Корнеев Валерий Трофимович
Почётный работник высшего профессионального образования Российской Федерации.
Директор центра довузовской подготовки БГТУ им. В.Г. Шухова,
старший преподаватель кафедры физики

О расчете электрических схем. Часть 2

В продолжении статьи об электрических схемах приведены мнемонические правила для формул перехода от звезды сопротивлений к треугольнику сопротивлений и от треугольника к звезде. Описан удивительный способ построения цепей заданного сопротивления из резисторов одинакового номинала.

Рассмотрены некоторые способы расчета электрических схем.

И высказано сожаление, что нельзя объять необъятное. Но это оптимистическое сожаление: значит, есть еще очень много интересного, над чем можно подумать!

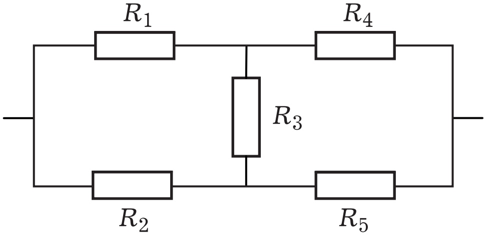
Общий случай

Вернемся к мостовой схеме и рассмотрим случай, когда все сопротивления разные, мост не сбалансирован.

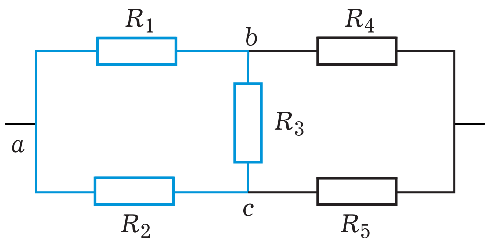
Способ расчета для подобных случаев был описан в журнале «Потенциал» №2/2021 в статье [1]. Путем замены треугольника сопротивлений на звезду сопротивлений или звезды на треугольник схема сводится к доступному для расчета виду. На рис.1 показаны исходная схема и эквивалентные замены.

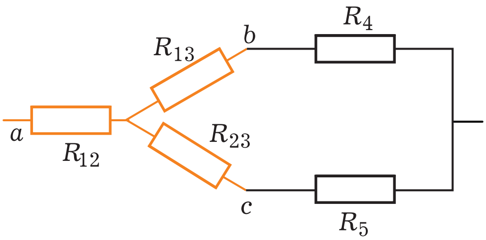
Эквивалентной замена будет, если все токи в остальных частях цепи не изменяются и напряжения между узлами, в которых «закреплен» заменяемый участок, не изменяются.

Для наглядности синим цветом показан участок цепи до замены, а красным – после замены.

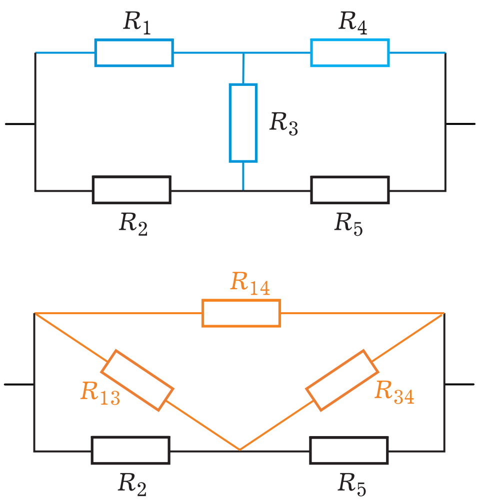


а) исходная схема





б) замена треугольника сопротивлений на звезду сопротивлений



в) замена звезды сопротивлений на треугольник сопротивлений

Рис. 1. Замены звезды сопротивлений и треугольника сопротивлений

Здесь мы введем удобные обозначения и мнемонические правила, с помощью которых запомнить формулы для замены очень легко. Хотя в статье [1] вывод формул приведен, для удобства читателей его повторим, немного изменив изложение: бывает так, что рассказанное еще раз другими словами понимается лучше, хотя эти «другие слова» сами по себе не лучше и не хуже сказанного ранее.

