тр}=ma, \quad -mg+N=0.$$

Условие отсутствия скольжения

$$F_{тр}<\mu N.$$

Из последних двух уравнений и неравенства следует, что брусок не скользит, если ускорение

$$a<\mu g\approx 3\ м/с^2.$$

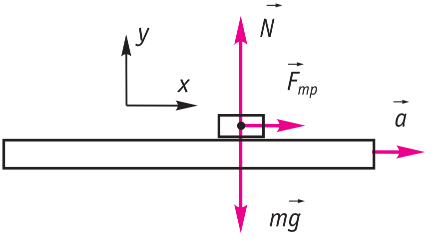


Рис. 18.

Задача 11. На гладкой горизонтальной поверхности стола находится доска массой M, а на ее горизонтальной поверхности находится брусок массой m (рис.19). Коэффициент трения скольжения между бруском и доской равен μ. На брусок действуют с постоянной горизонталь-

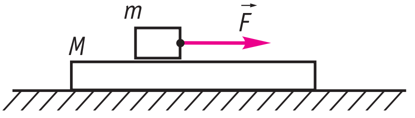


Рис. 19.

ной силой $\vec{F}$. При какой максимальной величине F_0 силы F брусок не будет скользить по доске? Все возможные движения поступательные.

Решение. При отсутствии скольжения бруска по доске брусок и доска движутся с ускорением

$$a = \frac{F}{M+m}.$$

Это следует из второго закона Ньютона, примененного к системе из бруска и доски.

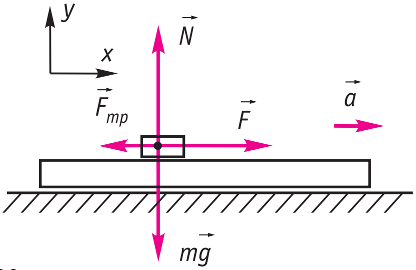


Рис. 20.

На брусок (рис.20) действуют сила $\vec{F}$, сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормального давления $\vec{N}$ и сила трения покоя (со стороны доски) $\vec{F}_{тр}$. По второму закону Ньютона для бруска

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}.$$

Запишем это уравнение в проекциях на оси x и y:

$$F - F_{тр} = ma, \quad -mg + N = 0.$$

Проскальзывание между бруском и доской начнется при такой величине $F = F_0$, когда

$$F_{тр} = \mu N.$$

Из записанных скалярных равенств

$$F_0 = m\left(\frac{F}{M+m} + \mu g\right).$$

Очевидно, что это и есть максимальная величина силы F, при которой брусок не скользит по доске.

Замечание 1. Строго показать, что найденное выражение для силы дает максимальную силу, можно, записав условие отсутствия скольжения бруска по доске $F_{тр} < \mu N$.

Замечание 2. Получить выражение для F_0 можно и другим путем, применив второй закон Ньютона к доске.

Задача 12. На горизонтальной поверхности доски массой $M = 2$ кг находится брусок массой $m = 1$ кг. Доска находится на гладкой горизонтальной поверхности стола (рис.21). Коэффициент трения скольжения между бруском и доской $\mu = 0{,}2$. К доске прикладывают постоянную горизонтальную силу $\vec{F}$. Найти силу трения между бруском и доской при двух значениях $F: F_1 = 3$ Н, $F_2 = 10$ Н. Все возможные движения поступательные.

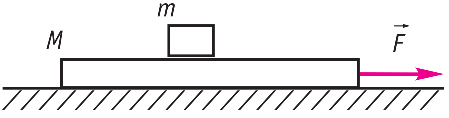


Рис. 21.

Решение. Рассмотрим ситуацию, когда брусок только-только начинает скользить по доске. К доске при этом прикладывают некоторую силу F_0. Найдем F_0. В случае начала скольжения бруска по доске сила трения, действующая на брусок со стороны доски, направлена в сторону движения доски и равна силе трения скольжения $F_{тр\,ск}$. Легко показать, что $F_{тр\,ск} = \mu mg$. По второму закону Ньютона для бруска и системы из бруска и доски, движущихся с общим ускорением a,

$$F_{тр\,ск} = ma, \quad F_0 = (M+m)a.$$

Из записанных уравнений находим

$$F_0 = (M+m)\mu g \approx 6 \text{ Н}.$$

Очевидно (точнее, почти очевидно), что при $F < F_0$ брусок будет покоиться относительно доски, а при $F > F_0$ брусок будет скользить по доске.

