



Лукьянов Андрей Александрович

*Кандидат физико-математических наук, доцент,
ведущий инженер Лаборатории
по работе с одаренными детьми МФТИ*

Сюрпризы статики

Часть 2

Продолжение рассказа о работе Олимпиадной школы МФТИ в Климентовском пер. г. Москвы. Темы настоящей статьи – статика упругих стержней и пружин, закон Гука.

Сегодня поговорим о сюрпризах пружинок, стержней (проволочек) и о законе Гука.

1. Перед участником школьной Олимпиады по физике лежат две одинаковые пружины жесткостью $k = 80$ Н/м. Для опыта требуется пружина жесткостью $k_0 = 60$ Н/м. Как можно составить из этих пружин пружину с требуемой жесткостью, если одну из имеющихся пружин разрешается разрезать на две части и есть возможность отрезанную часть соединить с другой пружиной?

Традиционная ошибка многих учащихся состоит в том, что жесткость пружины считается свойством **только материала**, из которого изготовлена пружина, и не зависит от длины пружины. На самом деле это совсем не так.

Вспомним закон Гука (1635–1703). Рассмотрим однородный стержень начальной длины l и площади поперечного сечения S . Тогда под действием растягивающей силы F , приложенной к концам стержня (на самом деле, приложены две равные по модулю силы в противоположных направлениях, чтобы стержень оставался в покое), стержень получит удлинение Δl , которое можно вычислить по формуле

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S}, \quad (1)$$

где E – так называемый модуль Юнга (1773–1829). Под действием сжимающей силы стержень получит укорочение Δl , даваемое той же формулой. Модуль Юнга является свойством только материала (и его температуры, разумеется). Он различен для разных веществ. Для ме-

таллов он настолько велик, что определить на глаз удлинение (или укорочение) проволоки, которую мы пытаемся растянуть руками, невозможно (в знаменателе правой части (1) оказывается очень большая величина). Не заметны для человеческого глаза и деформации даже многотонных колонн высотой в несколько десятков метров под действием силы тяжести. (Заметными они становятся только перед тем, как колонна «собирается» разрушиться.)

Есть, однако, материалы с малыми модулями Юнга. Один из них – всем хорошо известная резина. Для разных резин модули Юнга разные: они изменяются от одного сорта к другому в пределах примерно $(1,5 \div 5,0) \cdot 10^6$ Па. Для сравнения: модуль Юнга стали порядка $2 \cdot 10^{11}$ Па. Малый модуль Юнга резины – причина малой скорости звука в ней – даже меньше, чем в воздухе! Последнее, как показывает опыт преподавания, часто оказывается **сюпризом** для школьников и даже для студентов-физиков (скорость звука в стали примерно в 15 раз больше, чем в воздухе).

А теперь вернемся к формуле (1) и запишем ее в виде $F = \frac{ES}{l} \Delta l$, или проще

$$F = k \Delta l, \quad (2)$$

где

$$k = \frac{ES}{l} \quad (3)$$

коэффициент жесткости. Видно, что коэффициент жесткости стержня обратно пропорционален его длине. Смысл последнего нетрудно понять. Рассмотрим мысленное удли-

нение тонкого стержня (проволоки) под действием силы F (под действием двух равных по модулю, но противоположно направленных сил $\vec{F}$ и $-\vec{F}$; см. рис.1).

Представим стержень в виде двух половинок, каждая – длиной l , т.е. недеформированный стержень имел длину $2l$. Если каждая из половинок удлинится на Δl (см. заштрихованные части стержня), то весь стержень получит удлинение $2\Delta l$. Важно, что и стержень в целом, и каждая из его половинок получили это удлинение под действием одинаковой силы F (каждый под действием двух равных по модулю, но противоположно направленных сил $\vec{F}$ и $-\vec{F}$). Поэтому для половинок стержня и для него в целом мы могли записать соотношения: $F = k \cdot \Delta l$ (А) и $F = k_2 \cdot 2\Delta l$ (Б), где k_2 – жесткость всего стержня, откуда следует важное равенство

$$k_2 = k / 2, \quad (4)$$

т.е. весь стержень имеет вдвое меньшую жесткость, чем его половинки. Стержень длиной $4l$ под действием той же силы F получит удлинение $4\Delta l$, т.е. в 4 раза больше удлинений каждой из его четвертушек. Можно сказать, что весь стержень легче удлинять в 4 раза на одну и ту же длину Δl , чем его четвертушки:

