Мукушев Базарбек Агзашулы
Профессор Казахского агротехнического университета им. С.Сейфуллина, доктор педагогических наук, г. Нур-Султан, Республика Казахстан

Энергетическая картина гравитационного поля солнечной системы

В статье на основе энергетического подхода теоретически исследовано явление гравитационного взаимодействия между космическим аппаратом (КА), Солнцем и планетами. Для изучения характеристик этого взаимодействия выбраны две гипотетические модели: 1) Венера и Земля «закреплены» в момент их максимального приближения (то есть планеты не движутся) и эти небесные тела взаимодействуют только между собой. В гравитационном поле этих планет надо переместить КА с поверхности Земли на поверхность Венеры. Перемещение осуществляется по прямолинейной траектории, проходящей через центры Земли и Венеры; 2) Солнце, Венера и Земля «закреплены» в момент парада планет и их центры находятся на одной прямой. В гравитационном поле этих небесных тел перемещение КА с поверхности Земли на поверхность Венеры происходит по прямолинейной траектории, проходящей через центры Солнца и планет.

Закономерности потенциальной энергии гравитационного взаимодействия космического аппарата с небесными телами исследованы с использованием компьютерных вычислений.

Введение

В настоящее время освоение космического пространства реализуется в трех направлениях: околоземные полеты, т.е. создание искусственных спутников Земли различного назначения; полеты к Луне; полеты к планетам и другим небесным телам Солнечной системы. Триумфальные достижения человечества в космической технике в каждом из этих направлений хорошо известны. Движение искусственных спутников Земли и Солнца, облет естественного спутника Земли на космическом корабле и высадка на Луну, запуск искусственного спутника Луны, посадки на поверхности Венеры и Марса, исследование Юпитера с пролетной траектории и другие космические полеты исследуются на основе законов гравитационного притяжения между космическим аппаратом и небесными телами Солнечной системы. Нами был использован энергетический подход к изучению гравитационного поля Солнечной системы и компьютерный метод, необходимый для вычисления численных значений параметров этого поля [1].

Перемещение космического аппарата к другим планетам без учета гравитационного поля Солнца

Рассмотрим перемещение космического аппарата (КА) с поверхности Земли к другим планетам. Будем пренебрегать гравитационным влиянием Солнца на космический аппарат.

Найдем численное значение минимальной работы, необходимой для перемещения КА массой m с поверхности Земли на поверхность Венеры, считая, что планеты «закреплены», то есть не движутся в пространстве и КА был выпущен с Земли по траектории, соединяющей центры Земли и Венеры. Очевидно, эта работа совершается за счет реактивной силы двигателя космического аппарата.

Выберем тот момент, когда наступает парад этих двух планет. В этом состоянии расстояние между этими планетами будет минимальным и составляет 42 миллиона километров.

Космический аппарат массой m необходимо перемещать все время в суммарном гравитационном поле Земли и Венеры, вдоль прямой, соединяющей центры Земли и Венеры. На этой прямой есть точка C, в которой силы тяготения Земли и Венеры уравновешиваются (рис. 1). Точка C делит весь путь тела m на две части. На первом участке от Земли до точки C сила тяготения суммарного гравитационного поля Земли и Венеры направлена к центру Земли, на втором участке – от точки C до Венеры – к Венере. Точку C назовем точкой «пересадки» и она расположена ближе к Венере.

Поскольку модули сил, действующих на КА со стороны гравитационных полей Земли и Венеры в точке C равны, то:

$$G\frac{M_{\text{В}}}{r_C^2} = G\frac{M_{\text{З}}}{(1 - r_C)^2},$$

где $M_{\text{З}}$ и $M_{\text{В}}$ – массы Земли и Венеры.

Решив это уравнение, найдем: $r_{\text{С}} = 1{,}99 \cdot 10^{10}$ м.

