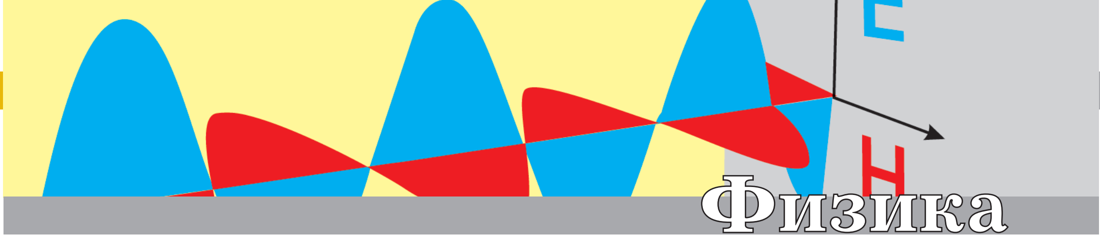

Лукьянов Андрей Александрович
Кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий инженер Лаборатории по работе с одаренными детьми МФТИ

Сюрпризы статики

Часть 4

Продолжение рассказа о работе Олимпиадной школы при МФТИ в Климентовском пер. г. Москвы. Темы настоящей статьи – еще о выборе оси, относительно которой писать условие моментов, о коэффициентах трения покоя и скольжения, о статически неопределимых системах, о минимуме потенциальной энергии и положении центра тяжести протяженного тела.

1. Сюрприз лестница у стены

Начнем с одной очень известной задачи. Ее в разных вариациях можно найти во многих задачниках. Задача ставится примерно так. *Верхний конец лестницы опирается на шероховатую вертикальную стенку, а нижний стоит на шероховатом горизонтальном полу. Коэффициенты трения покоя лестницы о пол и о стенку равны, соответственно, μ_1 и μ_2. Определите, при каком наибольшем значении угла α между стеной и лестницей лестница еще будет находиться в равновесии?* (Лестницу считать тонким однородным параллелепипедом; рис.1а.)

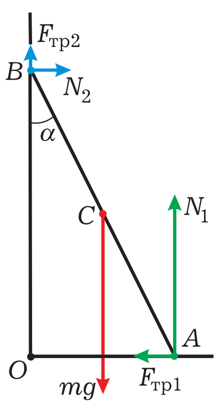

Рис.1а

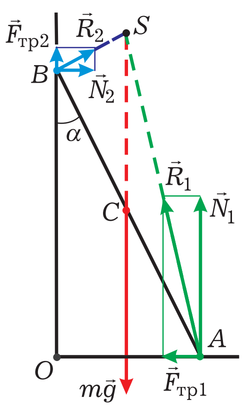

Рис.1б

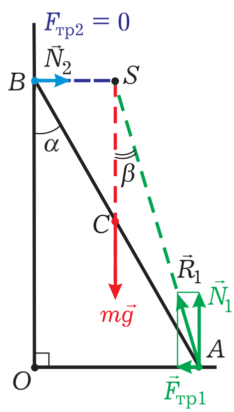

Рис.1в

Самостоятельно решите эту задачу. Мы же сосредоточим свое внимание на более сложном ее продолжении. Ответ в задаче такой: $tg\alpha_{\max} = \frac{2\mu_1}{1-\mu_1\mu_2}$ (*). (Если возникнут проблемы с решением, воспользуйтесь соображениями, изложенными ниже.) Например, для гладкой стены $(\mu_2 = 0)$ и при коэффициенте трения о пол $\mu_1 = 0{,}5$ имеем $tg\alpha_{\max} = 1$, т.е. $\alpha_{\max} = 45^\circ$. При этом угле начнется **проскальзывание** между лестницей и полом (а также между лестницей и стенкой). Перед самым началом проскальзывания сила трения станет равной **максимальной силе трения покоя**. Коэффициент трения покоя определен именно через эту **максимальную** силу трения покоя. Когда лестница будет уже в движении, сила трения превратится в силу трения скольжения. Это не просто фигура речи. Остановимся на этом чуть подробней.

