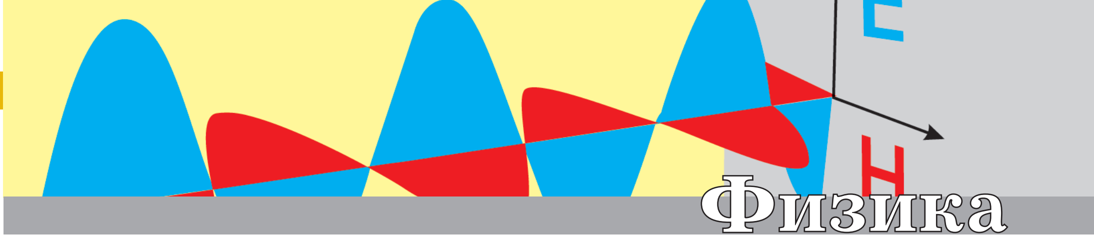

Лукьянов Андрей Александрович
Кандидат физико-математических наук, доцент,
ведущий инженер Лаборатории
по работе с одаренными детьми МФТИ

Сюрпризы статики
Часть 3

Продолжение рассказа о работе Олимпиадной школы при МФТИ в Климентовском пер. г. Москвы. В предыдущих статьях [1,2] автора речь шла о задачах по теме «статика», в которых можно было обойтись без понятия момента силы. Настоящая статья – о моменте сил, о центре тяжести тела, о правиле моментов в условии равновесия твердого тела, о выборе оси, относительно которой удобно писать условие моментов сил

Напомним, что моментом M силы $\vec{F}$ относительно оси O (см. рис.1; ось O направлена перпендикулярно плоскости рисунка) называют произведение модуля силы $F=\left|\vec{F}\right|$ на плечо d, взятое с соответствующим знаком:

$$M=\pm Fd, \qquad (1)$$

где d – длина перпендикуляра, проведенного от оси до линии действия силы $\vec{F}$, причем **знак момента** определяется выбором положительного направления вращения, например, он считается положительным, если сила вызывает вращение тела по часовой стрелке.

Момент силы $\vec{F}$ относительно оси O положителен, а момент силы $\vec{F}'$ относительно этой же оси отрицателен. (А каковы знаки моментов этих сил относительно осей O' и O'' (которые, как и ось O, перпендикулярны рисунку)?)

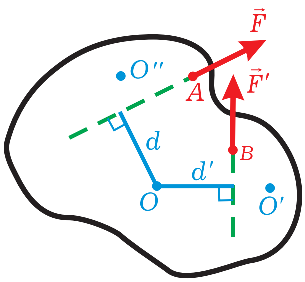

Рис. 1

Почему момент силы определен именно произведением $F \cdot d$, а, например, не $F^2 d$, Fd^3 или какой-нибудь еще комбинацией F и d? Ответ не очень сложен: в процессе развития науки физиков интересовали разные комбинации величин F и d, вероятно, и приведенные выше комбинации. Не исключено, что в какой-нибудь отдельно взятой работе сыграло роль даже произведение $F^{20}d^{21}$. Подчеркнем: в отдельно взятой работе. «Конструкция» же $F \cdot d$ естественным образом появлялась при решении самых разнообразных задач. Поэтому за ней и закрепилось название. А «случайные» комбинации типа $F^{20}d^{21}$ со временем просто забылись.

Физики все же не случайно придумали величину, модуль которой $|M| = Fd$ растет при увеличении плеча. Большинство людей – даже совсем не физиков! – знает, что *дверные ручки делают не рядом с дверными петлями, а вдали от оси вращения двери.* Причем не из эстетических соображений. Вероятно, не все из не физиков сформулируют: «Для создания момента силы одной и той же величины (нужно ведь преодолеть момент сил трения) во втором случае требуется меньшая сила, т.к. во втором случае плечо силы больше, чем в первом случае». Тем не менее некое интуитивное (на основе бытового опыта) представление об этом есть у большинства. Это «понимают» даже животные: кошка открывает дверь, цепляя дверь лапкой тоже не вблизи петель, а вдали.

Пока всё кажется логичным в определении момента силы. Но вот – первый сюрприз.

1. ПО или ПРОТИВ часовой стрелки?