Очевидно, на первом участке необходимо совершать работу против сил тяготения Земли, а на втором участке, достигнув точки «пересадки» с любой, сколь угодно малой скоростью, КА начнет двигаться

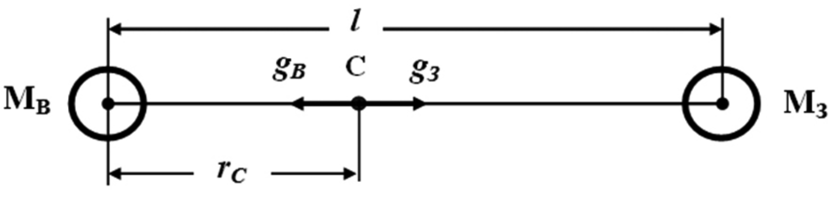

Рис. 1

$$\mathbf{M_1 := 6 \cdot 10^{24}}$$ - Масса Земли; $$\mathbf{R_1 := 6.40 \cdot 10^{6}}$$ - Радиус Земли;

$$\mathbf{M_2 := 4.87 \cdot 10^{24}}$$ - Масса Венеры; $$\mathbf{R_2 := 6.05 \cdot 10^{6}}$$ - Радиус Венеры; $$\mathbf{m := 1}$$

$$\mathbf{G := 6.67 \cdot 10^{-11}} \quad \mathbf{l := 4.2 \cdot 10^{10}}$$ - Расстояние между центрами Земли и Венеры

$$\mathbf{U(r) := -G \cdot \frac{m \cdot M_1}{|r|} - G \cdot \frac{m \cdot M_2}{|l - r|}}$$

Листинг 1

(свободно падать) к Венере под действием суммарной силы тяготения, направленной к Венере. КА достигнет поверхности Венеры почти со второй космической скоростью для этой планеты и происходит «жесткая» посадка.

Следовательно, работа будет минимальной, если КА достигнет точки C с минимальной скоростью, необходимой для дальнейшего движения. Эту скорость, а значит, и кинетическую энергию КА в точке C можно считать равной нулю.

Из принципа суперпозиции полей следует, что потенциал в каждой точке пространства

$$\varphi = \varphi_З + \varphi_В, \tag{1}$$

где $\varphi_З$ и $\varphi_В$ – потенциалы полей тяготения Земли и Венеры в этой точке.

Запишем формулу (1) для прямой, соединяющей центры Земли и Венеры

$$\varphi(r) = -G\frac{M_З}{|r|} - G\frac{M_В}{|l-r|}, \tag{2}$$

где r – расстояние от центра Земли до произвольной точки прямой, соединяющей центры Земли и Венеры.

Используя уравнение (2), напишем формулу потенциальной энергии КА в системе «Земля – Венера» (или энергия связи между КА и системой «Земля – Венера»):

$$U(r) = m\varphi = -\frac{GmM_З}{|r|} - \frac{GmM_В}{|l-r|}.$$

С помощью пакета MathCAD создадим небольшую программу по расчету потенциальной энергии КА массой $m = 1$ кг в изолированной системе «Земля-Венера» (Листинг 1) [2,3].

На листинге 1 $М_З$ обозначено через $\boldsymbol{M_1}$, а $M_В$ – через $\boldsymbol{M_2}$, $R_З \to \boldsymbol{R_1}$, $R_В \to \boldsymbol{R_2}$. В среде MathCAD автоматически ведётся контроль размерностей и пересчёт в системе единиц СИ.

Посредством компьютерной программы был построен график потенциальной энергии КА массой $m = 1$ кг в изолированной системе «Венера-Земля» (рис. 2). Единицы по осям системы координат представлены в системе СИ (ордината $U(r)$ – в джоулях, абсцисса r – в метрах.).

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия или энергия связи между космическим аппаратом массой m и Землей (глубина «потенциальной ямы») равна

$$G\frac{mM_З}{R_З} = 6{,}2531 \cdot 10^{7} m \text{ (Дж)},$$

между КА и Венерой

$$G\frac{mM_В}{R_В}=5{,}3958\cdot 10^7\,m\ (\text{Дж}).$$

Здесь $R_З$ и $R_В$ – радиусы Земли и Венеры, m – масса КА в килограммах (кг).

