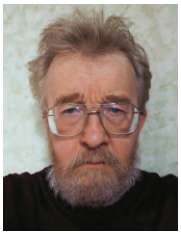
Физика

Лукьянов Андрей Александрович
Кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий инженер Лаборатории по работе с одаренными детьми МФТИ



Сюрпризы статики
Часть 1

Продолжение рассказа о работе Олимпиадной школы МФТИ в Климентовском пер. г. Москвы. В предыдущих статьях автора речь шла об экспериментальных (лабораторных) работах для восьмиклассников по теме Статика. Параллельно с лабораторными работами решались обычные «теоретические» задачки. Темы настоящей статьи – хитрые случаи сложения сил и статика гибких нитей.

ВВЕДЕНИЕ. Статика, видимо, – самый древний раздел **физики** (наряду с **геометрической оптикой**). Она возникла в Древней Греции примерно 2,5 тысяч лет назад. Впрочем, еще древние египтяне (за 2 тысячи лет до греков) использовали различные подъемные механизмы при постройке, например, пирамид, а значит, имели надежные знания о принципах работы этих механизмов. Вряд ли не знали их и строители храмов древних Китая и Индии.

Статика – наука **о неподвижном, о телах, находящихся в равновесии**. В древности не существовало понятий скорости и ускорения в современном понимании хотя бы потому, что часы древних (песочные или водяные, или часы по солнечной тени от стержня (гномон)) были для научных целей малопригодны. Измерить точно короткие промежутки времени (порядка секунды и меньше) по ним было невозможно. Вероятно, поэтому в те времена не было **кинематики** в современном понимании (хотя древние уже рассуждали, например, об Ахиллесе и черепахе, которые двигаются по-разному быстро). Проблемы с часами были даже у Галилея (1564 – 1642). Спуская шарик по наклонной плоскости, он о быстроте его движения судил по ... количеству воды, которое вытекало за это время из поставленного рядом ведерка [1,2]. Таким методом он смог даже оценить короткие интервалы времени с точностью 0,1 с [3].

Но задолго до Галилея (в Древней Греции – точно) уже существовали практически правильные представления о работе блоков, систем блоков, рычага. Существовало понятие **момента силы** и было представление о **центре тяжести** тела. Архимеду (ок. 287 – 212 до н.э.) было известно, что центр тяжести однородного треугольника располагается в точке пересечения медиан треугольника.

Как ни странно, четкого определенного понятия «**силы**» у античных ученых не было. Увы, спустя 2 тысячи лет физики убедились, что его нет и у них. Крупные физики 19 столетия (например, Г. Кирхгоф (1824–1887)) были чрезвычайно неудовлетворенны тем, как в физике определяют силу [4]. Оказалось, что дать исчерпывающее и строгое определение этому понятию совсем непросто. Стоит лишь всерьез задуматься! В результате, например, Кирхгоф сказал, что сила есть просто произведение массы на ускорение [4], а Г. Герц (1897–1894) «от отчаяния« создал свою механику, **исключив силу из рассмотрения** (из основных аксиом), заменив силу некими связями системы с другими системами [5]. Заинтересовавшимся рекомендуем книгу [6].

Отсутствие четкого, как в математике, определения силы можно назвать **Первым Сюрпризом Статики**. Впрочем, о нем мы больше говорить не станем. Будем считать, что сказанного в учебниках о силе достаточно. Хотя в разных книгах, будем откровенны, говорится немного разное [7–10]. Наша цель – не решение Проблем Большой Физики. Мы ограничимся рассмотрением частных задач уровня средней школы и поговорим о сюрпризах, которые поджидают **не** опытного преподавателя, а школьника, только начинающего изучать физику.

