ФИЗИКА

Александр Иннокентьевич Киркинский
Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей физики, заслуженный преподаватель МФТИ,
почётный работник ВПО РФ

Законы Ньютона. Импульс. Движение тела с переменной массой

В статье рассматриваются вопросы совместного применения второго и третьего законов Ньютона и, как следствие, закона изменения импульса системы. Приводится вывод, следствия и примеры применения уравнения движения тела с переменной массой – уравнения Мещерского.

О законах Ньютона для материальной точки, системы материальных точек

Под материальной точкой понимают простейшую модель реального физического тела, когда его размеры малы по сравнению с другими характерными масштабами задачи. При этом несущественными становятся вращение тела, его внутренняя структура, внутренние перемещения массы и взаимодействия. Положение материальной точки определяется в пространстве тремя числами – координатами, её характеристикой также является скалярная величина – масса.

Для описания движения материальной точки, взаимодействующей с другими телами, мы применяем установленный экспериментально второй закон Ньютона, который чаще всего записывается в виде

$$m\vec{a} = \vec{F}, \tag{1}$$

где m – масса, $\vec{a}$ – ускорение материальной точки, $\vec{F}$ – сила (векторная сумма сил), приложенная к этой точке.

Смысл этого заключается в том, что ускорение связано прямой пропорциональной зависимостью с действующей силой. Такая зависимость имеет место, только если масса постоянна.

Однако сам Ньютон формулировал этот закон, используя понятие импульса материальной точки ($\vec{p} = m\vec{v}$, $\vec{v}$ – скорость точки).

Изменение импульса за малый промежуток времени Δt равно

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t,$$

или, иначе

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}.$$

Более строго (в пределе $\Delta t \to 0$),

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \qquad (2)$$

Третий закон Ньютона утверждает, что при взаимодействии двух тел (независимо от наличия других тел) сила, с которой первое тело действует на второе, равна по величине и противоположна по направлению силе, с которой второе тело действует на первое. Поскольку под телами мы понимаем материальные точки, ясно, что эти силы направлены вдоль одной прямой.

Важно также отметить, что речь идёт о силах одной физической природы.

Этот закон также, как и второй, установлен экспериментально. В дальнейшем можем увидеть, что совместное применение обоих законов Ньютона даёт мощный аппарат решения динамических задач, в том числе в применении к движению физических систем.

Под системой материальных точек понимают их совокупность, выделенную от остальных тел на основе каких-то соображений. Точки системы могут взаимодействовать как друг с другом, так и с телами, не принадлежащими системе.

Импульсом системы называется

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \text{ –}$$

сумма импульсов всех точек системы $\vec{p}_i = m\vec{v}_i$.

Используя второй и третий законы Ньютона для системы материальных точек, выводят закон изменения импульса:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{вш}}, \qquad (3)$$

где $\vec{F}_{\text{вш}}$ – сумма внешних для этой системы сил, то есть сил, действующих на частицы системы со стороны тел, не принадлежащих системе. Силы взаимодействия частей системы (внутренние силы) не изменяют импульса системы.

Из закона (3) можно получить важное следствие. Существует точка системы, называемая центром масс системы, положение которой определяется как

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i$$

($\vec{r}_i$, $\vec{r}_c$ – радиусы-векторы точек и центра масс относительно некоторой системы отсчёта, $M = \sum_{i-1}^{N} m_i$ – масса системы), обладающая свойствами:

1) $M \cdot \vec{v}_c = \vec{P}$,

то есть произведение массы системы на скорость центра масс равно импульсу системы;

2) $M \cdot \vec{a}_c = \vec{F}_{\text{вш}}$, (4)

произведение массы системы на ускорение центра масс равно сумме **внешних** сил.

Уравнение (4) называют законом движения центра масс системы (теоремой о движении центра масс). Из него следует, что центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе системы, под действием силы, равной сумме внешних сил.

Важность этого закона ещё и в том, что мы получили способ решения части задачи о движении твёрдого тела, которое можно рассматривать как систему материальных точек. Движение такого тела можно представить как совокупность движения центра масс и движения относительно центра масс. Движение центра масс описывается законом (4), а движение относительно центра масс – как правило, вращательное движение – требует особого рассмотрения.