Вычислим глубину «потенциальных ям» для Земли и Венеры в условиях их взаимодействии. Потенциальная энергия КА, когда он лежит на поверхности Земли, равна:

$$U(R_З)=-G\frac{mM_З}{R_З}-\frac{GmM_В}{l-R_З}.$$

Расчет показывает, что

$$G\frac{mM_З}{R_З}=6{,}25\cdot 10^7\,m\ (\text{Дж})\ \text{и}$$

$$\frac{GmM_В}{l-R_З}=7{,}73\cdot 10^3\,m\ (\text{Дж}).$$

Поскольку

$$G\frac{mM_З}{R_З}>>\frac{GmM_В}{l-R_В},$$

то глубина «потенциальной ямы» Земли в 8000 раз больше, чем энергия связи между КА и Венерой, когда космический аппарат находится на поверхности Земли. То есть, можно пренебречь гравитационным влиянием Венеры на поверхности Земли. Таким образом,

$$U(R_З)\approx -G\frac{mM_З}{R_З}=-6{,}2531\cdot 10^7\,m\ \ (\text{Дж}).$$

Так же, потенциальная энергия КА, когда он лежит на поверхности Венеры, равна

$$U(R_В)\approx -G\frac{mM_В}{R_В}=$$

$$=-5{,}3691\cdot 10^7\,m\ \ (\text{Дж}).$$

Аналогично можно рассуждать, что Земля тоже не окажет существенного гравитационного влияния на

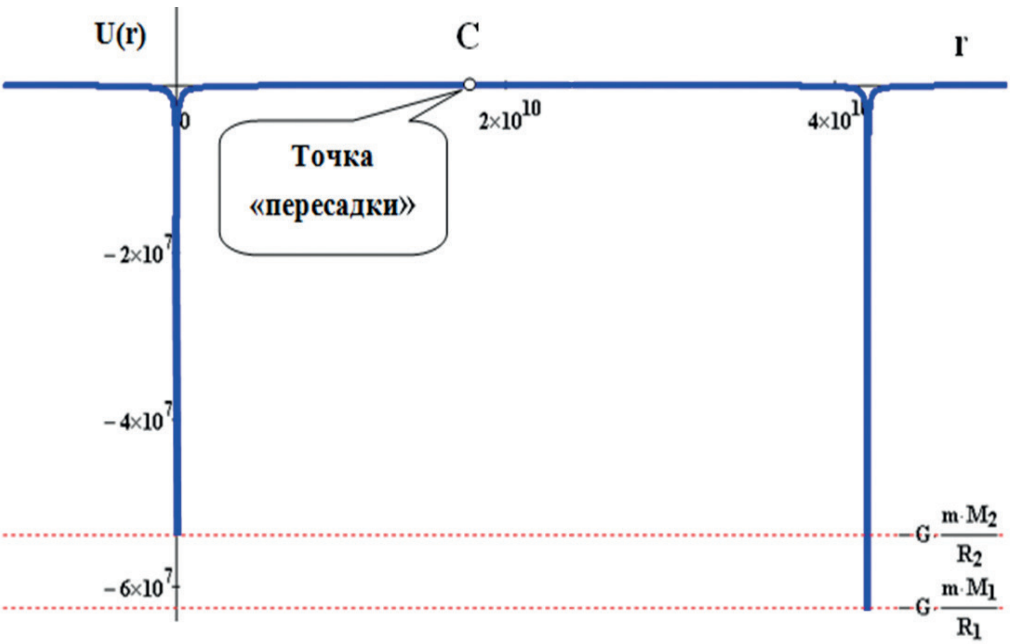

Рис. 2

поверхности Венеры. Можно проводить аналогичные вычисления для перемещения КА к другим планетам. Расчеты показывают, что планеты Солнечной системы по отношению друг к другу почти не оказывают гравитационного влияния. Поскольку масса Солнца в 750 раза больше суммарной массы всех планет, гравитационными влияниями планет на Солнце тоже можно пренебречь.

Находим значение потенциальной энергии взаимодействия между КА массой m и системой «Венера-Земля» в точке C. Потенциальная энергия КА в системе «Венера-Земля» для точки C выражается по формуле

$$U(r_C) = m\varphi_C = m\left(-G\frac{M_З}{r_C} - G\frac{M_B}{l - r_C}\right) \approx$$

$$\approx -34450m \text{ (Дж)}.$$

Значит

$$|U(R)_З| >> |U(r_C)|$$

и также

$$|U(R)_В| >> |U(r_C)|$$

Чтобы КА преодолел точку «пересадки» (C) без учета гравитационного влияния Солнца и свободно падал на поверхность Венеры, внешняя сила должна совершить работу, равную:

$$A = U(r_C) - U(R_З) \approx -U(R_З) = \frac{GmM_З}{R_З} =$$

$$= 6{,}25 \cdot 10^7 m \text{ (Дж)}.$$

Следовательно, минимальная работа, необходимая для перемещения КА с Венеры на Землю без учета гравитационного влияния Солнца, равна $5{,}37 \cdot 10^7 m$ (Дж). Для того, чтобы совершить «мягкую» посадку на поверхность Венеры, нужно погасить скорость КА (Как выше отметили КА достигнет Венеры со второй космической скоростью для этой планеты). Для гашения скорости (это делается тормозным двигателем) нужна такая же по величине работа, как и для сообщения такой же скорости, т.е. $G\frac{mM_B}{R_B}$.