Вспомним **два условия равновесия твердого тела** (считаем, что Читатель уже знаком с ними):

1) В состоянии равновесия тела векторная сумма всех приложенных к телу сил равна нулю:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0 . \qquad (1)$$

2) В состоянии равновесия твердого тела алгебраическая сумма моментов приложенных к телу сил **относительно произвольной реальной или мысленно выделенной оси** равна нулю:

$$M_1 + M_2 + ... + M_N = 0 \qquad (2)$$

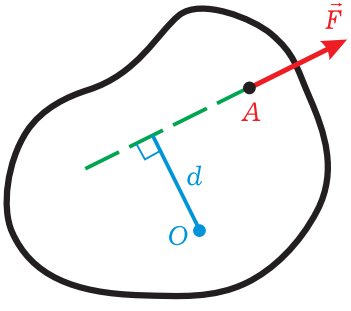


Рис. 1

Напомним, что моментом M силы $\vec{F}$ относительно оси O (см. рис.1; ось O направлена перпендикулярно рисунку) называют произведение модуля силы $F = |\vec{F}|$ на плечо d, взятое с соответствующим знаком: $M = \pm Fd$, где d – длина перпендикуляра, проведенного от оси до линии действия силы $\vec{F}$, причем **знак момента** определяется выбором положительного направления вращения, например,

он считается положительным, если сила вызывает вращение тела по часовой стрелке.

Второе условие равновесия мы обсудим в третье и четвертой статьях. Здесь же отметим, что несмотря на то, что эффект воздействия силы на тело зависит от точки приложения силы (от плеча этой силы, от ее момента), работая с равенством (1), **мы можем считать силы** так называемыми **свободными векторами**. При этом мы можем перемещать любую силу параллельно самой себе, причем **вовсе не обязательно лишь строго вдоль линии действия силы**. Именно так мы совмещаем начала векторов сил, когда складываем силы по правилу параллелограмма, или совмещаем начало одной силы с концом другой, когда складываем силы по правилам треугольника или многоугольника:

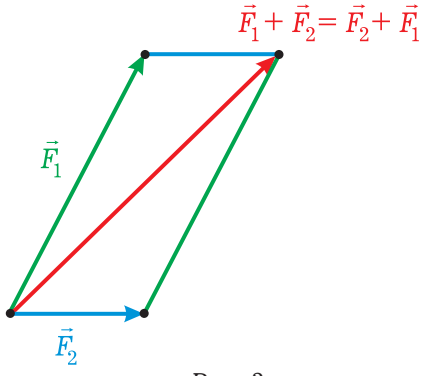


Рис. 2

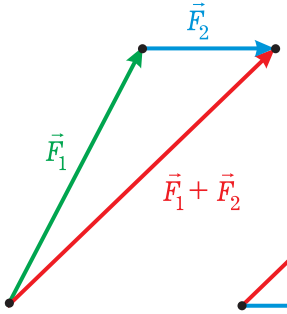


Рис. 3а

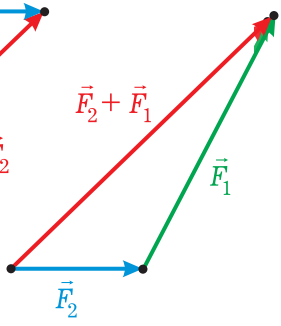


Рис. 3б

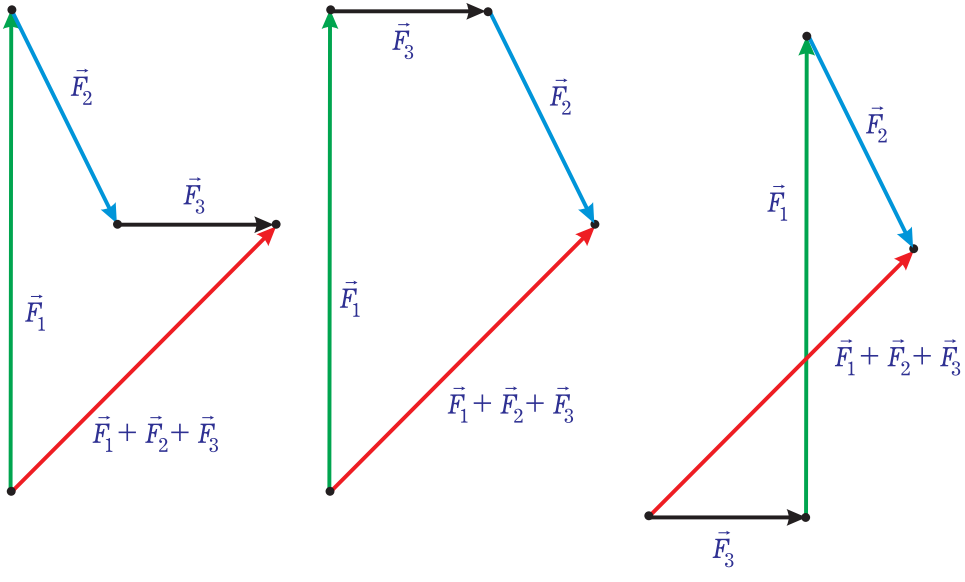


Рис. 4

Автор **не** считает это свойство очевидным, данным нам, так сказать, с рождения. Автору **не** очевиден даже сам факт, что **сила** – это **именно вектор**, то есть что для нее справедливы некие аксиомы векторной алгебры (например, что силы нужно складывать по правилу параллелограмма или треугольника; см. рис. 2–3). Другое дело, что математики строили свою векторную алгебру для объектов, которые они назвали векторами, **ориентируясь на экспериментально установленные свойства** таких физических объектов, как **силы** (что действие двух сил можно заменить действием одной, полученной по правилу, например, параллелограмма). В этом смысле «совпадение», что силы нужно складывать именно как векторы, вряд ли стоит считать совсем уж случайным, тем более считать сюрпризом. Все же возможность менять последовательность действия сил в правиле многоугольника (рис. 4) автор никак не может отнести к очевидным. Разве всегда конечный результат не зависит от последовательности шагов? Например, последовательность всего двух поворотов тела вокруг двух осей зависит от порядка, в котором производились повороты (см. рисунки 5 и 6)? Что ни говорите, но с силой нам повезло больше, чем с поворотами.