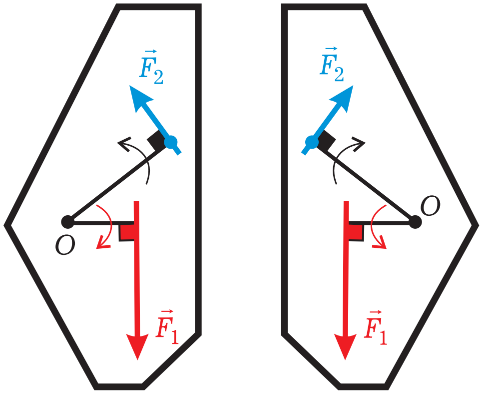

Рис. 2

Что значит **по** часовой стрелке в определении момента силы? Вопрос: на левой части рис. 2 силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ стремятся повернуть тело вокруг оси O **по** или **против** часовой стрелки? Кажется, что сила $\vec{F}_1$ – **по** часовой стрелке, а сила $\vec{F}_2$ – **против** нее. Однако тот, кто посмотрел бы на рисунок из области **за** плоскостью рисунка (и смотрел бы **на нас**), сказал бы, что *всё наоборот* (см. правую часть рис. 2)! Видно, что понятия «по» и «против» часовой стрелки не вполне определены. И как же быть?

Реально в каждой конкретной задаче сначала устанавливают соглашение ЧТО считать «по часовой стрелке», а ЧТО – «против». Существует произвол в принятии соглашения, но он не очень мешает. В случае рис.2 не важно, как писать $M_1 = +F_1 d_1$ и одновременно $M_2 = -F_2 d_2$, или $M_1 = -F_1 d_1$ и при этом $M_2 = +F_2 d_2$. Например, в условиях равновесия одинаково верны оба равенства

$$M_1 + M_2 = +F_1 d_1 - F_2 d_2 = 0$$
$$\text{и } M_1 + M_2 = -F_1 d_1 + F_2 d_2 = 0.$$

Два «прямо противоположных взгляда» на одну и ту же физическую ситуацию рис.2 одинаково правильны. Можно двумя разными способами приписывать знаки моментам отдельных сил. Важно **не** менять соглашения о знаках в процессе решения конкретной задачи. Иначе запутаетесь, а вернее всего, решите задачу неправильно!

Мы только что сказали о **правиле моментов для равновесия твердого тела**. Напомним его: *в состоянии равновесия твердого тела алгебраическая сумма моментов приложенных к телу сил* ***относительно*** ***<u>произвольной</u>*** ***реальной или мысленно выделенной оси*** *равна нулю*:

$$M_1 + M_2 + ... + M_N = 0. \quad (2)$$

Настоящей оси вращения, как в колесе велосипеда, может и не быть! Мы сами домысливаем эту ось. Причем важно: ось можно выбирать произвольно – наиболее удобным образом в данной задаче (или просто в соответствии со вкусами решающего задачу).

Напомним еще и **правило сил для равновесия твердого тела**: *в состоянии равновесия тела векторная сумма всех приложенных к телу сил равна нулю*:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N = 0. \quad (3)$$

Оказывается, что условие (3) чрезвычайно важно для «работы» условия (2).

2. Всегда ли безразлично, относительной какой оси записывать правило моментов в условии равновесия твердого тела?

На рис.3а показано тело, к которому приложены три силы, векторная сумма которых равна нулю $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$. Эти силы обладают еще одним важным свойством: линии действия сил пересекаются в одной точке O. Поэтому относительно оси O, проходящей через эту точку перпендикулярно рисунку, моменты всех трех сил равны нулю и автоматически выполнено условие $M_{1O} + M_{2O} + M_{3O} = 0$. Утверждается, что и относительно любой другой оси O' сумма моментов этих сил будет равна нулю, $M_{1O'} + M_{2O'} + M_{3O'} = 0$, хотя каждое из слагаемых не обязательно будет равно нулю.

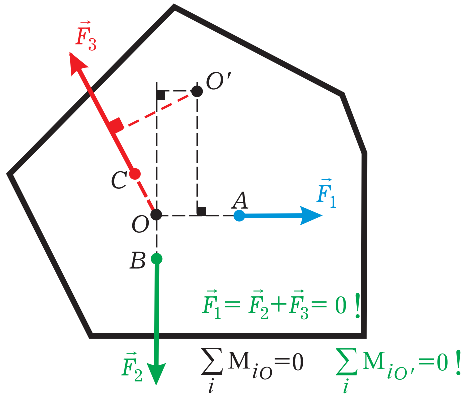

Рис. 3а

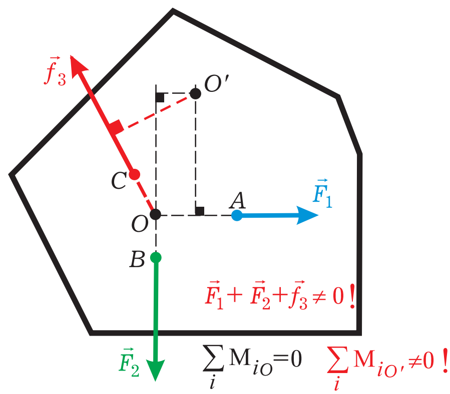

Рис. 3б

А теперь, не меняя направления силы $\vec{F}_3$, уменьшим ее модуль (заменим вектор $\vec{F}_3$ коллинеарным вектором $\vec{f}_3$, но меньшей длины; см. рис. 3б). При этом, разумеется, векторная сумма сил $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{f}_3 \neq 0$. Все же, относительно оси O сумма моментов новой тройки сил будет по-прежнему равна нулю $M_{1O} + M_{2O} + m_{3O} = 0$, т.к. каждое из слагаемых равно нулю (плечи всех трех сил равны нулю). Но уже относительно других осей сумма моментов будет в общем случае отлична от нуля $M_{1O'} + M_{2O'} + m_{3O'} \neq 0$.