Следовательно, минимальная работа, необходимая для перелета с поверхности Земли на поверхность Венеры (или наоборот) при «мягкой» посадке равна

$$A \approx G\frac{mM_З}{R_З} + G\frac{mM_В}{R_В} \approx 6{,}25 \cdot 10^7 m +$$

$$+5{,}37 \cdot 10^7 m \approx 1{,}262 \cdot 10^8 m \text{ (Дж)}$$

Перемещение космического аппарата к другим планетам Солнечной системы с учетом гравитационного поля Солнца

Теперь исследуем космическое путешествие КА с поверхности Земли к планете Венера с учетом гравитационного влияния Солнца. Выберем гипотетическую модель, где Солнце, Венера и Земля «закреплены», находятся на одной прямой (рис. 3).

Мы изучим потенциальную энергию КА массой m в системе

Рис. 3

«Земля – Венера – Солнце» для 4 случаев, в которых рассматривается энергетическое состояние космического аппарата, когда он будет находиться в различных точках Солнечной системы.

1. На основе принципа суперпозиции полей напишем значение потенциальной энергии КА в системе «Земля – Венера – Солнце» для любой точки прямой, соединяющей центры этих небесных тел, в условиях $|r| > R_C$:

$$U(r) = -\frac{GmM_C}{|r|} - \frac{GmM_B}{|l_1 - r|} - \frac{GmM_3}{|l_2 - r|},$$

где M_C масса Солнца, l_1 – расстояние центров Солнца и Венеры, l_2 – расстояние центров Солнца и Земли.

2. При $|r| \le R_C$ потенциальную энергию КА для поверхности Солнца напишем так:

$$U(r) = -\frac{GmM_C}{r}\left(\frac{r}{R_C}\right).$$

3. Вычислим значение потенциальной энергии КА в системе «Венера – Солнце» для случая, когда КА находится на поверхности Венеры.

$$U(r) = -G\frac{mM_B}{R_B} - \frac{GmM_C}{r},$$

где r лежит в интервале

$$l_1 - R_B \le r \le l_1 + R_B.$$

Не будем учитывать гравитационное влияние Земли на поверхности Венеры в связи с тем, что

$$\left|-G\frac{mM_B}{R_B}\right| >> \left|-G\frac{mM_3}{l_2 - l_1 - R_B}\right|.$$

4. Вычислим значение потенциальной энергии КА в системе «Земля–Солнце» для случая, когда КА находится на поверхности Земли.

$$U(r) = -G\frac{mM_3}{R_3} - \frac{GmM_C}{r}.$$

Дно «потенциальной ямы» Земли находится в интервале

$$l_2 - R_3 \le r \le l_2 + R_3.$$

Здесь не учитывается гравитационное влияние Венеры на поверхности Земли, так как

$$\left|-G\frac{mM_3}{R_3}\right| >> \left|-G\frac{mM_B}{l_2 - l_1 - R_3}\right|.$$

Создана компьютерная программа в среде MathCAD, где учтены все гравитационные действия, которые испытывает КА массой 1 кг в зависимости от различных его координат в системе «Земля – Венера – Солнце» (Листинг 2).

На листинге 2 M_C обозначено через $\boldsymbol{M_0}$, M_B – через $\boldsymbol{M_1}$, M_3 обозначено через $\boldsymbol{M_2}$, а $R_С \to \boldsymbol{R_0}$, $R_В \to \boldsymbol{R_1}$, $R_З \to \boldsymbol{R_2}$. Единицы по осям системы координат представлены в системе СИ (ордината $U(r)$ – в джоулях, абсцисса r – в метрах).