Сила трения скольжения вычисляется по эмпирической формуле Амонтона – Кулона (автора знаменитого закона электростатики)

$$F_{тр.ск.} = \mu_{ск} N, \qquad (A)$$

где N – нормальная компонента силы реакции опоры, а $\mu_{ск.}$ – коэффициент трения скольжения.

Для силы трения покоя нет такой простой формулы. Точнее так: если мы, например, толкаем горизонтальной силой 20 Н стол, стоящий на горизонтальном полу, но стол еще не способны сдвинуть, то сила трения (в данном случае – сила трения покоя) в точности равна приложенной силе, т.е. 20 Н, но противоположно ей направлена. (Иногда ошибочно считают, что сила трения в этом случае больше приложенной силы. Это, безусловно, не так. Почему же тогда стол не «едет» на нас?!) Итак, пока движение стола не началось, величина силы трения покоя равна $F_{тр.\ пок.} = F$ – приложенной силе вдоль предполагаемого направления движения. С увеличением приложенной силы растет и сила трения покоя, оставаясь равной приложенной силе. Однако если на величину приложенной силы нет практически никаких ограничений, то сила трения покоя не может вырасти до бесконечности. В каждом конкретном случае есть предел ее роста – максимальная сила трения покоя. Для нее, как и для силы трения скольжения, есть эмпирически найденная формула, аналогичная (A):

$$F_{тр.пок.\max} = \mu_{пок} N, \qquad (B)$$

где $\mu_{пок.}$ – коэффициент трения покоя.

Иногда говорят, что сила трения скольжения равна максимальной силе трения покоя. Если бы коэффициенты $\mu_{пок.}$ и $\mu_{ск.}$ были равны друг другу, утверждение о том, что сила трения покоя не может превосходить силу трения скольжения, было бы абсолютно правильным. Но в том-то и дело, что они равны друг другу лишь приближенно, – а иногда даже и приближенно не равны друг другу. Во всех известных случаях коэффициент трения покоя больше, чем коэффициент трения скольжения. Этим объясняют тот факт, что, например, сдвинуть какой-нибудь предмет с места бывает труднее, чем потом поддерживать движение.

Таблица. Коэффициенты трения по книге [4]

	Коэффициент трения покоя $\mu_{пок.}$	Коэффициент трения скольжения $\mu_{ск.}$
Кожа по дереву	0.5÷0.6	0.3÷0.5
Кожа по металлу	0.3÷0.5	Около 0.3
Металл по металлу	0.15÷0.25	Около 0.1
Металл по дереву	0.4÷0.6	0.3÷0.5
Веревка по дереву	0.5÷0.8	Около 0.5
Дерево по дереву	0.4÷0.7	Около 0.3
Сталь по льду	Около 0.03	0.015

Возвратимся к задаче о лестнице у стены. Если мы интересуемся моментом начала скольжения лестницы, то для критического угла между лестницей и стенкой имеем соотношения между силами трения и нормальными реакциями $F_{тр1} = \mu_1 N_1$ и $F_{тр2} = \mu_2 N_2$. Именно этими соотношениями нужно пользоваться при получении формулы $tg\alpha_{\max} = \dfrac{2\mu_1}{1-\mu_1\mu_2}$ (*).

А теперь **новая задача**. *Лестница одним концом опирается на шероховатый горизонтальный пол, а другим – на шероховатую вертикальную стену. Угол между лестницей и стеной, при котором лестница начинает соскальзывать, равен $\alpha_{\max}$. Реальный угол α между стеной и лестницей **меньше критического**, поэтому лестница устойчиво стоит. Масса лестницы m. Определите по этим данным нормальные силы реакции со стороны пола и стены, N_1 и N_2, а также обе силы трения между полом и лестницей, $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$. Лестницу считать тонким однородным параллелепипедом.*