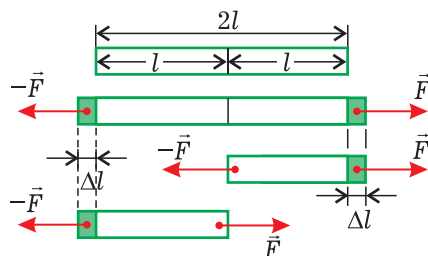


Рис. 1

его жесткость в 4 раза меньше жесткости составляющих его четвертушек.

Решение задачи о пружинках.

Для пружины нет такой простой, как для стержня, связи (3) между коэффициентом жесткости и модулем Юнга материала, из которого изготовлена пружина. Тем не менее обратно пропорциональная зависимость коэффициента жесткости от длины пружины остается: целую пружину в 2 раза легче растянуть на 1 см, чем составляющие его половинки на тот же 1 см (жесткость пружины с малым углом наклона витков можно вычислить по форму-

ле $k = \frac{Gd^4}{8nD^3}$, где $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ – модуль сдвига, μ – коэффициент Пуассона (формула (1) п.6), d – диаметр проволоки, D – диаметр витка, n – число витков в пружине [2]).

$k = \frac{A}{l}$, где A – некоторая кон-

станта размерности силы; $k_0 = \frac{A}{l + \Delta l}$.

Деля последнее соотношение на предыдущее, находим $\frac{k}{k_0} = \frac{l + \Delta l}{l}$,

откуда получаем

$$\Delta l = l \left(\frac{k}{k_0} - 1 \right) = \frac{l}{3}.$$

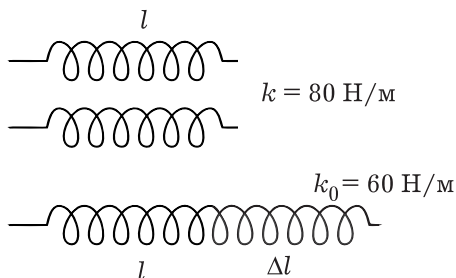


Рис. 2

Уточнение к рис. 2: от первой пружины нужно было отрезать два витка.

2. Отступление о 3-м законе Ньютона

Сказав, что и стержень в целом, и каждая из его половинок удлинялись под действием одинаковых пар равных, но противоположно направленных сил, мы молчаливо предполагали, что каждая из половинок действует на другую половинку с силой, равной по модулю силе со стороны этой «другой» половинки на первую, но противоположно ей направленной (см. рис.1). В этом состоит 3-й закон Ньютона.

Это можно было сказать не только о половинках стержня, но о любых его частях (см. рис.3).

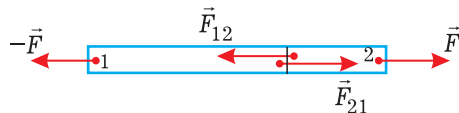


Рис. 3

Поскольку не только стержень в целом, но и каждая его часть находится в равновесии, то справедливы условия равновесия для каждой из его частей. Введем обозначения: $\vec{F}_{12}$ – сила, с которой 1-я (левая) часть действует на 2-ю часть (правую), $\vec{F}_{21}$ – сила со стороны 2-й части на 1-ю. Тогда из условий равновесия получаем очевидные равенства

$$\begin{cases} \vec{F}_{12} = -\vec{F} \\ \vec{F}_{21} = -(-\vec{F}) = \vec{F} \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (1)$$

Статика стержня, таким образом, **подтверждает** 3-й закон Ньютона.

Может показаться, что, рассуждая аналогичным образом, можно

даже вывести 3-й закон Ньютона из 2-го закона. Рассмотрим ускоренное движение однородного жесткого стержня длиной L и массой m под действием единственной силы $\vec{F}$ (см. рис. 4); малым удлинением стержня не будем интересоваться. Мысленно разобьем стержень на две части: первую длиной l и массой $\frac{l}{L}m$ и вторую часть длиной $L-l$ и массой $\frac{L-l}{L}m$.