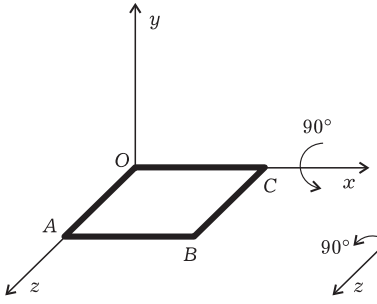


Рис. 5а

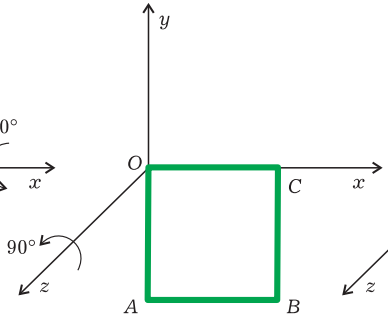


Рис. 5б

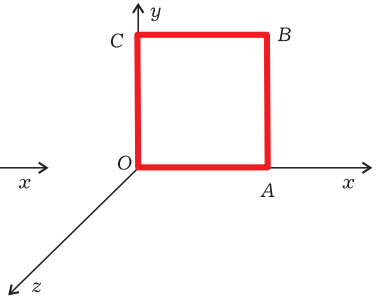


Рис. 5в

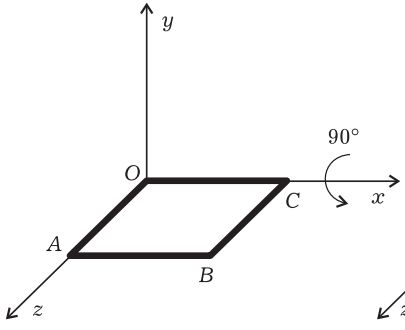


Рис. 6а

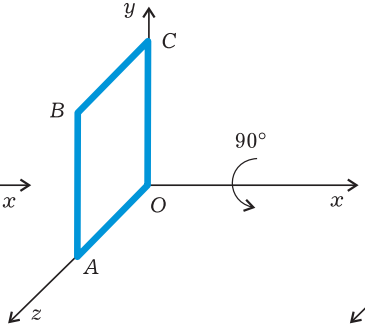


Рис. 6б

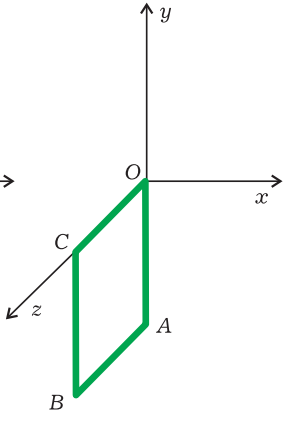


Рис. 6в

Правила параллелограмма или треугольника – это не просто отвлеченная математика; они **имеют самое прямое отношение к жизни**.

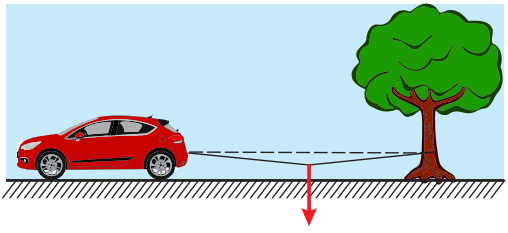


Рис.7а

1. Чтобы сдвинуть с места застрявший автомобиль, иногда пользуются таким приемом. Автомобиль привязывают длинной веревкой к дереву, по возможности сильно ее натянув. Затем, действуя на веревку посередине перпендикулярно ее направлению, человек легко сдвигает автомобиль с места (рис. 7а). Почему это возможно?

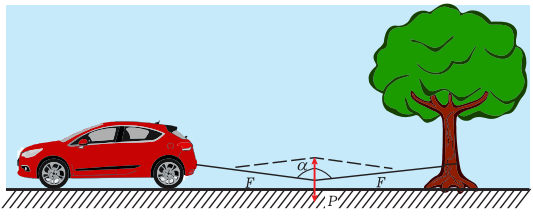


Рис. 7б

Решение. Сила $\vec{P}$ уравновешивается векторной суммой сил натяжения двух частей веревки (рис.7б). При угле α близком к 180°, сдвигающая автомобиль почти горизонтальная сила F значительно больше приложенной силы P: $P = 2F\cos(\alpha/2)$, поэтому $F = \dfrac{P}{2\cos(\alpha/2)}$; тогда, например, при угле $\alpha/2 = 87^\circ$ имеем $\cos 87^\circ \approx 0{,}052$ и $F = \dfrac{P}{2\cos(87^\circ)} \approx 38P$: «выигрыш» в силе порядка сорока. (На автомобиль будет действовать сила вдоль левой части веревки, направленная вправо и равная по модулю F.)

Сложение сил предполагает в некоторых случаях маленькие хитрости.

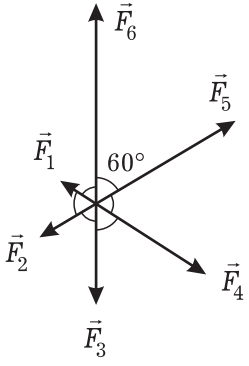


Рис. 8

2. К телу приложено 6 сил, лежащих в одной плоскости и составляющих друг с другом углы в 60°. Силы последовательно равны 1, 2, 3, 4, 5 и 6 Н (рис.8). Найти равнодействующую $\vec{R}$ этих 6-ти сил.

Решение. Сложение сил по правилу многоугольника здесь не целесообразно, как и сложение «соседних» сил по правилу параллелограмма. Поступим иначе. Сложим сначала попарно силы, направленные вдоль одной прямой (рис. 9, а-в). Получим $\left|\vec{F}_1 + \vec{F}_4\right| = 4 - 1 = 3$ Н, аналогично $\left|\vec{F}_2 + \vec{F}_5\right| = 5 - 2 = 3$ Н и $\left|\vec{F}_3 + \vec{F}_6\right| = 6 - 3 = 3$ Н. Сумма сил $\vec{F}_2 + \vec{F}_5$ направлена вдоль вектора

$\vec{F}_5$. Туда же направлена и сумма сил $\vec{F}_1+\vec{F}_4+\vec{F}_3+\vec{F}_6$, причем модуль этой силы = 3 Н. В итоге получаем, что сумма всех шести сил $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+$ $+\vec{F}_4+\vec{F}_5+\vec{F}_6$ направлена вдоль направления силы $\vec{F}_5$, а модуль этой силы

$|\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4+\vec{F}_5+\vec{F}_6| = 3+3=6$ Н.