В первом случае $F_1 < F_0$ и брусок покоится относительно доски. Ускорение системы из бруска и доски

$$a_1 = \frac{F_1}{M+m}.$$

Бруску это ускорение сообщает сила трения покоя $F_{тр1}$:

$$F_{тр1} = ma_1 = \frac{mF_1}{M+m} = 1 \text{ Н}.$$

Во втором случае $F_2 > F_0$ и брусок скользит по доске. Сила трения равна силе трения скольжения:

$$F_{тр2} = F_{тр\ ск} = \mu mg \approx 2 \text{ Н}.$$

Итак, при $F_1 = 3$ Н сила трения $F_{тр1} = 1$ Н (сила трения покоя), при $F_2 = 10$ Н сила трения $F_{тр2} \approx 2$ Н (сила трения скольжения).

Задача 13. Диск может вращаться вокруг вертикальной оси, перпендикулярной его плоскости. На диске лежит небольшой по размерам брусок массой M на расстоянии R от оси (рис.22). На горизонтальной поверхности бруска находится шайба массой m, прикрепленная к оси нитью. Диск вместе с бруском и шайбой очень медленно увеличивают свою угловую скорость. Коэффициент трения скольжения между шайбой и бруском μ. Считая трение между бруском и диском пренебрежимо малым, определить при какой угловой скорости брусок начнет выскальзывать из под шайбы.

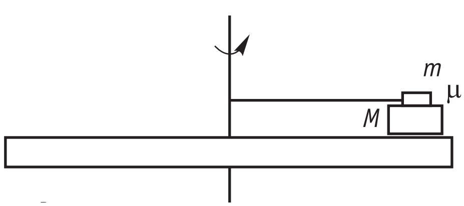


Рис. 22.

Решение. Легко показать, что брусок и шайба действуют друг на друга по вертикали с силой нормального давления $N = mg$. В критической ситуации, когда брусок на грани выскальзывания из под шайбы, между ними действует сила трения, равная силе трения скольжения:

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg.$$

На брусок действуют сила тяжести $M\vec{g}$, сила нормального давления $\vec{N}$ со стороны шайбы, сила $\vec{N}_1$ со стороны диска, сила трения $\vec{F}_{тр}$ со стороны шайбы (рис.23). Брусок движется по окружности с ускорением $\vec{a}$, причем $a = \omega^2 R$, где ω – угловая скорость вращения. По второму закону Ньютона

$$M\vec{g} + \vec{N} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тр} = M\vec{a}.$$

Запишем это равенство в проекциях на ось x:

$$F_{тр} = Ma.$$

С учетом выражений для $F_{тр}$ и a находим

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu mg}{MR}}.$$

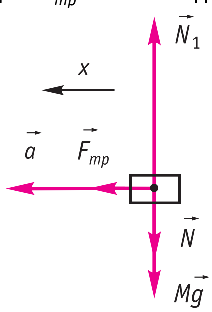


Рис. 23.

Задача 14. Диск может вращаться вокруг вертикальной оси, перпендикулярной его плоскости. На диске лежит небольшой по размерам брусок массой M на расстоянии R от оси. На горизонтальной поверхности бруска находится шайба массой m, прикрепленная к оси нитью (рис.24). Диск вместе с бруском и шайбой очень медленно увеличивают свою угловую скорость. Коэффициент трения скольжения между бруском и диском μ. Считая трение между шайбой и бруском пренебрежимо малым, определить при какой угловой скорости брусок начнет выскальзывать из под шайбы.

Решение. Пусть брусок находится на грани скольжения. На брусок действуют

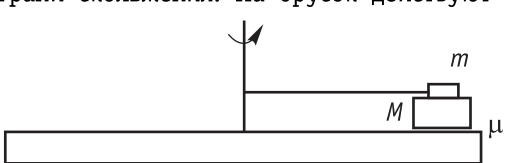


Рис. 24.