Эти планеты не рассматриваются как материальные точки. Посредством компьютерной программы построим график потенциальной энергии единичной массы в Солнечной системе (нижняя часть рисунка 3). Здесь не видны «потенциальные ямы» Венеры и Земли в связи с тем, что значения «глубины потенциальной ямы» этих планет приблизительно в 3000 раз меньше чем глубина «потенциальной ямы» Солнца. Для обнаружения «потенциальных ям» планет масштаб ординаты графика потенциальной энергии единичной массы в Солнечной системе был увеличен в 500 раз и мы получили график в верхней части рисунка 4. Из этого графика видим едва заметные вертикальные пики, абсциссы которых соответствуют значениям расстояний этих планет от центра Солнца.

$\mathbf{M_0 := 2.00 \cdot 10^{30}}$ - **Масса Солнца;** $\mathbf{R_0 := 7.00 \cdot 10^{8}}$ - **Радиус Солнца;**

$\mathbf{M_1 := 4.87 \cdot 10^{24}}$ - **Масса Венеры;** $\mathbf{R_1 := 6.05 \cdot 10^{6}}$ - **Радиус Венеры;**

$\mathbf{M_2 := 6.00 \cdot 10^{24}}$ - **Масса Земли;** $\mathbf{R_2 := 6.40 \cdot 10^{6}}$ - **Радиус Земли;**

$\mathbf{G := 6.67 \cdot 10^{-11}}$ - **Гравитационная постоянная;** $\mathbf{m := 1}$

$\mathbf{l_1 := 1.08 \cdot 10^{11}}$ - **Расстояние между центрами Солнца и Венеры;**

$\mathbf{l_2 := 1.50 \cdot 10^{11}}$ - **Расстояние между центрами Солнца и Земли;**

$$U(r) := \left| \begin{array}{ll} \left(-G\cdot\dfrac{m\cdot M_0}{|r|} - G\cdot\dfrac{m\cdot M_1}{|l_1 - r|} - G\cdot\dfrac{m\cdot M_2}{|l_2 - r|}\right) & \text{if } |r| > R_0 \\ \left[-G\cdot\dfrac{m\cdot M_0}{r}\left(\dfrac{r}{R_0}\right)\right] & \text{if } |r| \le R_0 \\ \left(-G\cdot\dfrac{m\cdot M_1}{R_1} - G\cdot\dfrac{m\cdot M_0}{r}\right) & \text{if } l_1 - R_1 \le r \le l_1 + R_1 \\ \left(-G\cdot\dfrac{m\cdot M_2}{R_2} - G\cdot\dfrac{m\cdot M_0}{r}\right) & \text{if } l_2 - R_2 \le r \le l_2 + R_2 \end{array} \right.$$

Листинг 2

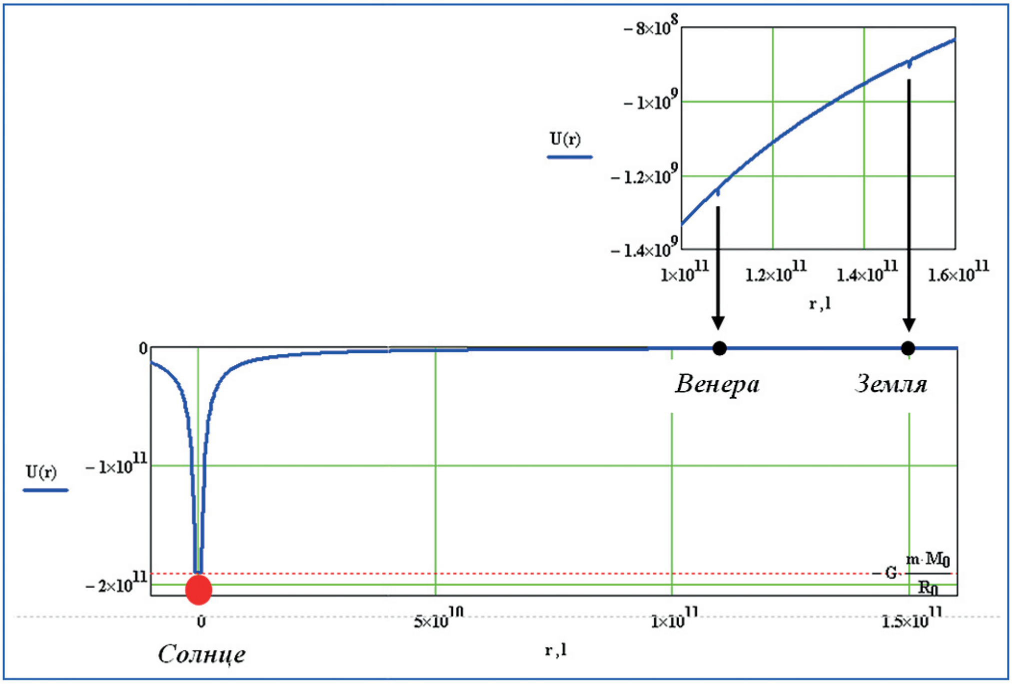

Рис. 4

График потенциальной энергии единичной массы в Солнечной системе, который был представлен на рисунке 4, описывает энергетическую картину гравитационного поля Солнечной системы в двухмерном пространстве.