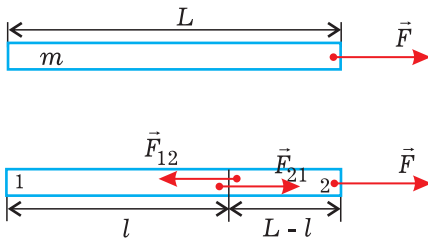


Рис. 4

Стержень, как целое, и его отдельные части движутся с одинаковыми ускорениями, определяемыми 2-м законом Ньютона

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}. \quad (2)$$

Запишем теперь 2-й закон Ньютона для двух мысленно выделенных частей стержня:

$$\frac{l}{L}m \cdot \vec{a} = \vec{F}_{21}, \quad (3)$$

$$\frac{L-l}{L}m \cdot \vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{12}. \quad (4)$$

Второе из этих уравнений запишем чуть иначе (после почленного деления на L):

$$m \cdot \vec{a} - \frac{l}{L}m \cdot \vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{12}; \quad (4')$$

тогда после взаимного уничтожения первых слагаемых в левой и правой

частях (принимая во внимание (2)) приходим к равенству

$$-\frac{l}{L}m \cdot \vec{a} = \vec{F}_{12}. \quad (4'')$$

Сравнивая с (3), «получаем» 3-й закон Ньютона $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

Можно ли считать, что 3-й закон Ньютона есть следствие 2-го закона Ньютона? Разумеется, нет. Наше рассмотрение лишь **подтверждает**, что конкретно для жесткого стержня 3-й закон Ньютона выполняется. Но можем ли мы провести рассуждения вроде приведенных выше, чтобы доказать, что сила притяжения Солнца Землей равна силе притяжения Земли Солнцем? Автору таких рассуждений не известно. Известен лишь постулат, прямо выражающий 3-й закон Ньютона, что эти две силы равны друг другу по модулю, но противоположно направлены.

3. Представим себе твердый стержень, растягиваемый за два торца двумя равными по модулю силами F (см. рис.5а). Мысленно расsection стержень на две части плоскостью, не перпендикулярной стержню. Зададимся вопросом: с какой силой правая часть стержня действует на левую?

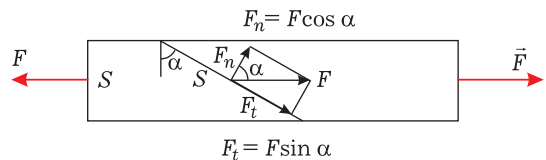


Рис.5а

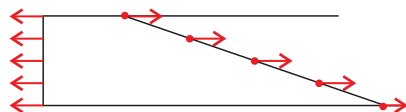


Рис.5б



Ответ довольно очевиден. Левая часть стержня находится в равновесии, как и весь стержень: силы, приложенные к стержню, действуют вдоль одной прямой и их векторная сумма равна нулю. Поэтому справа на левую часть стержня действует сила, направленная вправо вдоль стержня и равная по модулю F . Эта сила складывается из многих маленьких сил, действующих на отдельные атомы со стороны атомов правой части стержня (см. рис. 5б). Каждая из этих сил направлена вдоль стержня. И их равнодействующая F направлена вдоль стержня, т.е. **не перпендикулярно наклонному сечению**. Так что в силе взаимодействия частей стержня друг с другом имеется и нормальная составляющая F_n , и тангенциальная F_t . Этим твердые тела существенно отличаются от жидкостей и газов, в которых в статических условиях сила всегда перпендикулярна реальной или мысленно выделенной поверхности.

4. Вернемся к пружинкам. Уверен, что большинство из вас держало в руках слinky – детскую



Рис.6

игрушку-пружинку (рис.6). Ее легко приобрести в магазине и самостоятельно с ней поэкспериментировать (автор горячо советует это сделать). Мы поговорим о простейшем эксперименте с ней. Предположим, что сначала она была в нерастянутом состоянии (например, мы придерживали ее пальцем (рис.7а); верхний конец закреплен). Затем мы убрали палец, позволив слinky растянуться. Спрашивается, **как** она растянется? Как на каком из рисунков 7б–г? – Если вы уже имеете дома слinky, то немедленно убедитесь, что правильный из рисунков – 7г: слinky сильнее растянется в верхней своей части и слабее в нижней? Но почему так?