В качестве примера применения сказанного рассмотрим задачу о движении однородного стержня массой m по гладкой горизонтальной поверхности, если к нему приложена в продольном направлении сила F (рис. 1).

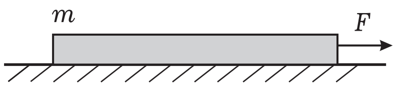

Рис. 1

Обычно ускорение стержня находится из уравнения второго закона Ньютона

$$ma = F, \qquad (5)$$

записываемого, как для материальной точки. Хотя стержень представляет собой твёрдое тело, обосновывается это тем, что он движется поступательно, то есть в каждый момент все его точки имеют одинаковые скорости и ускорения, и под ускорением и понимается ускорение стержня.

Однако, если мы хотим найти упругую силу, действующую в некотором сечении стержня, например, расположенном на одной третьей длины от переднего торца, нужно представить стержень как два взаимодействующих тела с массами $m/3$ и $2m/3$ (рис. 2).

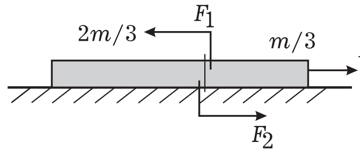

Рис. 2

Силы F_1 и F_2 по третьем закону Ньютона равны по величине и противоположны по направлению. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{m}{3}a = F - F_1 \\ \dfrac{2m}{3}a = F_2 \\ F_1 = F_2. \end{cases}$$

Складывая эти уравнения, получаем уравнение (5). То есть, строго говоря, уже при написании уравнения (5) неявно использован третий закон Ньютона.

Можно рассуждать иначе. Твёрдое тело представляет собой систему материальных точек, для которой можно записать (4). А так как движение стержня поступательное, ускорение стержня и есть ускорение центра масс. Важно, что и при этом рассуждении используются **второй** и **третий** законы Ньютона.

При непонимании этого важного факта можно умудриться написать для двух движущихся тел **три** динамических уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{m}{3}a = F - F_1 \\ \dfrac{2m}{3}a = F_2 \\ ma = F. \end{cases}$$

Откуда следует, что $F_1 = F_2$. Т.е., считая эти уравнения независимыми, то ли доказать, то ли подтвердить третий закон Ньютона, который установлен экспериментально и не нуждается в подобного рода рассуждениях.

Если масса переменная

Вернёмся ко второму закону Ньютона для материальной точки. Существует точка зрения, что запись его в импульсной форме (2) даже в рамках классической механики более общая, чем (1), так как позволяет рассматривать движение точки и при изменяемой со временем массой. Приходилось даже слышать утверждение, что якобы именно поэтому Ньютон и писал закон в таком виде.

Если раскрыть производную от импульса точки в уравнении (2)

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\frac{dm}{dt}=\vec{F},$$

то увидим, что второе слагаемое содержит скорость точки, имеющую разные значения в зависимости от выбора ИСО (инерциальной системы отсчёта), то есть не выполняется принцип относительности Галилея. Если же $m = \text{const}$, второе слагаемое пропадает и уравнение становится инвариантным относительно преобразований Галилея.

Некоторую путаницу в вопрос о применимости или неприменимости уравнения (2) при $m \neq \text{const}$ вносят случаи, когда необоснованное его применение даёт правильное решение задачи. Эти исключения требуют специального обоснования.

Таким образом, будем считать, что второй закон Ньютона, как опытный факт, применим для описания движения в ИСО материальной точки, только если её масса постоянна. Уравнения (1) и (2) полностью тождественны, применять их в случае переменной массы нельзя.

Уравнение Мещерского

Уравнение, описывающее движение тела с переменной массой было выведено И.В. Мещерским (1897 г.). Оно имеет вид

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{u}\frac{dm}{dt}+\vec{F}, \tag{6}$$

здесь $m = m(t)$ – изменяющаяся масса тела, $\vec{v}$ – мгновенная скорость тела, $\vec{u}$ – скорость отделяемой или присоединяемой массы относительно движущегося тела, $\vec{F}$ – внешняя сила. Отметим, что принцип относительности Галилея для этого уравнения выполняется.