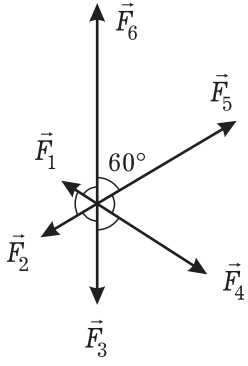


Рис. 9а

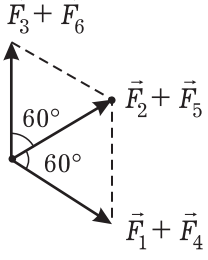


Рис. 9б

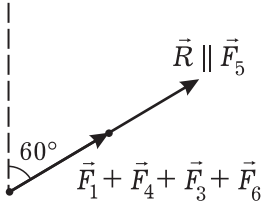


Рис. 9в

3. Найти равнодействующую $\vec{R}$ пяти равных по модулю сил, приложенных к телу в одной точке и расположенных в одной плоскости, если углы между всеми силами равны между собой (рис.10).

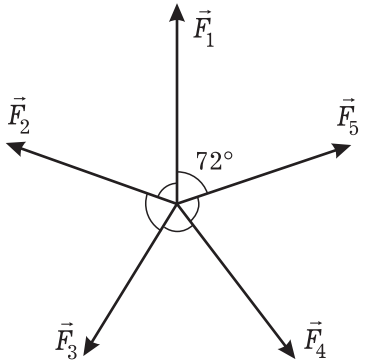


Рис. 10

Решение. В отличие от предыдущей задачи здесь мы имеем нечётное число сил, поэтому невозможно образовать из них целое число пар. Поступим иначе. Возьмём какую-нибудь силу, например, $\vec{F}_1$, а остальные сгруппируем в пары и попарно сложим их (см. рис. 11): $\vec{F}_2+\vec{F}_5$ и $\vec{F}_3+\vec{F}_4$. Почему удобна именно такая группировка сил в пары? Дело в том, что обе суммы сил (и $\vec{F}_2+\vec{F}_5$ и $\vec{F}_3+\vec{F}_4$) направлены вдоль линии действия силы $\vec{F}_1$. Ясно, что равнодействующая всех сил будет направлена вдоль линии действия силы $\vec{F}_1$. Модули сумм сил легко найти из геометрии. Например, в силовом параллелограмме, построенном на векторах $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_5$, который является ромбом, длина диагонали ромба (модуль силы $\vec{F}_2+\vec{F}_5$) равна удвоенной половинке диагонали, а та легко ищется из любого из 4-х прямоугольных треугольников, на которые ромб разбивается диагоналями. В результате $|\vec{F}_2+\vec{F}_5|=2F\cos 72^\circ$, где F – модуль любой из 5-ти исходных

сил. Аналогично $|\vec{F}_3+\vec{F}_4|=2F\cos 36^\circ$. В итоге для модуля искомой силы получаем формулу

$$R=F(1+2\cos 72^\circ-2\cos 36^\circ) \qquad (*).$$

Для углов 72° и 36° нет таких простых формул, как для углов 30°, 45° или 60°. Пользуясь калькулятором, можно, однако, показать, что согласно формуле (*) $R=0$.