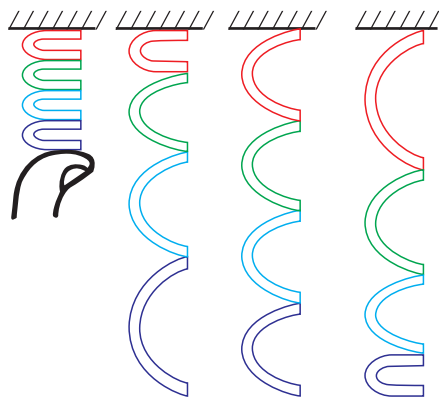


Рис.7а

Рис.7б

Рис.7в

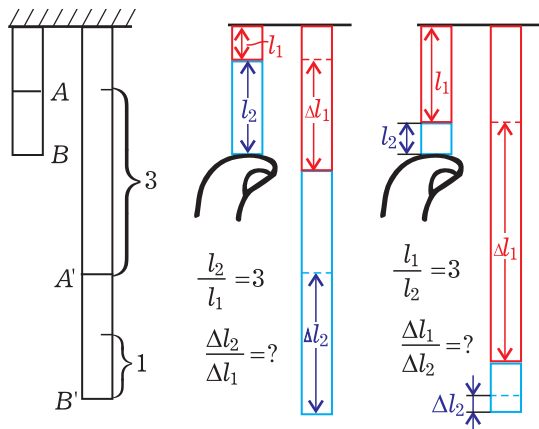
Рис.7г

Рис.8а

Рис.8б

Рис.9а

Рис.9б



$$\frac{l_2}{l_1} = 3$$

$$\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = ?$$

$$\frac{l_1}{l_2} = 3$$

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = ?$$

Кстати, так же растягиваются под действием «собственного веса» и однородные упругие стержни (см. рис. 8) – например, ластик – только мы не можем рассмотреть удлинения ластика невооруженным глазом (рис.8, разумеется, карикатура). Всё же рассуждать легче про однородные стержни. «Дискретность» пружины часто запутывает дело: даже число витков не всегда бывает целым. Непонятно, где начинается виток и как соединяются витки друг с другом. Однако интуитивно ясно, что нижний виток слинки растягивается лишь силой тяжести этого нижнего витка, в то время как самый верхний виток – и «своей» силой тяжести, и трех витков под ним (рис. 7г).

Рассуждаем об удлинении стержня. Нижняя половина однородного упругого стержня AB растянется (и перейдет в положение $A'B'$; рис.8) «лишь собственной силой тяжести» (на самом деле, на нее, разумеется, действует вверх еще и сила со стороны верхней части стержня!). Часть же стержня выше сечения A растянется и собственной силой тяжести, и силой со стороны нижней половины стержня (помним и о силе в верхней точке закрепления стержня). Итак, горизонтальные слои стержня вблизи точки крепления растягиваются почти всей силой тяжести стержня mg , нижние слои – почти нулевой силой. Возьмем в качестве растягивающей силы для всего стержня среднее арифметическое между крайними, т.е. $mg/2$. Тогда удлинение стержня можно записать в виде

$$\Delta l = \frac{1}{ES} \cdot \frac{1}{2} mg \cdot l. \quad (1)$$

(именно этому учит строгая наука, основанная на высшей математике). Удлинение нижней половины стержня будет даваться аналогичной формулой (с заменой $m \rightarrow m/2$ и $l \rightarrow l/2$)

$$\Delta l_2 = \frac{1}{ES} \cdot \frac{1}{2} \frac{m}{2} g \cdot \frac{l}{2}. \quad (2)$$

Для верхней половинки удлинение запишется чуть сложнее:

$$\Delta l_1 = \frac{1}{ES} \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{m}{2} g + \frac{m}{2} g \right) \cdot \frac{l}{2}, \quad (3)$$

причем первое слагаемое в скобке дает вклад собственной силы тяжести верхней половинки, а второе слагаемое – вклад в растяжение верхней половины из-за того, что к ней снизу «подвешена» нижняя половинка. Легко проверить, что $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$ и что удлинение верхней половины в 3 раза больше удлинения нижней половины $\Delta l_1 = 3\Delta l_2$.