Незаметную, но важную роль в первом случае сыграло равенство нулю суммы сил $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$!

Прежде чем переходить к другим примерам с моментами сил, обсудим еще одно важное понятие – **центр тяжести**. В учебнике можно найти такое определение этому понятию: «*Точку приложения равнодействующей сил тяжести, действующих на отдельные части тела, называют центром тяжести тела*». По сути, здесь всё сказано правильно. Сюрприз лишь в том, что не сказано о том, как искать равнодействующую параллельных сил.

3. Трудно ли складывать параллельные силы?

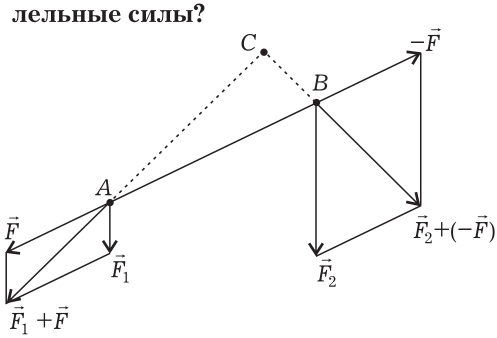

Рис. 4а

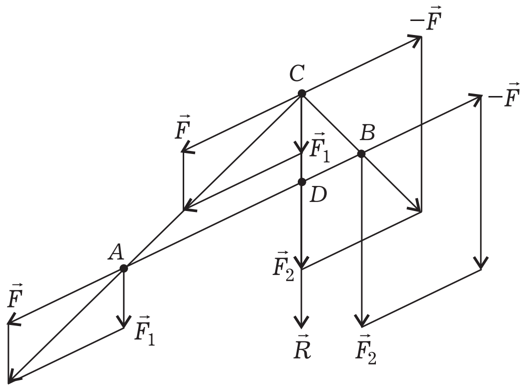

Рис. 4б

Пусть две параллельные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ приложены в точках A и B твердого тела. Действие этих двух сил не изменится, если в точках A и B по линии AB приложить две равные и противоположно направленные силы $\vec{F}$ и $-\vec{F}$. Сложив в точке А силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}$, найдем силу $\vec{F}_1 + \vec{F}$. Аналогично в точке B сложим силы $\vec{F}_2$ и $-\vec{F}$, получив силу $\vec{F}_2 - \vec{F}$ (рис. 4а). Силы $\vec{F}_1 + \vec{F}$ и $\vec{F}_2 - \vec{F}$ – уже не параллельные и складываются по правилу параллелограмма $\vec{F}_1 + \vec{F} + \vec{F}_2 - \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}$ (рис. 4б). Далее нужно рассмотреть две пары подобных треугольников (каких?) и написать пропорции

$$\frac{AD}{CD} = \frac{F}{F_1}, \quad \frac{BD}{CD} = \frac{F}{F_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{AD}{BD} = \frac{F_2}{F_1}$$

Итак, равнодействующая $\vec{R}$ двух параллельных сил параллельна им обеим, модуль силы $R = F_1 + F_2$, а линия, вдоль которой действует $\vec{R}$, делит отрезок прямой, соединяющей точки приложения сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, на два отрезка, длины которых обратно пропорциональны модулям этих сил.

Про случай сил, действующих в противоположные стороны, см., например, в [2].

4. Как складывать параллельные силы, когда не все из них лежат в одной плоскости?

В реальном (не плоском) теле силы тяжести отдельных частей отнюдь не лежат в одной плоскости. Как в этом случае складывать параллельные друг другу силы тяжести? Покажем это на примере трех точечных масс. Рассмотрим три точечные массы $3m$, $4m$ и $5m$, расположенные в точках L, K и M (рис. 5). Сначала сложим, например, две силы $5m\vec{g}$ и $3m\vec{g}$; их равнодействующая $8m\vec{g}$ проходит через точку C', которая делит отрезок ML на два отрезка MC' и $C'L$, длины которых обратно пропорциональны силам: $MC' : C'L = 3:5$. На втором этапе складываем две параллельные силы $8m\vec{g}$ и $4m\vec{g}$. Их равнодействующая $12m\vec{g}$ пройдет через точку C, которая делит отрезок KC' на два отрезка с отношением длин $KC:CC' = 2:1$.