Здесь с самого начала ясно, что $F_{тр1} \neq \mu_1 N_1$ и $F_{тр2} \neq \mu_2 N_2$. То есть не известны именно четыре силы, а не две. Попробуем установить для них какие-нибудь связи. В условиях равновесия должно быть выполнено равенство нулю равнодействующей сил, приложенных к лестнице $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N = 0$. В проекциях на горизонтальное и вертикальное направления это дает два соотношения, позволяющих выразить обе силы трения через свои нормальные силы реакции:

$$N_2 - F_{тр1} = 0 \Rightarrow F_{тр1} = N_2 \qquad (1)$$

$$N_1 + F_{тр2} - mg = 0 \Rightarrow F_{тр2} = mg - N_1 \qquad (2)$$

В состоянии равновесия равна нулю еще и сумма моментов всех сил $M_1 + M_2 + ... + M_N = 0$, причем **относительно любой реальной или мысленно выделенной оси.** Какую ось взять в нашем случае? Попробуем ось, проходящую перпендикулярно рисунку через точку А лестницы (рис.1а):

$$N_2 l\cos\alpha + F_{тр2} l\sin\alpha - mg\frac{l}{2}\sin\alpha = 0, \qquad (3а)$$

где l – длина лестницы, которая, впрочем, сокращается. Подстановка в (3а) значения силы трения (2) приводит к уравнению

$$N_1 \sin\alpha - N_2 \cos\alpha = \frac{1}{2} mg \sin\alpha. \quad (4)$$

Но это ОДНО уравнение с ДВУМЯ неизвестными N_1 *и* N_2. Его одного мало для нахождения двух сил N_1 и N_2. Есть ли еще какие-нибудь соотношения? По неопытности можно попробовать записать еще правило моментов относительно других осей, например, проходящих перпендикулярно рисунку через точки В и С (центр тяжести лестницы):

$$-N_1 l \sin\alpha + F_{mp1} l \cos\alpha + mg \frac{l}{2} \sin\alpha = 0 \quad (3b)$$

$$F_{mp1} \frac{l}{2} \cos\alpha + N_2 \frac{l}{2} \cos\alpha +$$
$$+ F_{mp2} \frac{l}{2} \sin\alpha - N_1 \frac{l}{2} \sin\alpha = 0 \quad (3c)$$

Однако подстановка сюда сил трения (1−2) приводит снова к уравнению (4). Кстати, это уравнение мы могли написать сразу, если бы с самого начала догадались записать правило моментов относительно оси O, границы между стеной и полом

$$mg \frac{l}{2} \sin\alpha - N_1 l \sin\alpha + N_2 l \cos\alpha = 0 \quad (3o)$$

С одной стороны, мы убедились, что правило моментов, действительно, можно записывать для любых осей, − результат во всех случаях один и тот же. С другой стороны, удивительно, что легкая с виду **задача о лестнице с углом наклона не совпадающем с критическим, НЕ имеет решения**. А всего лишь исчезли соотношения $F_{mp1} = \mu_1 N_1$ и $F_{mp2} = \mu_2 N_2$! (Которыми, увы, многие учащиеся продолжают пользоваться и в случае сил трения покоя, даже если это не максимальные силы трения покоя.)

Скажем еще об одной любопытной оси в этой задаче. Но прежде − еще кое о чем важном. Когда мы говорим, что пол действует на лестницу двумя силами $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_{mp1}$, а стена − тоже двумя силами $\vec{N}_2$ и $\vec{F}_{mp2}$, мы поступаем не очень хорошо. Правильнее говорить, что силу реакции со стороны пола мы представляем в виде суммы двух составляющих − перпендикулярно полу и вдоль пола $\vec{R}_1 = \vec{N}_1 + \vec{F}_{mp1}$. Аналогично − для силы реакции со стороны стены: $\vec{R}_2 = \vec{N}_2 + \vec{F}_{mp2}$. То есть в действительности к лестнице приложено не 5 сил, а три: $m\vec{g}$, $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$, − просто силы реакции пола и стены мы разложили на две компоненты.

Любопытно, что **в условиях равновесия твердого тела в случае ТРЕХ СИЛ, действующих на тело, когда все они лежат в одной плоскости**, прямые, которым принадлежат векторы этих сил, **пересекаются в одной точке** («теорема о трех силах», [5]). В нашем случае эти прямые пересекаются в некоторой точке S (рис.1б). Условие моментов относительно этой оси в нашей задаче (о лестнице) не помогло бы. Дело в том, что относительно оси S момент каждой из трех сил $m\vec{g}$, $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ равен нулю $M_{S,mg} = M_{S,R_1} = M_{S,R_2} = 0$, т.к. для каждой из этих сил равны нулю плечи сил относительно оси S. Поэтому равенство $\sum M_S = 0$ выполняется автоматически и не дает никаких соотношений между силами.