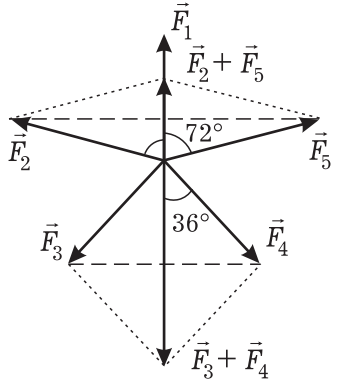


Рис. 11

Имеется и более красивое доказательство того, что результирующий вектор есть нулевой вектор. В самом деле, мы довольно произвольно взяли в качестве силы, которой не хватило пары, силу $\vec{F}_1$. Если бы в качестве такой взять силу $\vec{F}_2$, а в пары объединить $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$ (одна пара) и $\vec{F}_4$ и $\vec{F}_5$ (вторая пара), то, повторив рассуждения, получим, что равнодействующая всех пяти сил $\vec{R}$ должна быть направлена вдоль линии действия силы $\vec{F}_2$. Возможно ли, чтобы вектор был одновременно направлен вдоль двух несовпадающих друг с другом направлений (и $\vec{F}_1$, и $\vec{F}_2$; а на самом деле, как догадался читатель, ещё и вдоль направления действия сил $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ и $\vec{F}_5$!)? **Ненулевым** вектор **не** может быть! Остаётся одна возможность: суммарный **вектор** – нулевой!

Изложенное красивое решение можно оформить в виде одного единственного предложения: в задаче **не существует ни одного выделенного направления**, поэтому ненулевой вектор равнодействующей не может быть никуда направлен.

Такие соображения равноправия чего-то (симметрии, например, направлений) физики очень любят и регулярно используют в своей работе.

Следующая задача возникла несколько лет назад после того, как в руки автору попал «Тест технической сообразительности Беннета» (кажется, при приеме на работу на стройку). Один из вопросов там был такой:

Однородная цепь подвешена за два конца не симметрично (рис.12) *На какой из крюков приходится большая нагрузка?*

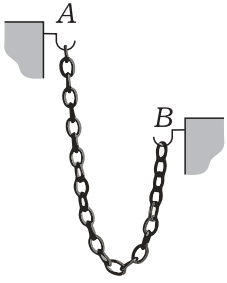


Рис.12

От тестируемых не требовалось решать никакие уравнения. Нужно было лишь показать общую техническую грамотность и опытность.

В связи с этим вопросом возникла такая задача:

4. Однородная массивная гибкая верёвка подвешена за два конца на разных высотах (см. рис. 13а). Масса верёвки m. Углы, которые составляет верёвка с вертикалью в точках закрепления, равны 30° и 60°. Определите силы натяжения верёвки вблизи её точек крепления.

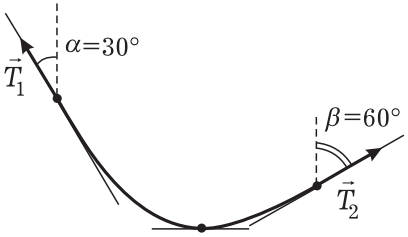


Рис. 13а

Решение. Задача кажется очень трудной, т. к. не ясно, какую роль играет **неизвестная нам форма верёвки**, которую она примет под действием сил тяжести всех частей верёвки. И всё же задача в той постановке, в какой дана, имеет «школьное» решение. Мысленно проведём горизонтальную ось слева направо. Поскольку верёвка находится в равновесии, то сумма проекций всех сил на горизонтальное направление равна нулю. Сила тяжести верёвки имеет нулевую проекцию на это направление (эта сила направлена вертикально). Остаются вклады от двух натяжений (рис. 13б):

$$T_{1,\text{гор}} + T_{2,\text{гор}} = 0, \text{ или}$$

$$-T_1 \cdot \sin 30^\circ + T_2 \sin 60^\circ = 0.$$

Полагая $\sin 30^\circ = 1/2$ и $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$, находим $T_1 / T_2 = \sqrt{3}$. $T_1 / T_2 = \sqrt{3} \approx 1{,}73$.

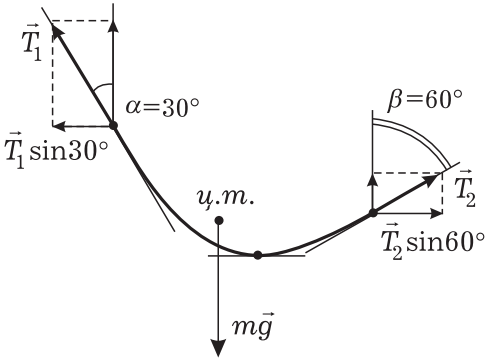


Рис. 13б

Заметим: натяжение веревки больше вблизи той точки закрепления, которая выше! Там больше и сила со стороны веревки на место крепежа веревки. (Вспомните вопрос из теста на техническую сообразительность!)