сила тяжести $M\vec{g}$, сила нормального давления $\vec{N}$ со стороны диска, сила трения $\vec{F}_{тр}$ (равная силе трения скольжения) со стороны диска, сила нормального давления $\vec{N}_1$ со стороны шайбы (рис.25). Брусок движется с ускорением $\vec{a}$, причем $a=\omega^2 R$, где ω – угловая скорость. По второму закону Ньютона

$$M\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{тр}+\vec{N}_1=M\vec{a}.$$

Запишем это векторное равенство в проекциях на ось x:

$$F_{тр}=Ma.$$

Здесь $F_{тр}=\mu N$.

Можно показать, что $N=(M+m)g$.

Тогда

$$\mu(M+m)g=M\omega^2 R.$$

Отсюда

$$\omega=\sqrt{\frac{M+m}{M}\cdot\frac{\mu g}{R}}.$$

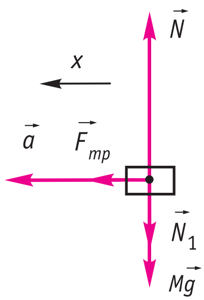


Рис. 25.

Задача 15. Небольшие бруски с массами m и $3m$ связаны легкой нитью, перекинутой через блок (рис.26). Брусок массой $3m$ удерживают на гладкой наклоненной под углом β $(\cos\beta=3/5)$ к горизонту поверхности чаши. Коэффициент трения скольжения между бруском с массой m и вертикальной стенкой чаши $\mu=2/5$. Чаша с брусками может вращаться вокруг вертикальной оси OO'. Бруски находятся на расстояниях R и $2R$ от оси OO'. Нить и бруски лежат в плоскости, перпендикулярной поверхности чаши. При какой минимальной угловой скорости вращения брусок массой m начнет двигаться вверх, если второй брусок не удерживать? Трением в оси блока пренебречь.

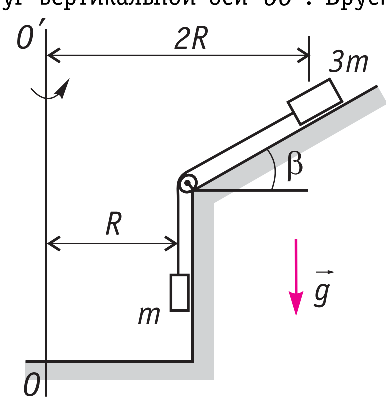


Рис. 26.

Решение. Минимальная угловая скорость ω соответствует ситуации, когда нижний брусок находится на грани скольжения вверх. Силы, действующие на бруски, изображены на рис.27. Сила трения

$$F_{тр}=\mu N_1.$$

Ускорения брусков направлены к оси вращения: $a_1=\omega^2 R$, $a_2=\omega^2\cdot 2R$.

Запишем уравнения движения для нижнего бруска в проекциях на оси x_1 и y_1:

$$N_1=ma_1,\ \ T-F_{тр}-mg=0.$$

Для верхнего бруска уравнение движения запишем в проекциях на ось x:

$$T+3mg\sin\beta=3m\,a_2\cos\beta.$$

Подставив в последние три уравнения выражения для a_1, a_2 и $F_{тр}$ и решив систему из этих уравнений, находим

$$\omega=\sqrt{\frac{(1+3\sin\beta)g}{(6\cos\beta-\mu)R}}.$$

При $\mu=\dfrac{2}{5}$, $\cos\beta=\dfrac{3}{5}$, $\sin\beta=\dfrac{4}{5}$ $\omega=\sqrt{\dfrac{17}{16}\dfrac{g}{R}}$.

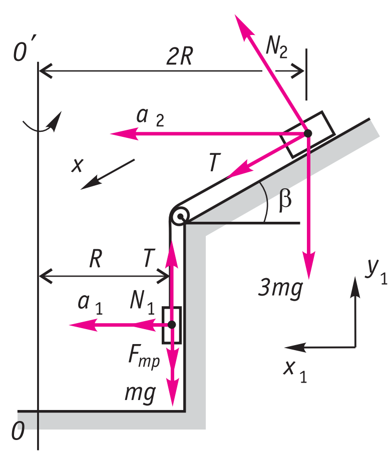


Рис. 27.

4. КОМБИНИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 16. Призма находится на горизонтальной поверхности шероховатого стола (рис.28). На поверхность призмы, наклоненную под углом α к горизонту положили брусок массой m и отпустили. Он стал соскальзывать, а призма осталась в покое. Коэффициент трения скольжения между бруском и призмой равен μ. Найти силу трения между призмой и столом.

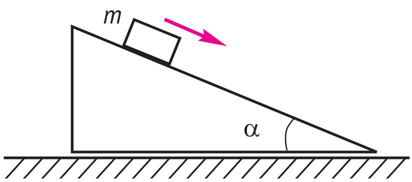


Рис. 28.

Решение. На призму со стороны бруска действуют две силы (рис. 29): сила нормального давления $N = mg\cos\alpha$ и сила трения скольжения между бруском и призмой $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$.

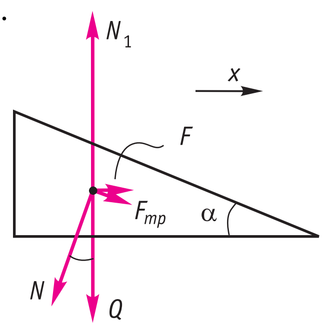


Рис. 29.

Со стороны стола на призму действует неизвестная сила трения покоя F и сила нормального давления N_1. На призму действует еще сила тяжести Q. Запишем условие равновесия призмы в проекциях на ось x:

$$F + F_{тр}\cos\alpha - N\sin\alpha = 0.$$

С учетом выражения для $F_{тр}$ и N находим

$$F = mg\cos\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Задача 17. На горке массой $M = 0{,}8$ кг, поверхность которой наклонена под углом α = 30° к горизонту, находится шайба массой $m =$ 0,2 кг (рис.30). Горка вместе с шайбой движутся по гладкому горизонтальному столу под действием горизонтальной силы $F =$ 4 Н. Шайба при этом не скользит по горке. Найти силу трения, действующую на шайбу (найти модуль и направление силы).

Решение. Ускорение горки с шайбой

$$a = \frac{F}{M+m}.$$

На шайбу действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормального давления $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$ вдоль поверхности горки (рис.31). Направление силы трения нам пока неизвестно. По второму закону Ньютона для шайбы

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}.$$

Запишем это векторное равенство в проекциях на ось x:

$$mg\sin\alpha + F_{тр\,x} = ma\cos\alpha.$$

Рис. 30.

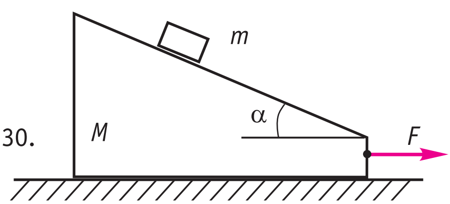
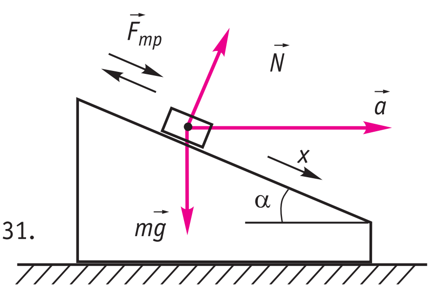


Рис. 31.



Здесь $F_{тр\,x}$ – проекция на ось x силы трения. С учетом выражения для ускорения находим

$$F_{тр\,x} = m\left(\frac{F\cos\alpha}{M+m} - g\sin\alpha\right) \approx -0{,}3 \text{ Н}.$$

Проекция получилась отрицательной. Это значит, что сила трения направлена против оси x, т.е. вверх по горке, и равна (по модулю) $F_{тр} \approx 0{,}3$ Н.

Задача 18. Полушар радиусом R покоится на горизонтальной поверхности стола. В точку A на полушаре помещают небольшую по сравнению с размерами полушара шайбу массой m и отпускают (рис.32). Шайба скользит без трения и оказывается в точке B, а полушар при этом остается неподвижным. Радиусы OA и OB составляют с вертикалью углы α_1 и α_2 такие, что $\cos\alpha_1 = 5/6$, $\cos\alpha_2 = 2/3$. 1) Найти скорость шайбы в точке B. 2) Найти силу трения между полушаром и столом при прохождении шайбой точки B.