Рассмотрим **упрощенный вариант задачи, когда стенка гладкая** ($F_{mp2} = 0$). В этом случае задача решается до конца. Из рис.1в видно, что $N_1 = mg$ и $tg\beta = \frac{1}{2}tg\alpha$, поэтому из силового треугольника в нижней части рис. 1 в следует $F_{mp1} = N_1 \cdot tg\beta = \frac{1}{2}mg \cdot tg\alpha = N_2$. При $\mu_1 = 0{,}5$ $(\alpha_{max} = 45^\circ)$ и $\alpha = 30^\circ < 45^\circ$ имеем

$$F_{mp1} = \frac{1}{2}mg \cdot tg30^\circ \approx 0{,}29mg < \mu_1 N_1 = 0{,}5mg,$$

т.е. получилась сила трения покоя меньше, чем максимальная сила трения покоя (как и должно быть).

2. В инженерной практике часто встречаются системы, в которых число наложенных связей больше числа уравнений равновесия. В этих системах невозможно определить некоторые или даже все силы. Такие системы называют **статически неопределимыми системами**. Неизвестные усилия в таких системах часто удается все же найти, рассмотрев малые деформации в системах и воспользовавшись законом Гука. Фактически рассматривают тоже **статическое** (хотя и деформированное) состояние в системе. Так что терминология немного вводит в заблуждение (никакой динамики, например, колебаний, не рассматривается).

Задача. Симметричная жесткая балка массой m прикреплена геометрически симметрично с помощью трех «нитей» – двух резиновых жгутов (1 и 2) и медной проволоки (3); рис.2. Пренебрегая массой «нитей», определите силы их натяжения. Площади поперечного сечения «нитей» одинаковы.

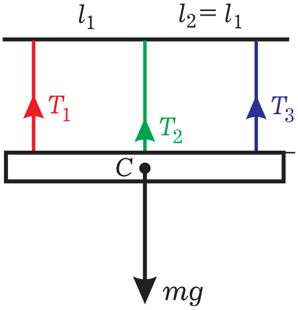

Рис. 2а

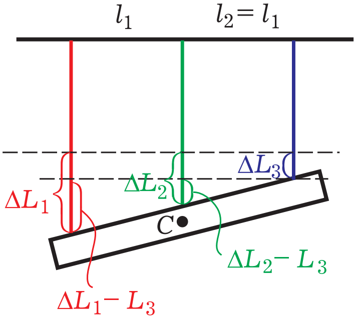

Рис. 2б

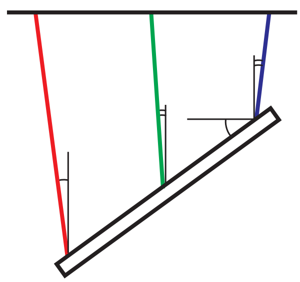

Рис. 2в

Решение. Запишем условия равновесия

$$T_1 + T_2 + T_3 = mg \qquad (1)$$

$$T_1 \cdot l_1 - T_3 \cdot l_1 = 0 \Rightarrow T_1 = T_3 \qquad (2)$$

Во втором из них (условии моментов относительно оси С, проходящей через центр тяжести балки перпендикулярно рисунку) учтено, что плечи сил тяжести и силы натяжения нити T_2 равны нулю, поэтому равны нулю моменты этих сил. (Все деформации считаем малыми, поэтому малыми считаем все отмеченные на рис. 2в углы.)