<u>Переход от треугольника сопротивлений к звезде сопротивлений (*Рис. 1б*).</u>

Сопротивление между узлами a и b:

$$R_{12}+R_{13}=\frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3}.$$

Аналогично для узлов a и c; b и c:

$$R_{12}+R_{23}=\frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3},$$

$$R_{13}+R_{23}=\frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3}.$$

Сложим эти три уравнения:

$$R_{12}+R_{23}+R_{13}=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_1+R_2+R_3}.$$

Вычитая теперь из последнего уравнения последовательно каждое из этих трех уравнений, получим формулы, приведенные ниже.

При замене треугольника сопротивлений на звезду сопротивлений:

$$R_{12}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3},$$

$$R_{23}=\frac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3},$$

$$R_{13}=\frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3}.$$

Для сопротивлений, выходящих из одной точки, проводится замена сопротивлением, величина которого равна произведению заменяемых элементов, делённому на сумму всех сопротивлений, входящих в треугольник. Индексы нового элемента повторяют индексы сопротивлений, стоящих в числителе.

Переход от звезды сопротивлений к треугольнику сопротивлений (*Рис. 1в*).

Уже полученные выражения перехода от треугольника сопротивлений к звезде сопротивлений для данной схемы дали бы нам формулы (мы сохранили обозначения для исходной схемы):

$$R_1 = \frac{R_{13}R_{14}}{R_{13}+R_{14}+R_{34}},$$

$$R_3 = \frac{R_{13}R_{34}}{R_{13}+R_{14}+R_{34}},$$

$$R_4 = \frac{R_{14}R_{34}}{R_{13}+R_{14}+R_{34}}.$$

Покажем, как вывести формулу, например, для R_{14}. Предоставим читателю возможность две другие формулы вывести самостоятельно.

Получим:

$$\frac{R_1R_4}{R_3} = \frac{R_{13}R_{14}R_{14}R_{34}}{R_{13}R_{34}\left(R_{13}+R_{14}+R_{34}\right)} =$$

$$= \frac{R_{14}^2}{R_{13}+R_{14}+R_{34}},$$

$$\sqrt{\frac{R_1R_4}{R_3}} = \frac{R_{14}}{\sqrt{R_{13}+R_{14}+R_{34}}}.$$

Аналогично:

$$\sqrt{\frac{R_1R_3}{R_4}} = \frac{R_{13}}{\sqrt{R_{13}+R_{14}+R_{34}}},$$

$$\sqrt{\frac{R_3R_4}{R_1}} = \frac{R_{34}}{\sqrt{R_{13}+R_{14}+R_{34}}}.$$

Сложив эти три равенства, получим:

$$\sqrt{\frac{R_1R_3}{R_4}} + \sqrt{\frac{R_1R_4}{R_3}} + \sqrt{\frac{R_3R_4}{R_1}} =$$

$$= \sqrt{R_{13}+R_{14}+R_{34}}.$$

Помножим полученное равенство на $\sqrt{\frac{R_1R_4}{R_3}}$, получим:

$$\frac{R_1R_4}{R_3} + R_4 + R_1 = \sqrt{\frac{R_1R_4}{R_3}\left(R_{13}+R_{14}+R_{34}\right)} =$$

$$= \sqrt{R_{14}^2} = R_{14}.$$

Аналогично получаем два других равенства.

При замене звезды сопротивлений на треугольник сопротивлений:

$$R_{14} = \frac{R_1R_4 + R_1R_3 + R_3R_4}{R_3} =$$

$$= R_1 + R_4 + \frac{R_1R_4}{R_3},$$

$$R_{13} = \frac{R_1R_4 + R_1R_3 + R_3R_4}{R_4} =$$

$$= R_1 + R_3 + \frac{R_1R_3}{R_4},$$

$$R_{34} = \frac{R_1R_4 + R_1R_3 + R_3R_4}{R_1} =$$

$$= R_3 + R_4 + \frac{R_3R_4}{R_1}.$$

При замене звезды сопротивлений на треугольник сопротивление в каждой стороне треугольника находим как сумму элементов, подключенных к узлам, между которыми производится замена, плюс их произведение, деленное на третий элемент заменяемой звезды.

Или: в числителе дроби сумма попарных произведений сопротивлений звезды, в знаменателе – сопротивление с индексом, не входящим в индекс сопротивления данной стороны треугольника.

Удивительные квадраты

Есть удивительный способ составления цепи с заданным сопротивлением из одинаковых резисторов с другим номиналом. Он работает, причем дает оптимальный ответ. Но почему – автор не знает. И не может пока додуматься, как могли этот способ изобрести. (Возможно, он связан с тем, что сумма токов в отдельных параллельных проводниках равна току последовательного с ними участка. Угадывается связь с алгоритмом Евклида).