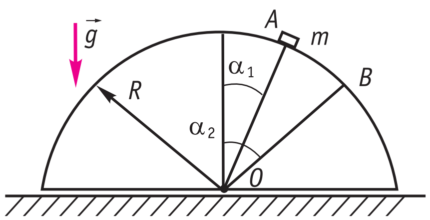


Рис. 32.

Решение. По закону сохранения энергии

$$\frac{mU^2}{2} = mgR\cos\alpha_1 - mgR\cos\alpha_2.$$

Отсюда скорость шайбы в точке B

$$U = \sqrt{2gR(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)} = \sqrt{gR/3}.$$

Полушар давит на шайбу в точке B с силой N. Запишем уравнение второго закона Ньютона для шайбы в проекциях на радиальное направление к центру:

$$mg\cos\alpha_2 - N = \frac{mU^2}{R}.$$

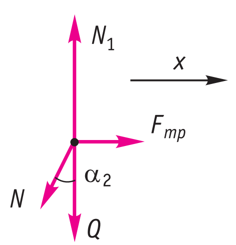


Рис. 33.

С учетом выражения для U находим

$$N = mg(3\cos\alpha_2 - 2\cos\alpha_1) = mg/3.$$

На полушар действуют сила N со стороны шайбы, сила трения $F_{тр}$ и сила нормального давления N_1 со стороны стола и сила тяжести Q (рис.33). Запишем условие равновесия полушара в проекциях на горизонтальную ось x:

$$F_{тр} - N\sin\alpha = 0.$$

С учетом выражения для N находим силу трения:

$$F_{тр} = mg(3\cos\alpha_2 - 2\cos\alpha_1)\sin\alpha_2 = mg\sqrt{5}/9.$$

Задача 19. На гладкой горизонтальной поверхности стола находится призма, упирающаяся в гладкую вертикальную стенку. Поверхность призмы наклонена под углом γ к горизонту (рис.34). Велосипедное колесо массой m движется вверх по призме, катясь без проскальзывания и имея при прохождении точки A скорость U_0. При движении колеса вверх призма давит на стенку с постоянной силой F. На какое максимальное расстояние удалится колесо от точки A при движении вверх?

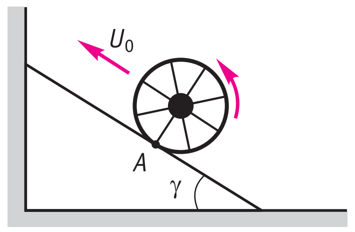


Рис. 34.

Решение. На рис.35 показаны силы, действующие на колесо и клин. N и $F_{тр}$ – сила нормального давления и сила трения при взаимодействии колеса и клина, Q – сила тяжести клина, N_1 – сила на клин со стороны стола. Центр масс колеса движется замедленно с ускорением a. Запишем для колеса уравнение второго закона Ньютона в проекциях на оси x и y:

$$mg\sin\gamma - F_{тр} = ma, \quad -mg\cos\gamma + N = 0.$$

Запишем для клина условие равновесия в проекциях на ось x_1: $F + F_{тр}\cos\gamma - N\sin\gamma = 0$.

Из записанных уравнений $a = \dfrac{F}{m\cos\gamma}$.

Колесо удалится от точки A на расстояние

$$S = \frac{U_0^2}{2a} = \frac{U_0^2 m\cos\gamma}{2F}.$$

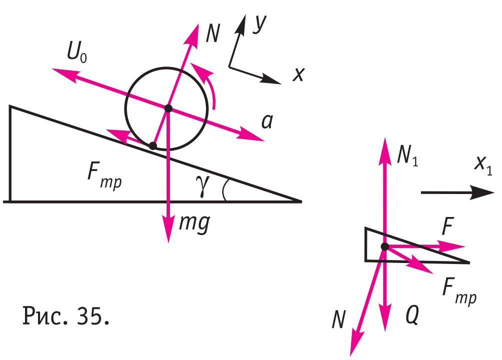


Рис. 35.