Для увеличения масштаба этих «гравитационных пиков» используем команду «**Масштаб**», которой располагает MathCAD. При увеличении масштабы этих пиков получим «потенциальные ямы» Венеры и Земли, представленные на рис. 5.

С энергетической точки зрения совершить космический полет с Земли к Венере (или к Меркурию в условиях парада планет) – это значит выйти со дна потенциальной ямы поля тяготения Земли и свободно падать на дно потенциальной ямы Венеры (или другой планеты). Для этого космическому аппарату достаточно преодолеть точку «пересадки», абсцисса которой равна $1{,}4974 \cdot 10^{11}$ метр (рис. 5б). Найдем расстояние центра Земли от точки «пересадки»:

$$1{,}50 \cdot 10^{11} - 1{,}4974 \cdot 10^{11} = 2{,}6 \cdot 10^{8}\ \text{метр}$$

или около 260 тысяч км, а расстояние от центра Венеры до точки «пересадки» равно 41 740 тысяч км!

$$(4{,}2 \cdot 10^{10}\ \text{м} - 2{,}6 \cdot 10^{8}\ \text{м} = 4{,}174 \cdot 10^{10}\ \text{м})$$

В первой части статьи эти значения были равными соответственно 22,1 миллион км и 19,9 миллион км. Тогда мы не учитывали гравитационного влияния Солнца на планеты. Минимальную работу, необходимую для перемещения КА массой m с

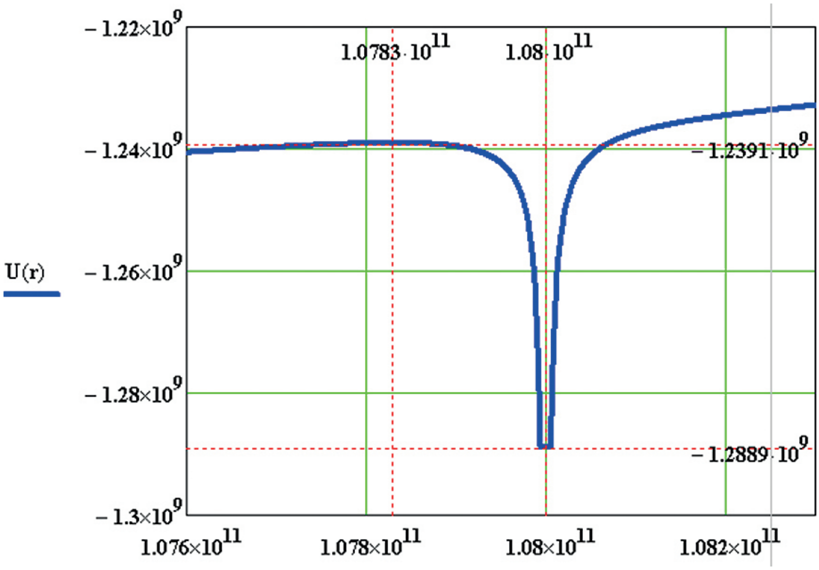
−1.22×10^9
−1.24×10^9
−1.26×10^9
−1.28×10^9
−1.3×10^9
U(r)
1.0783·10^11
1.08·10^11
−1.2391·10^9
−1.2889·10^9
1.076×10^11
1.078×10^11
1.08×10^11
1.082×10^11