Посмотрим на примере.

Задача 1. Пусть имеются одинаковые резисторы по 4 Ом, необходимо из них собрать цепь сопротивлением 7 Ом.

Решение. Построим прямоугольник размером 4 клетки на 7 клеток (рис.2).

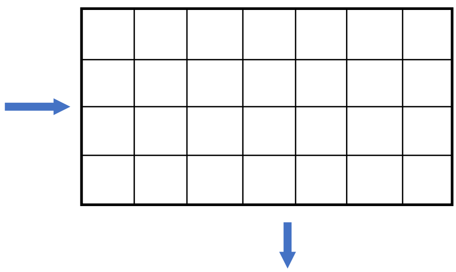


Рис. 2. К задаче 1

Со стороны «входа» (указано стрелкой) начнем отделять квадраты. Если очередной большой квадрат не получается, делим оставшуюся часть на меньшие квадраты, и так – до полного заполнения прямоугольника. На рис. 3 такое разделение указано красным цветом.

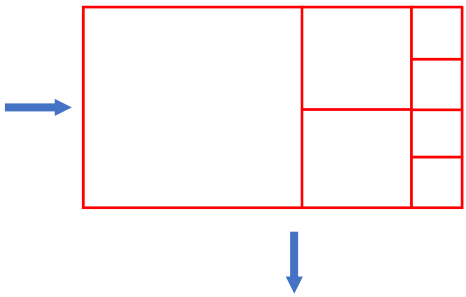


Рис.3. К решению задачи 1

Затем заменяем квадраты исходными сопротивлениями от «входа» к «выходу» и чертим схему (рис.4).

Легко убедиться в том, что соединяя так резисторы по 4 Ом, мы получим 7 Ом.

Точно так же можно собрать участок цепи с меньшим сопротивлением, имея сопротивления с бóльшим номиналом.

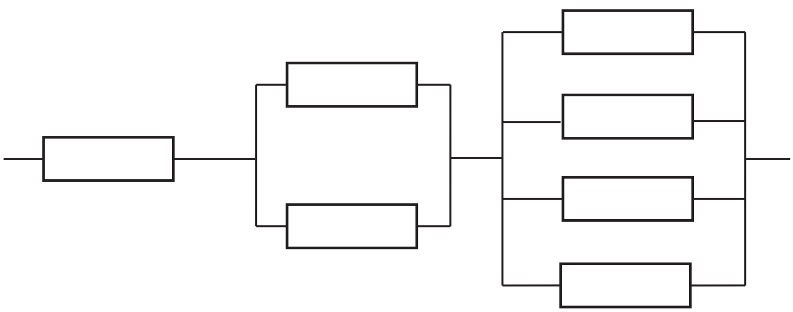


Рис. 4. Схема к решению задачи 1

Задача 2. Из резисторов с номиналами 11 Ом собрать участок цепи сопротивлением 4 Ом.