Итак, быстро нашлась связь двух натяжений $T_1 = T_3$. Но возникла проблема: уравнений (1–2) – два, а неизвестных – три. Кажется, что все уравнения мы исчерпали и задачу не решим. Но помогает рассмотрение малых деформаций «нитей» и закон Гука (деформациями балки пренебрегаем). Рассмотрим малые растяжения «нитей» ΔL_1, ΔL_2 и ΔL_3 – рис.2б. Они не независимы. Из подобия соответствующий треугольников на рис.2б (каких именно?) имеем:

$$\frac{\Delta L_1 - \Delta L_2}{\Delta L_1 - \Delta L_3} = \frac{l_2}{l_1 + l_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta L_2 = \frac{\Delta L_1 + \Delta L_3}{2} \qquad (3)$$

Чтобы связать приращения длин «нитей» с силами, запишем закон Гука для каждой из них

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta L_1}{L} = \dfrac{T_1}{E_1 S} \\ \dfrac{\Delta L_2}{L} = \dfrac{T_2}{E_1 S} \\ \dfrac{\Delta L_3}{L} = \dfrac{T_3}{E_3 S} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{E_1 S}{L}\Delta L_2 = \frac{E_1 S}{L}\cdot\frac{\Delta L_1 + \Delta L_3}{2} =$$

$$= \frac{E_1 S}{2}\cdot\left(\frac{T_1}{E_1 S} + \frac{T_3}{E_3 S}\right) = \frac{T_1}{2} + \frac{E_1}{E_3}\frac{T_1}{2} \approx \frac{T_1}{2}.$$

При этом учтено, что модуль Юнга резины $E_1 = E_2$ порядка 10^6 Па много меньше модуля Юнга меди E_3 (порядка 10^{11} Па). Дальше всё просто:

$$T_2 \approx \frac{T_1}{2},$$

$$T_1 + \frac{T_1}{2} + T_1 \approx mg \Rightarrow T_1 \approx \frac{2}{5}mg \approx T_3,$$

$$T_2 \approx \frac{1}{5}mg. \qquad (4–6)$$

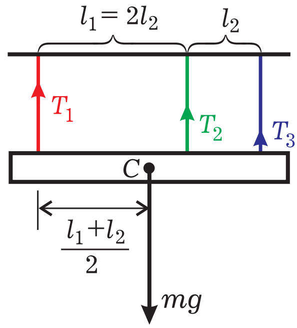

Рис. 3

В данной задаче условие моментов и симметрия задачи позволили нам быстро установить соотношение $T_1 = T_3$. Соотношение $T_2 \approx \dfrac{T_1}{2}$ тоже нетрудно понять: медная проволока почти не деформировалась, т.е. $\Delta L_3 << \Delta L_1$, ΔL_2. Тогда в силу геометрии и пренебрежения деформацией балки имеем $\Delta L_1 \approx \Delta L_2 / 2$. Далее надо учесть закон Гука для двух резиновых жгутов 1 и 2 равного поперечного сечения.

Самостоятельно решите задачу о несимметричном подвесе балки на трех нитях из одного и того же материала и одинакового сечения (рис.3).

Ответ: $T_1 = \dfrac{11}{28}mg$, $T_2 = \dfrac{9}{28}mg$, $T_3 = \dfrac{8}{28}mg$

Три следующие задачи не предполагают сложных вычислений – это, скорее, вопросы на понимание.

3. Рассмотрим однородный брусок в форме прямоугольного параллелепипеда массой *m*. С помощью подпорки (под центром тяжести бруска) уравновесим его. Вопрос: с какой силой f действует на правую четверть бруска левая его часть (рис. 4)?