Рис. 5а

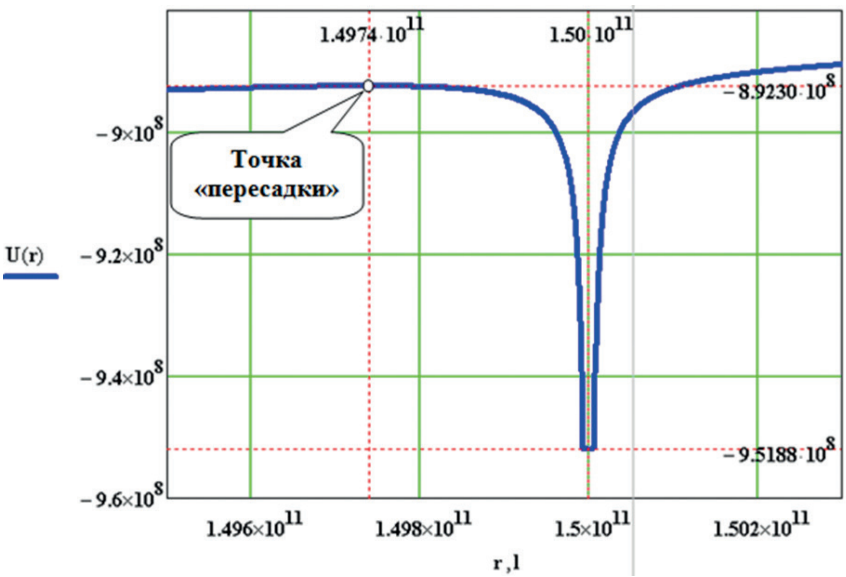
1.4974·10^11
1.50·10^11
−8.9230·10^8
−9×10^8
Точка «пересадки»
U(r)
−9.2×10^8
−9.4×10^8
−9.5188·10^8
−9.6×10^8
1.496×10^11
1.498×10^11
1.5×10^11
1.502×10^11
r, l

Рис. 5б

поверхности Земли на поверхность Венеры, (или на поверхность Меркурия в условиях парада планет в «закрепленном» состоянии) можно выразить так:

$$A \approx U(r_C) - U(R_З) = -8{,}9230 \cdot 10^8\, m -$$

$$-(-9{,}5188 \cdot 10^8\, m) \approx 0{,}5958 \cdot 10^8\, m \text{ (Дж)}.$$

(Напомним, что здесь m в килограммах.)

Для того чтобы совершить «мягкую» посадку на поверхность Венеры без парашюта, ее нужно погасить. Для гашения скорости (это делается тормозным двигателем) нужна энергия не меньше $\sim$ $3{,}9660 \cdot 10^8\, m$ Дж. Следовательно, при совершении «мягкой» посадки на поверхность Венеры минимальная работа должна быть:

$$A \approx 0{,}5958 \cdot 10^8\, m + 3.9660 \cdot 10^8\, m \approx$$

$$\approx 4{,}5618 \cdot 10^8\, m \text{ (Дж)}.$$

(Когда мы рассмотрели этот фактор без учета солнечной гравитации, получили минимальную работу, необходимую для совершения «мягкой» посадку КА массой m на поверхность Венеры, вылетавшего с поверхности Земли, $\sim 1{,}2620 \cdot 10^8\, m$ (Дж).

В реальных условиях затраты энергии двигателя КА для перелета с поверхности Земли на поверхность Венеры при «жесткой» и «мягкой» посадках в разы больше, чем дают наши расчеты по вычислению этих значений. Во-первых, коэффициент полезного действия реактивного двигателя находится в интервале ~ (0,35÷0,45); во-вторых, ступеньки, при отрыве от двигателя, забирают часть механической энергии космического аппарата; в-третьих, космические аппараты не запускаются по прямой, проходящей по центрам планет и Солнца. Они поднимаются с поверхности Земли по очень сложной орбите и при движении испытывают многочисленные корректировки траектории полета, что требует большую затрату энергии.

Если исследуем дно «потенциальных ям» этих планет и Солнца, используя команду **«Масштаб»,** то получим новые результаты, доказывающие явное доминирование гравитации Солнца в околосолнечном пространстве. Эту часть изучения энергетической картины гравитационного поля Солнечной системы оставим для исследования читателям.

Литература

1. Мукушев Б.А. Небесная механика в компьютерных экспериментах // Потенциал. – 2021. – №8. – с.64–77.
2. Кирьянов Д. Mathcad 14 в подлиннике. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2007. – 682 с.
3. Очков В. MathCAD 14 для студентов, инженеров и конструкторов. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2007. – 370 с.
4. Мукушев Б.А. «Энергия связи» в задачах // Потенциал. – 2011. – №11. – с. 27–34.