Мысленно проведём ещё и вертикальную ось, направив её вниз. Сумма проекций всех сил на эту ось также равна нулю:

$$mg - T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 60^\circ = 0.$$

Учитывая найденное ранее соотношение между T_1 и T_2 и значения $\cos 60^\circ = 1/2$ и $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$, получаем: $mg - \sqrt{3} \cdot T_2 \cdot \sqrt{3}/2 - T_2/2 = 0$, откуда $T_2 = mg/2$ и $T_1 = \sqrt{3}mg/2 \approx 0{,}87mg$.

5. Однородная гибкая верёвка подвешена за два конца на разных высотах. Углы, которые составляет верёвка с вертикалью в точках закрепления, равны $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 60^\circ$. Найти отношение длины части верёвки, расположенной левее самой низшей точки верёвки, к длине части верёвки правее этой точки.

Решение. К левой части веревки (которая левее самой низкой точки

веревки) приложены три силы: $\vec{T}_1$, $m_1\vec{g}$ (причем, масса левой части веревки m_1 пропорциональна длине этой части веревки l_1) и сила $\vec{T}_{12}$ со стороны правой части веревки. К правой части веревки приложено также три силы: $\vec{T}_2$, $m_2\vec{g}$ (причем масса правой части веревки m_2 пропорциональна длине своей части веревки l_2) и сила $\vec{T}_{21}$ со стороны левой части веревки. Силы $\vec{T}_{12}$ и $\vec{T}_{21}$ направлены вдоль *горизонтали*, т.е. *имеют равные нулю проекции на вертикальное направление*. Поэтому для вертикального направления равенство нулю суммы проекций сил, действующих на каждую часть веревки, запишется в виде: $m_1 g = T_1 \cos\alpha$ (1) и $m_2 g = T_2 \cos\beta$ (2). Деля одно уравнение на другое и учитывая пропорциональность масс длинам, получаем $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{T_1 \cos\alpha}{T_2 \cos\beta}$ (3). Отношение натяжений веревки вблизи разных концов найдем из условия равенства проекций на горизонтальное направление **внешних** сил, действующих **на всю** веревку: $T_1 \sin\alpha = T_2 \sin\beta$ (4), откуда найдем отношение сил натяжения $T_1 / T_2 = \sin\beta / \sin\alpha$ (4'). Подстановка (4') в (3) дает: $l_1 / l_2 = \mathrm{tg}\,\beta / \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}60^\circ / \mathrm{tg}30^\circ = 3$.

6. Неожиданно простое решение имеет очень сложная на первый взгляд задача о натяжениях гибкой массивной веревки на разных высотах [11]. Рассмотрим участок массивной веревки между близкими точками A и B (рис.14а).

Можно было бы записать условие равновесия для сил в проекциях

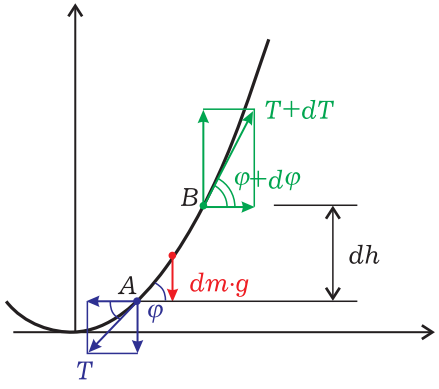


Рис. 14а

на горизонтальное и вертикальное направления:

$$(T+dT)\cos(\phi+d\phi) - T\cdot\cos\phi = 0 \quad (1)$$

$$(T+dT)\sin(\phi+d\phi) - T\cdot\sin\phi = dm\cdot g = \rho_1 dl\cdot g = \rho_1 \frac{dh}{\sin\phi}\cdot g \quad (2)$$