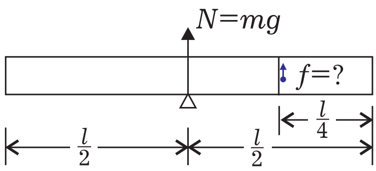

Рис. 4

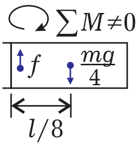

Рис. 5а

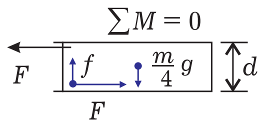

Рис. 5б

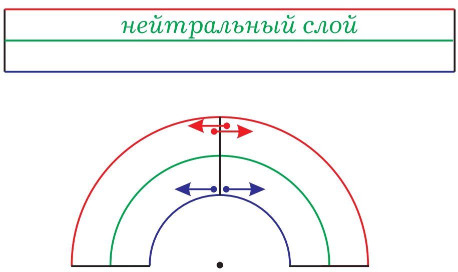

Рис. 6

Ответ может показаться тривиальным: чтобы уравновесить силу тяжести $mg/4$, действующую на правую часть бруска вниз и приложенную к центру тяжести этой части бруска, должна быть еще одна вертикальная сила $f = mg/4$, но направленная вверх. Неприятность, однако, состроит в том, что только эта пара сил не обеспечивает равного нулю суммарного момента всех сил (рис.5а), чего не может быть в состоянии равновесия. Каких-то еще сил мы явно не учли. Нетрудно понять, каких. Возьмите ластик и согните его (рис.6). Ясно, что расстояния между точками нижнего слоя уменьшатся, а расстояния между точками верхнего слоя увеличатся. Понятно, что при сближении точек (каких?) ластика между ними возникнут силы отталкивания, а при удалении точек друг от друга (каких?) возникнут силы притяжения.

Разумеется, твердый (деревянный, металлический) брусок не испытает такого же заметного на глаз изгиба, как ластик. Но изгиб этот есть. И он обеспечивает появление, грубо говоря, еще пары сил $\vec{F}$ и $-\vec{F}$ (рис. 5б). На самом деле силы вдоль бруска, перпендикулярные границе раздела «четвертушки» бруска и оставшейся его части, будут существовать в каждой точке границы, а не только в крайних точках. Они будут разными по модулю – максимальными у верхней и нежней границы бруска, но направленными в разные стороны. Существуют даже точки, в которых силы будут равны нулю. Это точки пересечения так называемого нейтрального слоя (на рис.6 он показан зеленым цветом) с границей «четвертушки» бруска; расстояние между отдельными точками этого слоя после изгиба будут такими же, как в недеформированном состоянии.

Любопытно, что сумма всех продольных сил на левой границе «четвертушки» будет равна нулю (в упрощенной картине $\vec{F} + (-\vec{F}) = 0$). В этом смысле ответ, что сила, с которой оставшаяся часть бруска действует на выделенную «четвертушку» с силой $f = mg/4$, направленной вверх, в сущности, правилен.

Рассуждая упрощенно о паре сил $\vec{F}$ и $-\vec{F}$, мы можем даже оценить эти силы. Из равенства нулю моментов всех сил, приложенных к выделенной части бруска, имеем $\frac{mg}{4}\cdot\frac{l}{8}-F\cdot d=0\Rightarrow F=\frac{mgl}{32d}$. (Относительно какой оси записано условие моментов?)

4. Следующая задача возникла при чтении замечательной книги *В.Л. Кирпичева* [6]. Привлек внимание рисунок на стр.44 в **Беседе 1-й**, **п.17. Принцип отвердения** (см. рис.7). Автор пишет: «*Для вывода условий равновесия систем (жидких тел, гибких нитей и т.д.) часто пользуются принципом, который заключается в следующем:*

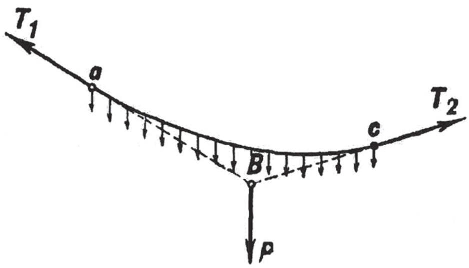

Рис. 7

Если система находится в равновесии, то мы можем предположить, что эта система отвердела и сделалась вполне жесткой, неизменной; равновесие при этом не будет нарушено.

Предположив отвердение системы, мы можем применять к ней уравнения равновесия твердого тела».

Взглянув на рис. 7, первое, о чем мы можем подумать, – нельзя ли найти центр тяжести несимметрично подвешенной гибкой нити, воспользовавшись «теоремой о трех силах» [5]. Ясно, что пересечение линий действия сил натяжения даст точку B, через которую пройдет и линия, вдоль которой действует сила тяжести нити $\vec{P}=m\vec{g}$. Где именно на этой вертикали лежит центр тяжести? Увы, не на пересечении с гибкой нитью, а немного выше. Определить, где конкретно, школьными методами, видимо, невозможно.