Безусловно, возможна и другая последовательность сложения сил $3m\vec{g}$, $4m\vec{g}$ и $5m\vec{g}$ (рис. 5б или рис. 5в). Результат, разумеется, будет один и тот же.

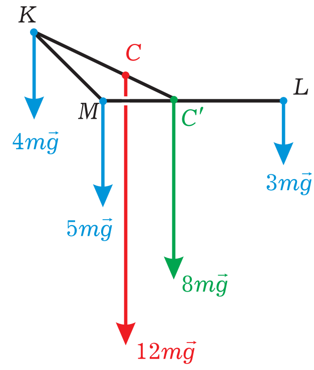

Рис. 5а

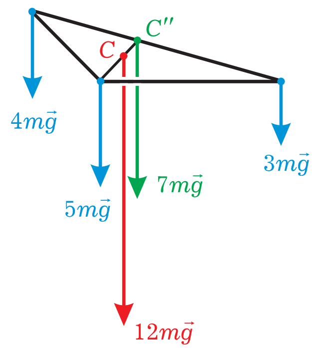

Рис. 5б

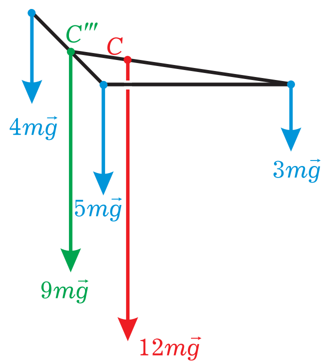

Рис. 5в

Всё это совсем не сложно. После того, как рассказано, как складывать параллельные силы, становится понятным принцип получения равнодействующей сил тяжести, действующих на отдельные части тела (см. выше определение центра тяжести тела).

5. Центр тяжести

Автору известны **несколько** определений понятия центра тяжести тела. Самым точным и конструктивным (!) автор считает следующее [3]:

«Центр тяжести – это такая точка, относительно которой моменты всех действующих на тело сил тяжести В СУММЕ обращаются в нуль независимо от ориентации

тела». (**Равный нулю суммарный момент всех сил НЕ будет вызывать вращение твердого тела.** Разумеется, обратиться в нуль сумма нескольких слагаемых может лишь в том случае, если одни из них будут положительными, а другие отрицательными.) Автор лишь уточнил бы: когда Суорц говорит о моменте сил **относительно точки**, это можно понимать просто как **момент сил относительно любой оси, проходящей через эту точку**.

Посмотрим, как данное определение работает в конкретных примерах.

Шары массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 9$ кг соединены легким стержнем (см. рис. 6). Расстояние между центрами шаров $a = 20$ см. Определить положение центра тяжести системы. Шары считать вначале материальными точками. После рассмотрения примера о центре тяжести однородного шара (см. ниже) самостоятельно вернуться к данной задаче, считая шары однородными (но не точками).

Рис. 6

Решение: Скажем, во-первых, что **центр тяжести такой системы будет лежать на прямой, соединяющей материальные точки (центры шаров)**.

В самом деле, представим себе, что центр тяжести системы лежал бы в стороне, например, в точке С'. Вспомним, что в определении говорится о равенстве нулю суммы моментов отдельных сил тяжести **для произвольной ориентации тела.** Расположим шары (пока – материальные точки) на одной вертикали; см. рис. 7. Проведем ось О' через точку С' *перпендикулярно* рисунку. Обе силы тяжести имели бы моменты *одного знака* (и равнялись бы по модулю $m_1 g \cdot d$ и $m_2 g \cdot d$). Суммарный момент их **не** был бы равен нулю! (Можно сказать, что обе силы тяжести стремятся повернуть систему в одну сторону – по часовой стрелке вокруг оси О'). Значит, точка С' не может быть центром тяжести системы двух материальных точек. Остается единственная возможность – центр тяжести С лежит на линии соединяющей точечные массы. В этом случае плечи обеих сил $d = 0$, поэтому каждый из моментов сил тяжести равен нулю; равна нулю и сумма моментов.

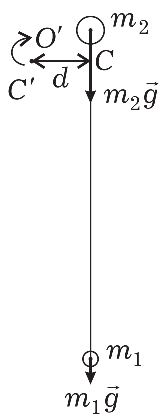

Рис. 7

Расположим теперь шары горизонтально. Проведем мысленно через точку С горизонтальную ось О, *перпендикулярную* линии, соединяющей центры шаров (см. рис. 8) Моменты сил $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ в этом случае будут разного знака: $-m_1 g \cdot d_1$ и $+m_2 g \cdot d_2$. Приравнивая суммарный момент нулю: $-m_1 g \cdot d_1 + m_2 g \cdot d_2 = 0$, получаем соотношение между рас-