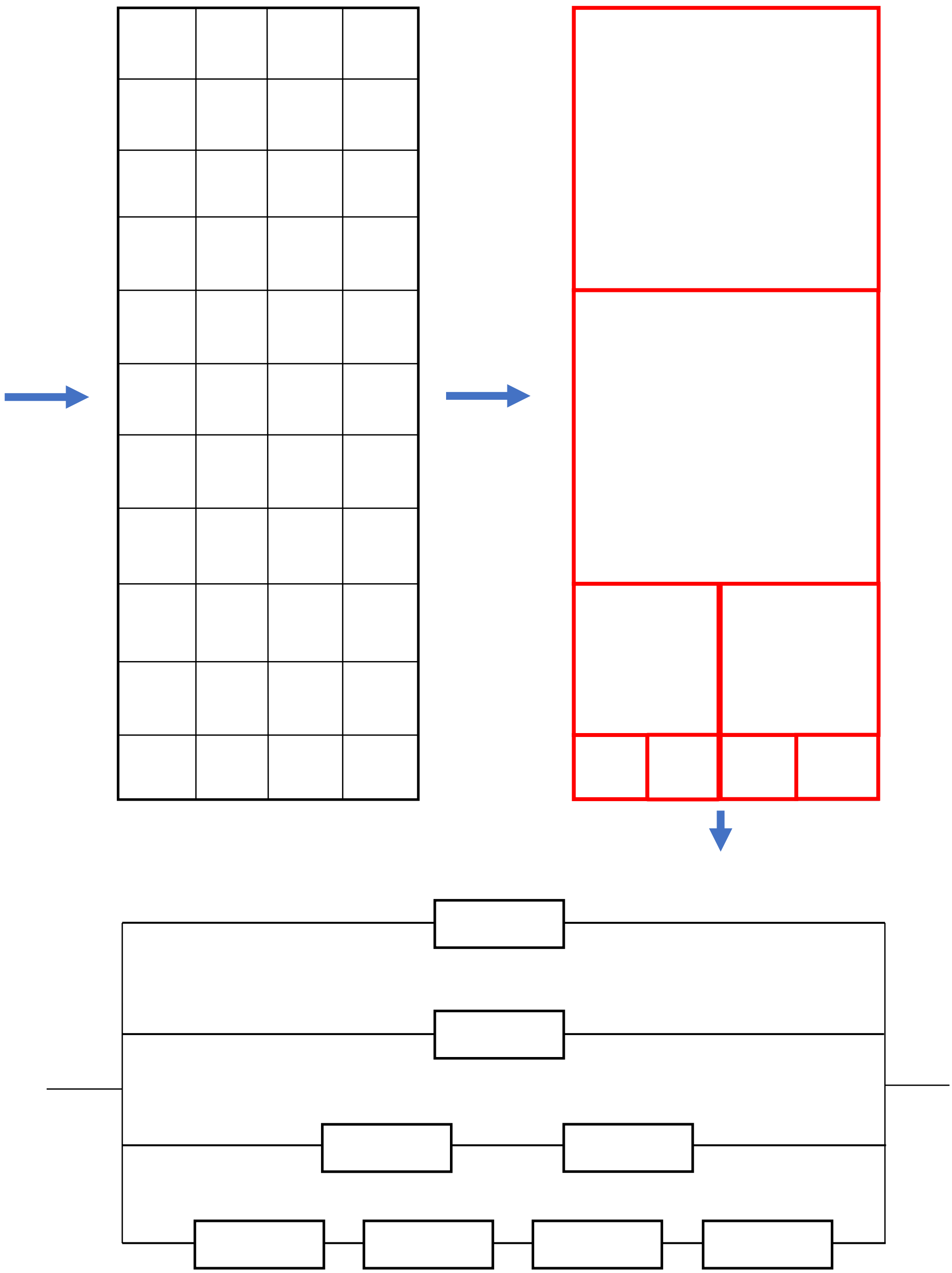


Рис. 5. К решению задачи 2

Решение. Решение без пояснений приведем на рис. 5.

Самостоятельно убедитесь, что и в этом случае способ работает.

Уверен, среди читателей найдется кто-то, кто возьмется выполнить исследовательскую работу:

1) Обосновать теоретически «способ квадратов».

2) Доказать, что этот способ является оптимальным.

3) Попытаться распространить этот способ на конструирование схем из резисторов с разными номиналами.

Сбалансированные ветви в симметричной цепи

В ряде случаев при расчете электрических цепей удается воспользоваться симметрией.

Не всякая «симметричная картинка» обладает симметрией в физическом смысле. Схема на рис. 6 будет симметрична, если, например, отношение «верхних» и соответствующих «нижних» сопротивлений слева и справа будут равны. Тогда схема сбалансирована, и в точке O можно разъединить верхнюю, среднюю и нижнюю ветви. Если бы схема не была сбалансирована, такое разъединение изменило бы режим работы – и мы получили бы ошибочное решение.

Задача 3. Участок цепи составлен из одинаковых резисторов R. Определить сопротивление цепи R_{AB} между точками A и B.

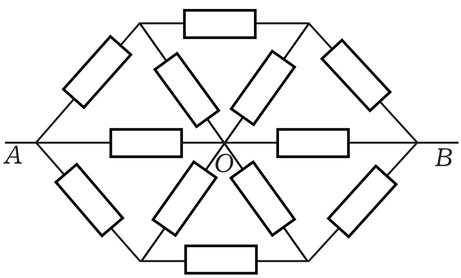


Рис. 6. К задаче 3

Решение.