Таким же образом удлиняется и слинки, причем как в пружинке, так и в стержне можно с хорошей точностью пренебречь изменением их поперечных размеров.

Самостоятельно рассмотрите задачу об удлинении слинки под действием силы тяжести. Мысленно разобьем пружинку на две части 1) $l_1:l_2=1:3$ и 2) $l_1:l_2=3:1$ (на рис.9 эти части изображены символически красным и синим цветами). Найдите отношение удлинений частей слинки в этих двух случаях. **Ответ:** 1) $\Delta l_1:\Delta l_2=7:9$; 2) $\Delta l_1:\Delta l_2=15:1$.

4. На экзамене по инженерной физике школьник экспериментировал со слинки (пружиной). Он измерил ее массу, полное число витков и длину в нерастянутом состоянии. Эти величины оказались равны $M=30$ г, $N=42$, $L=6$ см. Он взялся

за самый край слinky и позволил ей растянуться вдоль вертикали под действием силы тяжести. Длина слinky в растянутом состоянии оказалась равна $L' = 81$ см. В другом опыте он половину пружинки держал в ладони в сжатом состоянии, позволив растягиваться лишь другой ее половине ($m = 15$ г, $n = 21$, $l = 3$ см). Длина этой части слinky в растянутом состоянии оказалась

равна $l' = 21$ см. По этим данным найдите коэффициенты жесткости целой слinky и ее половины. Проверьте, что удлинение пружины пропорционально квадрату числа ее

$$\text{витков } \frac{\Delta L}{\Delta l} = \frac{L' - L}{l' - l} \approx \frac{N^2}{n^2}.$$

Решение. Школьник составил таблицу (числа взяты из реального эксперимента школьника):

Масса, г	$m = 15$ (половина слinky)	$M = 30$ (целая слinky)
Длина в нерастянутом состоянии, см	$l = 3$	$L = 6$
Число витков	$n = 21$	$N = 42$
Длина в растянутом состоянии, см	$l' = 21$	$L' = 81$
Удлинение, см	$\Delta l = 21 - 3 = 18$	$\Delta L = 81 - 6 = 75$
Жесткость, Н/м	$k_1 = \frac{mg}{2\Delta l} \approx 0,41$	$k_2 = \frac{Mg}{2\Delta L} \approx 0,196 \approx 0,20$

Для однородного цилиндра массой m , закрепленного вертикально за один из концов, под действием силы тяжести относительное удлинение равно $\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{(m/2)g}{S}$, где E — модуль Юнга, S — площадь поперечного сечения цилиндра, и поскольку масса m пропорциональна начальной длине l , то удлинение $\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{(m/2)g}{S} l$ пропорционально квадрату длины. В формулу для жесткости $k = \frac{F}{\Delta l}$ войдет $F = mg/2$.

Видно, что $k_2 \approx \frac{1}{2}k_1$, т.е. жесткость целой слinky в 2 раза меньше, чем жесткость ее половинки (появление приближенного равенства связано с экспериментальной погрешностью).

Видно также, что $\frac{\Delta L}{\Delta l} = \frac{75}{18} \approx 4,2$ и

$$\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 = 4. \text{ Отличие друг от друга}$$

величин **4,2** и **4**: $\frac{4,2-4}{4} = 0,05$ (5%)

объясняется экспериментальной погрешностью.

6. Еще о законе Гука

Закон Гука может показаться чем-то чуть ли не само собой разумеющимся. Представим себе два одинаковых прямоугольных параллелепипеда, сжимаемых с двух торцов силами F (рис.10а), а затем соединим их друг с другом, получив параллелепипед вдвое большего поперечного сечения (рис.10б). Теперь на его торцевые грани площади $2S$ действуют силы $2F$.