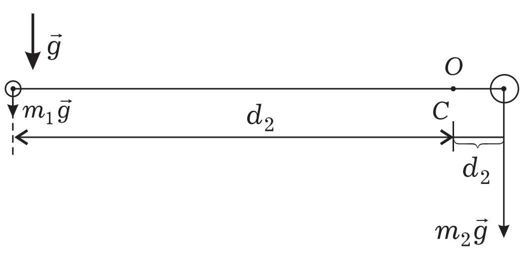

Рис. 8

стояниями от центра тяжести до точечных масс

$$\frac{d_2}{d_1}=\frac{m_1}{m_2}, \qquad (1)$$

т.е. расстояния обратно пропорциональны массам: чем больше масса, тем меньше расстояние от нее до центра тяжести. В нашем конкретном примере имеем: $\frac{d_1}{d_2}=\frac{m_2}{m_1}=9$, т.е. сами расстояния будут равны $d_1=\frac{9}{10}\cdot 20$ см$=18$ см и $d_2=\frac{1}{10}\cdot 20=2$ см.

А если бы массы шаров были одинаковыми, $m_1=m_2$? В этом случае согласно соотношению (1) получаем, что центр тяжести лежал бы *посередине* отрезка, соединяющего точечные массы, т.е. расположен по *центру*.

В случае многих *одинаковых* материальных частиц, расположенных на одной прямой на *одинаковом* расстоянии друг от друга, центр тяжести системы находится на этой прямой *на равном расстоянии от крайних материальных точек*. Обобщая, можно сказать, что центр тяжести тонкой *однородной* спицы (отрезка прямой) расположен *посередине* спицы, а центр тяжести *однородного* прямоугольника – *в центре прямоугольника* (в точке пересечения диагоналей). Только в этом случае суммарный момент сил тяжести отдельных частей тела (спицы, прямоугольника) относительно любой оси, проходящей через центр тяжести системы, равен нулю.

Из тех же соображений (что **суммарный** момент отдельных сил тяжести системы относительно центра тяжести должен равняться нулю) следует, что центр тяжести *однородного* круга расположен *в центре круга*, центр тяжести кольца (тоже *однородного*) – в центре кольца (в центре – в пустом месте!). Центр тяжести однородного шара расположен в центре шара, а *однородной* сферы – в центре сферы (снова – в пустом месте!) Это не должно смущать. Не надо ожидать, что если поместить палец в центр кольца, то мы почувствуем действие равнодействующих сил тяжести.

Слово «однородный» здесь очень важно: если бы, например, половина шара была деревянной, а другая половина сделана из свинца, мы бы **не** могли гарантировать, что суммарный момент всех сил тяжести отдельных частиц шара *для любой оси*, проходящей через центр шара, равен нулю. Центр шара в этом случае не был бы центром тяжести шара!

Полезность понятия центра тяжести состоит в том, что мы мысленно заменяем множество сил тяжести, действующих на разные части сложной системы, одной силой, приложенной к центру тяжести этой системы (говорят «равнодействующей всех сил тяжести»). Часто затем вовсе отвлекаются от того, как распределена масса в системе, считая, что имеется единственная материальная точка, совпадающая с центром тяжести системы, в которой сосредоточена вся ее масса m, и к этой точке приложена равнодействующая всех сил тяжести $m\vec{g}$.

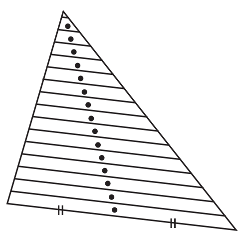

Рис. 9

После этих приготовлений легко понять, что центр тяжести однородного треугольника находится в точке пересечения его медиан (НЕ биссектрис, как иногда приходится слышать). В самом деле, мысленно разобьем треугольник на тонкие полоски, параллельные сначала одной какой-нибудь стороне (см. рис. 9). Центр тяжести каждой из полосок лежит посередине полоски. Каждую из полосок теперь заменим точечной массой, сосредоточенной в ее центре тяжести. Ясно, что центр тяжести всего треугольника лежит тогда на линии, соединяющей центры тяжести полосок, т.е. на медиане треугольника. На **каждой** из трех медиан! Т.е. в точке их пересечения.

6. Геометрическим построением найдите центр тяжести прямоугольной пластины с вырезом в виде прямоугольника (см. рис. 10).

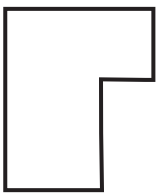

Рис.10

7. Самостоятельно геометрическим построением с помощью циркуля и линейки без делений найти центр тяжести **однородной проволочки**, согнутой под прямым углом. Длины сторон, образующих прямой угол, не равны друг другу.