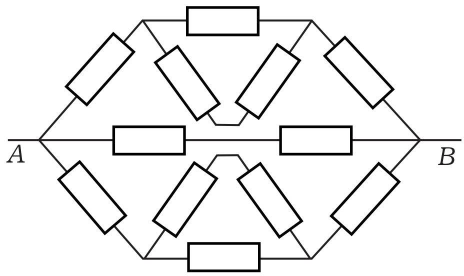


Рис. 7. К решению задачи 3

Схема обладает симметрией, причем левая и правая части схемы сбалансированы (см. предыдущую статью о мостиковой схеме). Поэтому в центре схему можно разделить на верхнюю, среднюю и нижнюю ветви. При этом режим работы этого участка не изменится.

Преобразовав таким образом схему, мы уже легко рассчитаем её сопротивление.

Сопротивления верхней и нижней ветвей равны:

$$R_в = R_н = R + \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} + R = \frac{8}{3}R.$$

Сопротивление средней ветви:

$$R_c = R + R = 2R.$$

Полное сопротивление R_{AB}:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{3}{8R} + \frac{1}{2R} + \frac{3}{8R} = \frac{10}{8R},\ R_{AB} = 0{,}8R.$$

Ответ: *0, 8R*.

Подчеркнем, что симметрия должна быть не «геометрическая», а *физическая*, цепь должна быть сбалансирована (см. статью [2]). На простом примере еще раз увидим, что нельзя разъединить какие-то точки цепи только на том основании, что их потенциалы одинаковы.

Пусть на рис. 8 сопротивления $R_1 = R_2 = R_3 = 20$ *Ом*, а сопротивление $R_4 = 180$ *Ом*. Напряжение на выводах участка *28 В*.

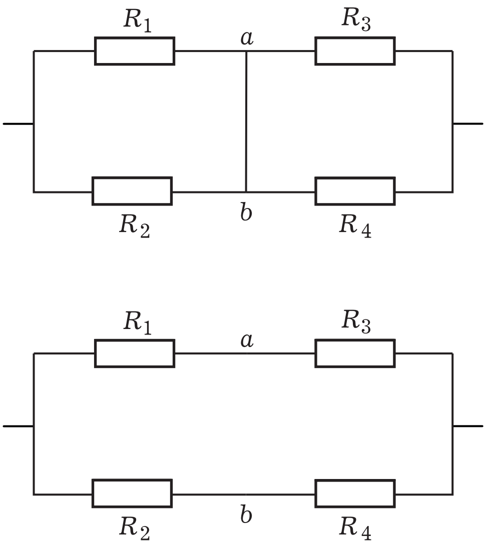


Рис. 8. Несбалансированный участок цепи

Точки *а* и *в* имеют одинаковые потенциалы, цепь выглядит геометрически симметричной. Но попробуем убрать перемычку – что получится?

Сопротивление участка цепи с перемычкой *28 Ом* и общий ток, который протекает по цепи, равен *1 А*.

Когда мы уберем перемычку, сопротивление участка цепи станет равным *33, 3 Ом*, а протекающий по цепи ток будет *0, 84 А*.

Предлагаем читателю самому убедиться в этом.

В чем же физическая причина расхождения в представленных выше расчетах? После удаления перемычки в несбалансированной цепи через резисторы R_1 и R_3 шел одинаковый ток (аналогично – через R_2 и R_4). Включение перемычки «разрушало» этот порядок, поскольку через нее проходил ток в направлении от *а* к *в*, что приводило к изменению всех токов, идущих через каждый из резисторов цепи. А это уже вызывало изменение общего тока в цепи, и, как следствие, менялось ее сопротивление.

Таким образом, на практике можно руководствоваться следующим правилом: удалять проводник, соединяющий точки одинакового потенциала, можно лишь в том случае, если по этому проводнику ток не идет.

Трансляционная симметрия

Трансляционная симметрия (симметрия переноса) проявляется в том, что какой-то элемент цепи повторяется. Например, в бесконечной цепи (рис. 9) повторяется звено, выделенное красным цветом.

Задача 4. Найти сопротивление бесконечной цепи. Величины сопротивлений указаны на схеме (рис. 9).

В данной схеме повторяется одно и то же звено. Если перенести начало цепи на одно звено вправо (отбросить одно повторяющееся звено, обозначенное на схеме красным цветом), то оставшаяся цепь будет точно такой же. Не изменится и её сопротивление.