где $\rho_1 = m/l$ – масса единица длины веревки, m – масса всей веревки, l – ее полная длина. Пользуясь далее формулами для синуса и косинуса суммы двух углов, а также приближенными формулами $\sin d\phi \approx d\phi$, $\cos d\phi \approx 1$ для малых углов $d\phi$, после несложной выкладки (в несколько строк) мы после всех сокращений неожиданно пришли бы к очень простой формуле для приращения натяжения веревки при переходе от точки A к близкой ей точке B веревки, находящейся на dh выше точки A (проведите выкладку самостоятельно):

$$dT = \rho_1 g\cdot dh. \quad (3)$$

Заметим, что приращение натяжения оказалось связано только с приращением высоты! Рассматривая не обязательно близкие точки A

и B, мы могли осуществить переход от точки A к точке B посредством последовательности большого числа малых шагов, при этом получили бы

$$\Delta T = T_B - T_A = dT_1 + dT_2 + ...dT_N =$$

$$= \rho_1 g \cdot (dh_1 + dh_2 + ...dh_N) = \rho_1 g \cdot \Delta h,$$

т.е. $$\Delta T = \rho_1 g \cdot \Delta h = \frac{m}{l} g \cdot \Delta h. \qquad (3')$$

Удивительно, но к формуле (3) можно было прийти, не производя «несложную выкладку» после системы (1–2), – формулу (3) можно было написать почти сразу, рассмотрев **проекции сил на направление вдоль дуги *AB* между близкими точками *A* и *B*** (дуга *AB* близка к прямой; рис.14б)

$$dT = dm \cdot g \cdot \sin\phi = \rho_1 dl \sin\phi \cdot g = \rho_1 dh \cdot g.$$

Результат (3') сам по себе интересен. Если мы будем приближать и удалять друг от друга крюки на рис. 12, но так, чтобы разность высот между ними оставалась неизменной, то разность натяжений цепи вблизи крюков будет тоже неизменной. Сами натяжения могут изменяться, но не их разность.

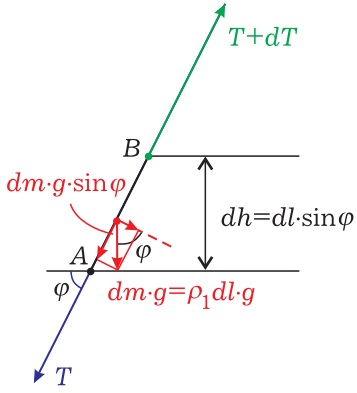


Рис. 14б

Литература

1. *Льоцци М.* История физики. – М.: Мир, 1970. – 464 с. (С.79)

2. *Мах Э.* Механика. Историко-критический очерк ее развития. – Ижевск, 2000. – 456 с. (стр. 222)

3. *Павленко Ю.Г.* Начала Физики. Учебник. – 2-е изд. – М.: «Экзамен», 2005. – 864 с. (стр. 58)

4. *Зоммерфельд А.* Механика. – Москва-Ижевск: НИЦ «РиХД», 2001. – 368 с. (стр. 15)

5. *Герц Г.* Принципы механики, изложенные в новой связи. – М.: изд-во АН СССР, 1959. – 387 с.

6. *Павлов А.М.* Курс общей физики. Механика. – М.-Ижевск: РХД, 2008. – 412 с. (§4)

7. *Перышкин А.В.* Физика. 7 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений. – 2-е изд. – М.: Дрофа, 2013. – 221 с. (стр.68)

8. *Тарасов Л.В.* Механика. Продвинутый курс. Для старшеклассников и студентов. – М.: ЛЕНАНД, 2017. – 712 с. (стр.62–72)

9. *Черноуцан А.И.* Физика для поступающих в вузы / Под ред. А.А. Леоновича. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 224 с. (стр.19)

10. *Ландау Л.Д., Ахиезер А.И, Лифшиц Е.М.* Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 400 с. (стр.21)

11. *Черноуцан А.И.* Задачи с распределенной массой // Квант, 1988 / №2, с. 46–48.