8. Определить положение центра тяжести тонкого однородного диска радиусом R, из которого вырезан круг радиусом $R/2$ (см. рис. 12)

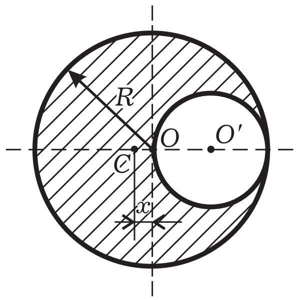

Рис. 12

Решение: Ясно, что центр тяжести C лежит на линии, соединяющей центры O и O' двух кругов – исходного и вырезанного, причем для рис. 12 лежит левее центра исходного круга. Пусть x – расстояние от центра тяжести до центра исходного круга. Мысленно восстановим вырезанную часть круга. Теперь сумма моментов сил относительно центра полного круга будет равна нулю (как до вырезания! центр тяжести круга без выреза есть центр круга). С другой стороны, эту сумму моментов мы можем представить в виде двух слагаемых: $+(m/4)g \cdot R/2$ (момент сил

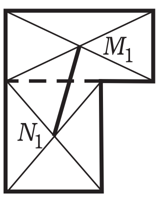

Рис. 11а

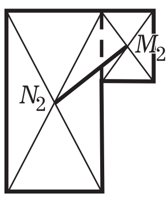

Рис. 11б

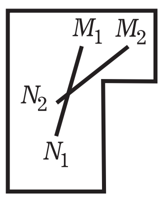

Рис. 11в

Решение См. последовательно рис. 11 *а–в*: центр тяжести находится на пересечении линий M_1N_1 и M_2N_2.

той части круга, которой мы дополнили его для восстановления) и $-(3m/4)g \cdot x$ (момент сил части круга до восстановления). Полагая $+(m/4)g \cdot R/2 - (3m/4)g \cdot x = 0$, находим $x = R/6$.

Самостоятельно решите две аналогичные задачи – 1) о шаре с полостью в виде шара вдвое меньшего радиуса и 2) о диске с двумя круглыми отверстиями; радиусы вырезанных отверстий равны соответственно половине и четверти радиуса диска R, а их центры расположены на одном диаметре на расстоянии $R/2$ от центра исходного круга.

Итак, в некоторых случаях центр тяжести можно найти геометрическим построением, в других – вычислениями (иногда весьма трудоемкими, с привлечением высшей математики). Бывают случаи, когда положение центра тяжести можно определить лишь экспериментально.

В случае плоских фигур «неправильной» формы применяют метод поочередного (как минимум, два раза) подвешивания фигуры за разные ее точки (но так, чтобы фигура имела возможность вращаться вокруг этих точек), и с помощью отвеса, прикрепленного к точке подвешивания фигуры, определяют линии, на которых будет находиться центр тяжести (в каждом случае он будет лежать на вертикали под нитью отвеса). Этот метод описан в школьном учебнике.

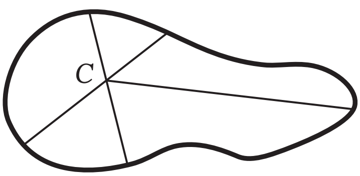

Рис. 13

Если под рукой нет отвеса, но есть прямой край стола, то фигуру несколько раз (минимум – два раза) кладут на самый край стола и в моменты, когда фигура начинает падать, отмечают на фигуре границы стола; точка пересечения прямых дает положение центра тяжести (рис. 13).

9. Как определить положение центра тяжести палки (не обязательно однородной; м.б. с набалдашником), не пользуясь никакими инструментами?

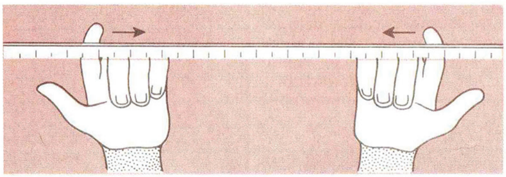

Рис. 14

Решение: Возьмите длинную линейку (длинную палку, длинный карандаш, палку с набалдашником) и положите на вытянутые горизонтально пальцы обеих рук. Приближайте теперь пальцы друг к другу так, чтобы линейка оставалась горизонтальной (рис. 14). Линейка станет скользить **поочередно** сначала по одному пальцу, затем по другому. Для длинной линейки это будет повторяться много раз. Для тех, кто наблюдает впервые, это кажется фокусом. В конце концов, пальцы сойдутся под центром тяжести линейки (палки с набалдашником). Строго математически доказать это не просто. Но легко проверить на опыте: если подпереть линейку в точке, где сойдутся пальцы, то она окажется в равновесии. Это и доказывает, что пальцы сойдутся под центром тяжести линейки.

Попробуйте теперь раздвигать пальцы, – получится другой результат: линейка будет скользить лишь по одному пальцу. Снова приходится повторить: теория этого эффекта не так проста, как приводится в книгах (даже уважаемых авторов).