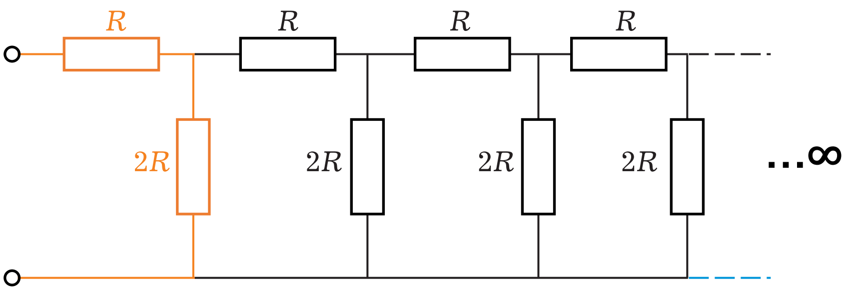


Рис. 9. Бесконечная цепь

Обозначим искомое сопротивление бесконечной цепи R_x. Если восстановить цепь, вернув отброшенное звено назад, снова получим бесконечную цепь, имеющую сопротивление R_x (рис.10). Такой метод называется методом рекурсии (когда объект строится повторением своих частей).

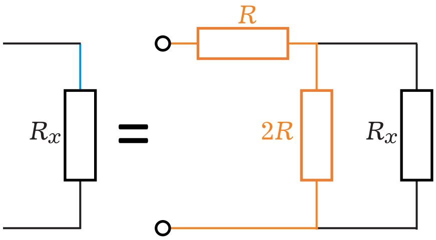


Рис. 10. Расчет бесконечной цепи

Остается составить и решить уравнение:

$$R_x = R + \frac{2R \cdot R_x}{2R + R_x}, R_x^2 - R \cdot R_x - 2R^2 = 0.$$

$$R_x = 2R.$$

Оставляем только положительный корень (сопротивление больше нуля).

Ответ: $R_x = 2R$.

Здесь сопротивления были подобраны так, чтобы ответ получился «красивым». Но чаще всего ответ не бывает целым. Чтобы убедиться, решите, например, самостоятельно задачу 5.

Задача 5. Определить сопротивление бесконечной цепи (рис. 11), в которой все сопротивления имеют одинаковые номиналы *R=1 Ом*.

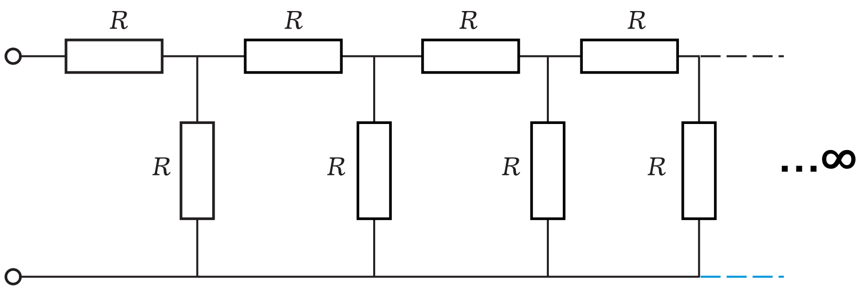


Рис. 11. К задаче 5

Ответ: $R_{экв.}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1,618$ *Ом.*

Ответ не «круглый», но опять… очень красивый! Мы получили Число Бога (так называется книга Марио Ливио о золотом сечении) $\varphi=1,618\dots$

Приняв ток в последнем звене цепочки из нескольких звеньев равным *1 А* и учитывая, что на параллельно соединенных ветвях напряжения одинаковые, получим последовательно значения токов, указанные на схеме (рис. 12):

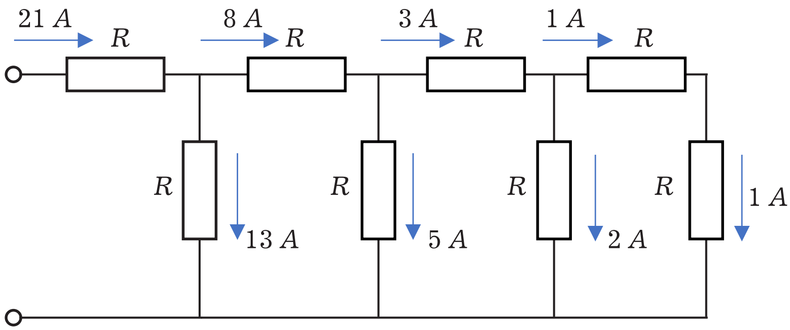


Рис.12. Распределение токов

Посмотрим на последовательность токов, протекающих через резисторы, начиная с крайнего: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21…

В 2022 году этому удивительному ряду исполняется 820 лет! Это числа Фибоначчи. Ряд появился в задаче о подсчете числа кроликов в потомстве пары кроликов.