Сделаем небольшое историческое добавление о принципе отвердения. Автор этого принципа – голландский физик С. Стевин (1548–1620), старший современник Галилея (1564–1642). Своим принципом отвердения он в частности доказал **чисто теоретически** закон Архимеда **для тел произвольной формы. Из этих же соображений следовало, что** для всех тел **выталкивающая сила приложена к центру тяжести вытесненной ими жидкости** (см. книгу Э. Маха [7]). (На самом деле методом отвердения пользовался и Архимед [8]. Это стало сюрпризом для автора статьи.)

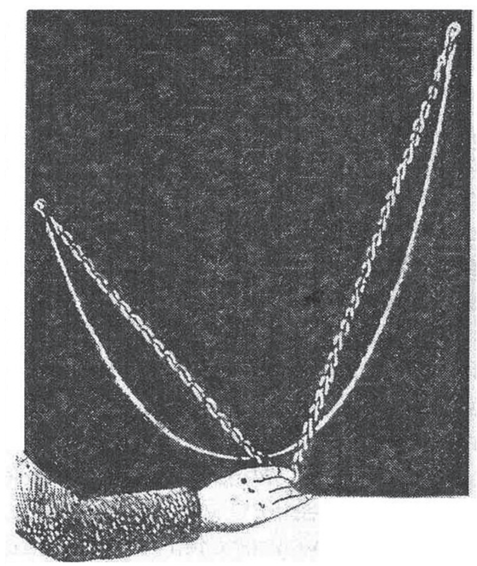

Рис. 8

5. Следующая задача из «Механики» Э. Маха (1836–1916). *Цепочка подвешена за два конца. Некто взялся за нижнюю часть цепочки и потянул вниз. При этом образовался почти угол* (рис.8). *Поднялся или опустился при этом центр тяжести цепочки?*

Многие наверняка знают эту задачу. Она давалась лет 50 назад на одной из олимпиад МФТИ по физике для школьников. Все же впервые она возникла лет на 200 раньше – в беседах братьев Я. и И. Бернулли (1654–1798 и 1700–1782). Э. Мах пишет об этом: «*Прогуливаясь по улицам Базеля и обсуждая всевозможные математические вопросы, Иоганн и Якоб Бернулли наткнулись на следующий вопрос: какую форму могла бы принять свободно висящая цепь, укрепленная в двух своих концах? Они скоро и легко сошлись на том взгляде, что цепь примет ту форму равновесия, при которой ее центр тяжести будет лежать возможно ниже*».

Причина этого в том, что в состоянии равновесия минимальной должна быть потенциальная энергия цепочки – в данном случае потенциальная энергия в поле сил тяжести, т.е. величина $mgh_{ЦТ}$. Для цепочки, форму которой школьники еще не знают, это не так очевидно. Проще понять это (даже без вычислений) на примере маленького шарика, скатывающегося в лунку: он стремится занять положение в самой нижней части лунки. После нескольких колебаний, затухающих вследствие трения, шарик таки «достигает своей цели»: его потенциальная энергия станет минимальной.

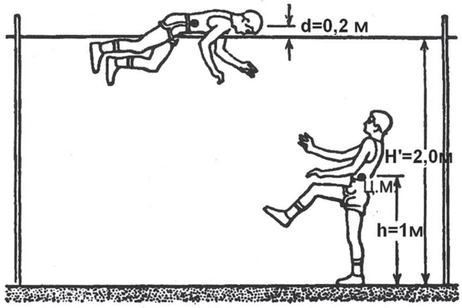

Рис. 9. Перекидной способ прыжка [10]

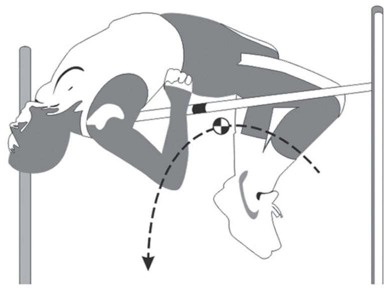

Рис. 10. Прыжок стилем Фосбери-флоп (из Интернета)