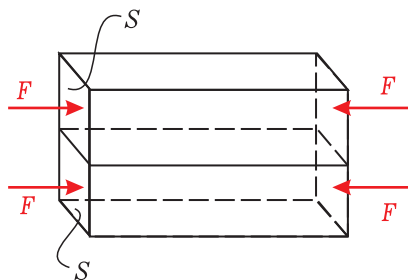


Рис. 10а

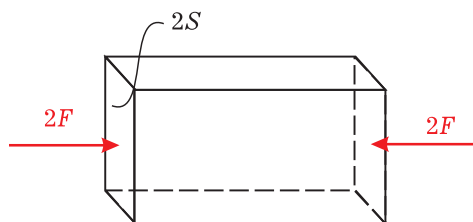


Рис. 10б

Для каждого из первоначальных параллелепипедов закон Гука можно было записать в виде $\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E^*} \frac{F}{S}$. Не

удивительно, что для составного параллелепипеда справедлива формула $\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E^*} \frac{2F}{2S}$. Было бы плохо, если

бы удлинение было пропорционально, например, квадрату силы, $\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E^*} \frac{F^2}{S}$, так как для составного параллелепипеда было бы:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E^*} \frac{(2F)^2}{2S} = 2 \frac{1}{E^*} \frac{F^2}{S}.$$

Природа, впрочем, могла бы нам помочь, подправив закон Гука и сделав так, чтобы относительное удлинение было еще и обратно пропорционально квадрату площади

$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E^*} \frac{F^2}{S^2}$; в этом случае для составного параллелепипеда мы бы

имели снова $\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E^{**}} \frac{(2F)^2}{(2S)^2} = \frac{1}{E^{**}} \frac{F^2}{S^2}.$

Рассуждать обо всех таких возможностях, разумеется, нет смысла: опытный факт состоит в том, что согласно закону Гука относительное удлинение параллелепипеда пропорционально F/S .

Аналогичные рассуждения можно было провести и для двух параллелепипедов, соединенных торцами (рис.11 а-б):

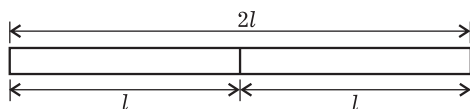


Рис. 11а

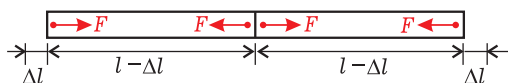


Рис. 11б

Здесь, в случае сжатия параллелепипедов с внешних торцов двумя силами F , между параллелепипедами возникнут по 3-му закону Ньютона (как нельзя кстати!) еще две силы F вблизи границы (рис.11б). В результате для каждого из параллелепипедов закон Гука запишется в виде $\Delta l = \frac{1}{E^*} \frac{F}{S} l$, а для составного параллелепипеда – в виде $2\Delta l = \frac{1}{E^*} \frac{F}{2S} 2l$,

чего и следовало ожидать.

И все же закон Гука не так очевиден, как может показаться. Рассмотрим чуть подробнее, что происходит, например, со стержнем, когда его растягивают или сжимают. На рис.12а изображен недеформированный стержень, а на рис.12 б-в символически показаны удлинение



стержня под действием растягивающей силы и укорочение – под действием сжимающей. Почему слово «символически» подчеркнуто? Потому что реально (и часто!) силы распределены не по всей площади торца, но приложены к отдельным «точкам» (см. рис. 12 г–д). Если, например, ластик мы еще можем представить себе сжатым силой, распределенной по всему торцевому сечению (рис. 12е), то растяжение того же ластика силой, распределенной тоже по всему торцу (рис. 12ж), представить уже труднее.

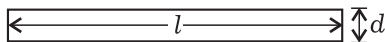


Рис. 12а

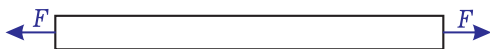


Рис. 12б



Рис. 12в

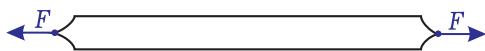


Рис. 12г



Рис. 12д

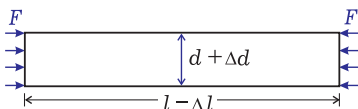


Рис. 12е

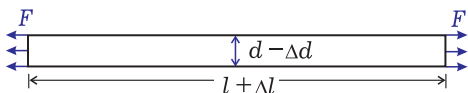


Рис. 12ж

Что же имеют в виду в формулах закона Гука, зная, что реальные деформации даже только стержней совсем не просты?