10. Радиусы зубчатых колес относятся друг к другу, как 1:2 (см. рис. 15а). Правое колесо тянут вниз с силой F. Какую силу f и в каком направлении нужно приложить к левому колесу, чтобы предотвратить вращение колес? Рисунок символический. Реально для передачи равномерности движения необходимо, чтобы контакт (зацепление) между зубчатыми колесами ни на миг не прерывалось, например, как на рис. 15б.

Решение. Задачу про зубчатые колеса часто путают с задачей о рычаге (рис.16). Для равновесия рычага (в пренебрежении массой доски) необходимо, чтобы к вдвое меньшему плечу была приложена вдвое большая сила.

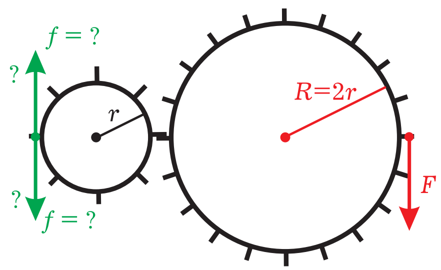

Рис. 15а

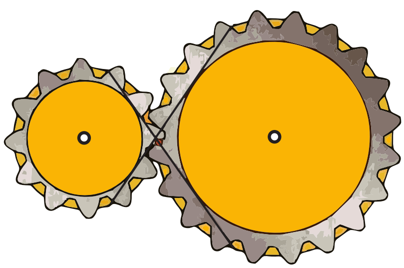

Рис. 15б

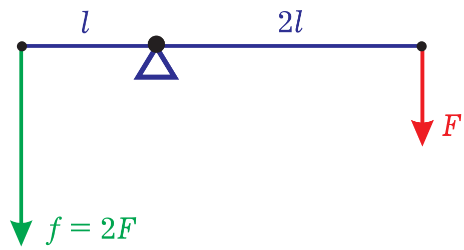

Рис.16

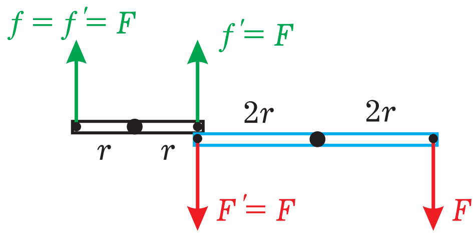

Рис. 17

В случае зубчатых колес всё не так. Два зубчатых колеса можно представить себе как два зацепляющихся колеса с лопатками, или еще проще – как два зацепляющихся друг за друга рычага (рис. 17). Чтобы правый рычаг был в равновесии, необходимо, чтобы кроме силы F, действующей на него справа, на левую часть этого рычага должна действовать со стороны малого рычага такая же сила $F' = F$ (плечи правого рычага одинаковы!). Упираясь в правое плечо малого рычага, левое плечо большого рычага создаст силу f', которая по 3-му закону Ньютона будет равна $f' = F' = F$. Теперь ясно, что для равновесия и малого рычага (тоже с одинаковыми плечами) к левому плечу нужно приложить силу $f = f' = F' = F$, т.е. $f = F$. Две силы оказались равны друг другу по модулю, но противоположно направлены! Если оси жестко зафиксированы, то не обязательно, чтобы выполнялось векторное равенство $\vec{f} = -\vec{F}$; достаточно равенства модулей сил и чтобы оба колеса пытались вращать, например, **по** часовой стрелке (или оба – **против**). (Сравните со случаем рычага на рис. 16.)

Теперь – еще одна задача, но в которой нет настоящих осей вращения (как в зубчатых колесах), и важно самим догадаться, ЧТО взять в качестве мысленно выбранной оси, чтобы это было максимально удобно.

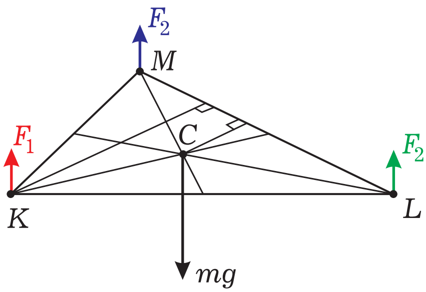

Рис. 18

11. Плоская однородная плита массой $m = 30$ кг представляет собой треугольник, длины сторон которого 1,7 м, 2,1 м и 2,3 м. Трое рабочих удерживают плиту за вершины в горизонтальном положении. Найдите силы, прилагаемые каждым рабочим (рис. 18).

Решение. Взглянем на нашу треугольную плиту сверху (рис. 19). Вектор силы тяжести плиты приложен к центру тяжести плиты C (в точке пересечения медиан треугольника) и направлен **от нас** (на рис. 18 – вниз), что обозначено на рис. 19 кружком с крестом внутри $\oplus$. Три силы со стороны рабочих, направленные вертикально вверх (на рис. 19 – **на нас**), обозначены кружками с точками внутри $\odot$.