6. Соображения о наименьшей потенциальной энергии протяженного тела и о положении центра тяжести этого тела нашли неожиданное применение при разработке стиля Фосбери-флоп прыжка в высоту. Этот стиль оказался менее энергозатратным, чем перекидной (рис.9) Дело в том, что в перекидном способе центр тяжести (ЦТ) прыгуна с учетом конечной толщины тела спортсмена должен пройти ***над*** планкой. Для стиля Фосбери-флоп, при котором прыгун над планкой проходит спиной вниз с большим прогибом, оказывается возможным поднимать ЦТ не так высоко – даже ***ниже планки*** (рис.10). Несколько лет назад автору пришло на ум, что упрощенной, но наглядной моделью этого, допускающей простой расчет, может быть переползание гусеницей забора [9]. Самостоятельно решите **задачу:** *Гусеница длиной* l *(толщиной пренебрегаем) переползает через тонкий вертикальный забор, высота которого больше длины гусеницы. Определить положения центра тяжести гусеницы в промежутке от момента, когда она только достигнет своей передней частью высшей точки забора* (рис. 11б), *до момента, когда она полностью переползет через эту точку* (рис. 11д). (**Ответ**: $x_C(x) = (2x^2 - 2lx + l^2)/2l$; x – расстояние, на которое переползет высшую точку забора голова гусеницы.) *Докажите, что ЦТ гусеницы ни в какой момент не достигает высшей точки забора.*

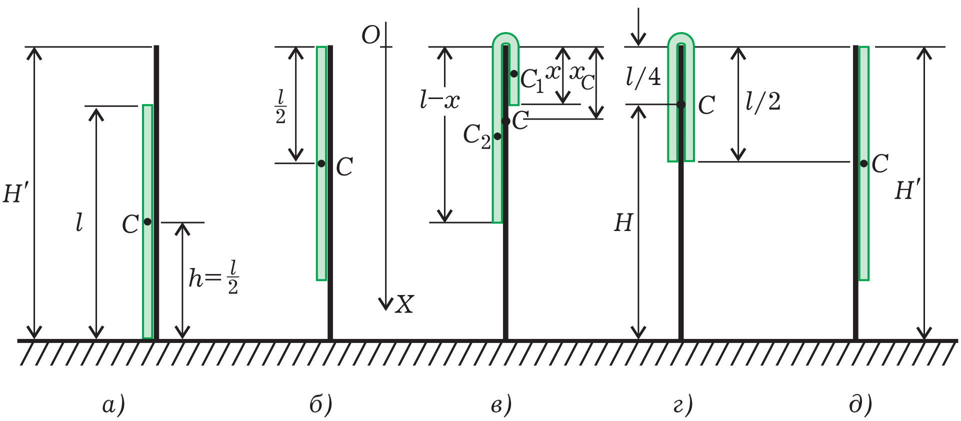

Рис. 11. Этапы переползания забора гусеницей (зеленая полоска)

Литература

1. *Лукьянов А.А.* Сюрпризы Статики. Часть 1 // Потенциал, 2021, № 6, с. 49-58.
2. *Лукьянов А.А.* Сюрпризы Статики. Часть 2 // Потенциал, 2021, № 7, с. 42-51.
3. *Лукьянов А.А.* Сюрпризы Статики. Часть 3 // Потенциал, 2021, № 8, с. 30-41.
4. *Тимошенко С., Юнг Д.* Инженерная механика. – М.: МАШГИЗ, 1960. – 508 с. (Стр.53 – коэффициенты трения покоя и скольжения)
5. *Павленко Ю.Г.* Начала Физики. Учебник. – 2-е изд. – М.: «Экзамен», 2005. – 864 с. (стр. 160)
6. *Кирпичев В.Л.* Беседы о механике. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 360 с. (стр. 44
7. *Мах Э.* Механика. Историко-критический очерк ее развития. – Ижевск, 2000. – 456 с. (стр. 67 – цепна–я линия; стр.76 – принцип отвердения Стевина)
8. *Павлов А.М.* Курс общей физики. Механика. – М.-Ижевск: РХД, 2008. – 412 с. (стр. 365)
9. *Киркинский А.И., Лукьянов А.А.* Еще о прыжках в высоту разными стилями на Земле и на Луне / Потенциал, Июль, 2016, №7, с. 35–41
10. *Дубровский В.И., Федорова В.Н.* Биомеханика. – 3-е изд. – М.: Изд-во ВЛАДОС-ПРЕСС, 2008. – 669 с., с. 175-179 («Энергетика прыжков»)