Рис. 13

На рис. 13 показана приближенная к реальности деформация первоначально однородного стержня под действием растягивающей силы [3]. Деформация стержня сильно неоднородна вблизи точек приложения сил (на рисунке – в областях размером h). Если, однако, длина стержня l значительно больше, чем h , то «за пределами указанной области прямоугольная сетка не искажается и остается равномерной, изменяются лишь размеры ее ячеек. Вертикальные линии сетки перемещаются параллельно самим себе... Такая картина деформации стержня соответствует гипотезе плоских сечений (гипотезе Я. Бернулли): *поперечные сечения стержня, плоские и перпендикулярные его продольной оси до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными оси и после деформации*» [2]. Для школьных целей считают приближенно правильными рис. 12 е–ж и даже рис. 12 б–в.

Иногда даже в школьных задачах учитывают изменение поперечных размеров при деформациях: при сжатии стержней их поперечные размеры увеличиваются (рис. 12е), а при растяжении – уменьшаются (рис. 12ж). Опытный факт состоит в том, что между продольными и поперечными изменениями размеров существует простая связь

$$\left| \frac{\Delta d}{d} \right| = \mu \left| \frac{\Delta l}{l} \right|, \quad (1)$$

где μ – числовой множитель, меньший $1/2$, который называют коэффициентом Пуассона. Для большинства металлов $0,25 \leq \mu \leq 0,35$, кроме бериллия, для которого он очень мал $\mu = 0,03$. Для резины он близок к $1/2$, а для обычной пробки – к нулю.

Скажем еще, что закон Гука справедлив лишь для малых деформаций (малых величин напряжений F/S) в области, которую по понятной причине называли областью пропорциональности. Для разных сортов стали это, грубо говоря, $\Delta l/l < 0,001$ (0,1%), что соответствует $F/S < 200$ МПа (для сравнения модуль Юнга на три порядка больше). Деформации перестают быть упругими за пределами этой области: длина растянутой проволоки не восстанавливает своих размеров после снятия напряжений; в этом случае говорят о пластической деформации.

Медицинский бинт из качественной резины можно **упруго** растянуть в несколько раз, и он восстановит свою первоначальную длину после того, как мы перестанем его растягивать. Но и для него при больших растяжениях (когда $\Delta l/l \approx 1$ и больше) закон Гука перестает работать. Иногда в этом случае пользуются приближенной формулой

$$\frac{F}{S} = aT \left(\frac{l'}{l} - \left(\frac{l}{l'} \right)^2 \right), \text{ где } l' = l + \Delta l,$$

T – абсолютная температура. В области малых деформаций эта формула переходит в классическую формулу закона Гука $\frac{F}{S} \approx 3aT \frac{\Delta l}{l}$ (докажите это **самостоятельно**). Ясно, что величина $3aT$ есть модуль Юнга.

Итак, при растяжении стержня его поперечные размеры уменьшаются, а при сжатии – увеличиваются. Иногда думают, что объем при этом остается неизменным. В общем случае это не так. Относительное изменение объема можно вычислить по формуле

$$\left| \frac{\Delta V}{V} \right| = \left| \frac{(d + \Delta d)(l + \Delta l) - d^2 l}{d^2 l} \right| \approx (1 - 2\mu) \left| \frac{\Delta l}{l} \right|$$

(докажите это **самостоятельно**), и только в случае $\mu = 0,5$ (например, для резины) изменения объема не будет.

Изменение площади поперечного сечения всегда имеет место (для бериллия и пробки оно очень мало):

$$\left| \frac{\Delta S}{S} \right| = 2\mu \left| \frac{\Delta l}{l} \right| = 2\mu \frac{1}{E} \frac{F}{S}.$$

Однако изменение площади поперечного сечения непосредственно в законе Гука $\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{S + \Delta S}$ не надо учитывать не

только для пробки и бериллия – не надо учитывать квадратичные по Δl слагаемые (это означало бы выход за пределы линейной по Δl теории).

Литература

1. Лукьянов А.А. Сюрпризы Статики. Часть 1 // Потенциал, 2021, № 6, с. 49-58.
2. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваева В.А. Механика. / Под ред. В.А. Алешкевича. – М.: Академия, 2004. – 408 с. (стр. 260, 267)
3. Александров А.В, Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. – М.: Высш. шк., 2003. – 560 с. (С. 53)