Похоже, от красоты в физике не уйти: даже нецелый ответ таит в себе красоту!

Что считать бесконечностью?

Бесконечные цепочки – некоторая абстракция. Имеют ли они отношение к реальному миру с его конечными размерами, конечными предметами?

На самом деле, мы все время встречаемся в физике с идеальными моделями. С помощью «бесконечных» гармонических колебаний мы вполне хорошо описываем реально происходящие ограниченные во времени и в пространстве колебания. С помощью «бесконечно» больших сопротивлений приемлемо описываем «идеальный вольтметр» и т.д.

Сколько же звеньев нужно в цепочке сопротивлений, чтобы с хорошим приближением считать такую схему «бесконечной»?

Посмотрим, как отличаются ответы для конечной цепочки и бесконечной цепи, устроенной подобным образом. Посчитав последовательно сопротивление цепи, представленной на рис. 12 и сравнив результат с сопротивлением бесконечной цепи (рис. 11), получим относительную погрешность при замене расчета конечной цепи расчетом цепи бесконечной.

Относительная погрешность уже цепи из трех звеньев равна

$$\alpha = \frac{|1{,}61803 - 1{,}62499|}{1{,}62499} \cdot 100\% = 0{,}43\%.$$

Для четырех звеньев:

$$\alpha = \frac{|1{,}61803 - 1{,}61905|}{1{,}61905} \cdot 100\% = 0{,}06\%.$$

Точность так высока и так быстро возрастает с каждым следующим звеном, что удобнее и быстрее считать сопротивление бесконечной цепи вместо того, чтобы детально считать по участкам, постепенно «сворачивая» схему.

В физике подобным образом поступают часто, например, интегрируя какие-то функции до бесконечности, хотя величина, по которой интегрируют, ограничена.

И... высказываем сожаление: «нельзя объять необъятное». Но надеемся продолжить рассмотрение электрических схем.

Литература

1. *Мычка Е.Ю.* Расчёт электрических цепей // Потенциал, 2021, №2, с. 44-47.
2. *Корнеев В.Т.* О расчете электрических схем // Потенциал, 2021, №11, с. 19-31.

Новости Новости Новости Новости

Космонавты приступают к обучению принципам работы многоканального гиперспектрального комплекса, разработанного на базе МФТИ

В 2022 году на МКС будет запущен многоканальный гиперспектральный комплекс, созданный на Физтехе. На данный момент начинается обучение членов экипажа, которые будут сопровождать отправку прибора на орбиту и проводить с его помощью съемку наземных объектов. Космонавты обучатся основам монтажа изделия, принципам съемки и способам обработки информации.

Многоканальный гиперспектральный комплекс, разработанный на базе лаборатории космической оптико-электронной аппаратуры «Элфокс» МФТИ при участии АО «НПО «Лептон», прошел полный цикл испытаний и готов к отправке в космос. Реализация проекта проводилась в течение трех с половиной лет по заказу РКК «Энергия» им. С.П. Королёва.

Многоканальный гиперспектральный комплекс предназначен для наблюдения за Землей из космоса и для детальной съемки наземных объектов в видимом и инфракрасном диапазонах спектра. Прибор состоит из трех основных частей: аппаратного модуля, специального кронштейна для установки на 9-й иллюминатор российского сегмента МКС и его наведения на объект съемки, а также программного обеспечения.

По словам заведующего лабораторией космической оптико-электронной аппаратуры «Элфокс» МФТИ Сергея Шибанова, такие приборы крайне востребованы и давно используются в мировой практике. Аппарат, разработанный на Физтехе, не имеет российских аналогов, по своим характеристикам не уступает зарубежным, в чем-то даже превосходит.

Прибор способен снимать объекты в большом диапазоне. Информационная возможность — 180 спектральных каналов.

Продолжение: https://mipt.ru/news/