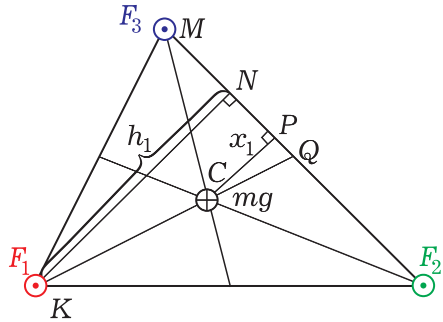

Рис. 19

Легко сообразить, что если в качестве оси выбрать сторону треугольника LM, то относительно этой оси моменты сил F_2 и F_3 будут равны нулю, т.к. равны нулю плечи этих сил для данной оси. Плечо силы F_1 есть высота h_1, опущенная из вершины K на сторону LM, а плечо силы тяжести mg – длина перпендикуляра x_1, опущенного из точки C на эту сторону. Длину x_1 легко найти из подобия треугольников CPQ и KNQ: $\frac{x_1}{h_1} = \frac{CQ}{KQ} = \frac{1}{3}$ по известному свойству медиан треугольника. Таким образом, $x_1 = \frac{1}{3}h_1$. Теперь запишем условие моментов для оси LM: $F_1 \cdot h_1 - mg \cdot x_1 = 0$, откуда с учетом предыдущего соотношения находим $F_1 = \frac{mg}{3}$.

Выбирая в качестве оси стороны треугольника KM и KL, находим $F_2 = F_3 = \frac{mg}{3}$. Итак, для произвольного треугольника все три силы оказались равны друг другу.

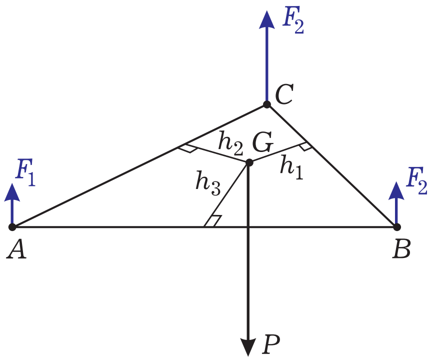

Рис. 20

Самостоятельно решите похожую задачу: Трое рабочих удерживают тяжелую гирю с помощью легкой горизонтальной плиты в форме некоторого произвольного вида треугольника (не обязательно прямоугольного, не обязательно равностороннего ...), на которой гиря покоится в точке, удаленной от сторон треугольника на расстояния h_1, h_2, h_3 (рис. 20). Рабочие удерживают гирю за вершины треугольника. Про треугольник известно, что его высоты равны H_1, H_2, H_3. Вес гири равен P. Определите силы F_1, F_2, F_3, прикладываемые рабочими. Докажите, что для треугольника произвольного вида и для произвольной точки G в нем справедлива формула

$$\frac{h_1}{H_1}+\frac{h_2}{H_2}+\frac{h_3}{H_3}=1.$$

Литература

1. *Лукьянов А.А.* Сюрпризы Статики. Часть 1 // Потенциал, 2021, № 6, с. 49–58.

2. *Лукьянов А.А.* Сюрпризы Статики. Часть 2 // Потенциал, 2021, № 7, с. 42–51.

3. *Черноуцан А.И.* ФИЗИКА для поступающих в вузы / Под ред. А.А. Леоновича. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 224 с. (с. 25-27)

4. *Суорц Кл.Е.* Необыкновенная физика обыкновенных явлений. – М.: Наука, 1986, в 2-х томах, т.1, – с. 400 (с.94)

5. *Математическая составляющая* / Редакторы составители *Н.Н. Андреев, С.П. Коновалов, Н.М. Панюнин.* – 2-е изд. – М.: Фонд «Математические этюды», 2019. – 376 с. (стр. 58–59 – Зубчатые колеса)

6. *Лукьянов А.А.* Нахождение центров тяжести плоских фигур разной формы // Потенциал, Март, 2015, № 3, с. 48-56

Новости Новости Новости Новости

МФТИ — первый по физическим наукам в России

Редакция издания Times Higher Education (THE, Великобритания) опубликовала результаты рейтинга лучших университетов мира по направлениям «Physical Sciences», «Life Sciences» и «Clinical and Health». МФТИ показал значительный рост в большинстве предметных групп и сохранил лидерство в России по физике.

МФТИ по рейтингу издания занимает первое место в России по физическим наукам и вторые места по направлениям «науки о жизни» и «клинические исследования и здоровье». Самый существенный рост институт показал по направлению «клинические исследования и здоровье» (195-е место в мире и второе в России), поднявшись на 116 позиций и направлению «науки о жизни» (151-е место в мире, второе в России, рост на 104 позиции).

Источник: https://mipt.ru/news