Это дифференциальное уравнение, при написании которого предполагается, что за малый промежуток времени dt приращения скорости $d\vec{v}$ и массы dm малы.

Если ввести понятие расхода топлива

$$\mu=-\frac{dm}{dt},$$

который в случае ракеты положителен, то уравнение Мещерского принимает вид

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}_P+\vec{F},$$

где $\vec{F}_P = -\mu\vec{u}$ – реактивная сила, благодаря которой и разгоняется ракета.

Если тело массой $m(t)$ движется прямолинейно вдоль оси Ox и внешние силы отсутствуют, то в проекции на эту ось

$$mdv = u_x dm \qquad (7)$$

Здесь u_x – проекция относительной скорости на ось Ox. Для ракеты $u_x < 0$, $dm < 0$ и тогда $dv > 0$, то есть скорость увеличивается.

Рассмотрим следующий пример. Человек массой Δm ($\Delta m > 0$) прыгает с тележки, движущейся горизонтально со скоростью v. Суммарная масса человека и тележки равна m. Скорость человека при прыжке направлена в сторону, противоположную v, и равна по величине u ($u > 0$) (рис. 3).

Внешних сил в проекции на горизонтальное направление нет. Запишем равенство импульсов на это направление до и после прыжка:

$$mv = (m - \Delta m)(v + \Delta v) +$$

$$+ \Delta m(v + \Delta v - u),$$

откуда

$$m\Delta v = u{\cdot}\Delta m. \qquad (8)$$

Уравнение (8) отличается от уравнения (7) тем, что содержит приращения Δm и Δv. При этом не делалось предположений об их малости. Это обстоятельство наводит на мысль, что нужно внимательно рассмотреть вывод уравнения Мещерского и понять причину такого совпадения.

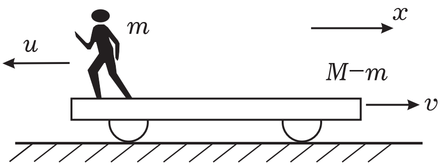

Рис. 3

Вывод уравнения Мещерского

Рассмотрим движение ракеты, движущейся при отсутствии внешних сил только за счёт силы реакции вытекающей струи.

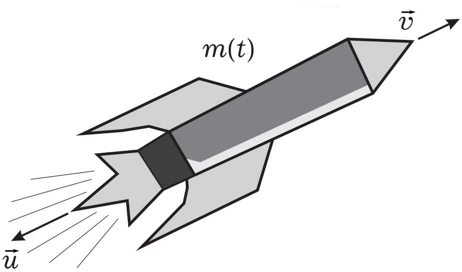

Рис. 4

Пусть $m(t), \vec{v}(t)$ – масса и скорость ракеты в момент времени t, $\vec{u}$ – скорость истекающей струи относительно ракеты (рис. 4).

Приравняем импульсы системы в моменты времени t и $t + \Delta t$, считая промежуток времени Δt малым, так чтобы все точки отделяемой массы Δm (для ракеты $\Delta m < 0$) имели одинаковую скорость

$$m\vec{v} = (m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) +$$

$$+ (-\Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v} + \vec{u}).$$

Раскрывая скобки, получим

$$m\vec{v} = m\vec{v} + \Delta m \cdot \vec{v} + m\Delta\vec{v} + \Delta m \cdot \Delta\vec{v} -$$

$$-\Delta m \cdot \vec{v} - \Delta m \cdot \Delta\vec{v} - \Delta m \cdot \vec{u},$$

или после взаимного сокращения слагаемых

$$m\Delta\vec{v} = \vec{u}\Delta m. \quad (9)$$

Эту формулу можно прочитать так: произведение **начальной** массы на изменение скорости равно произведению «сброшенной» массы на относительную скорость.

Отметим особенность вывода, состоящую в том, что так называемые «квадратичные» члены $(\Delta m \cdot \Delta v)$ сокращаются сами, и нет необходимости предполагать малость Δm и $\Delta\vec{v}$. Часто при выводе уравнения Мещерского в дифференциалах на этот факт не обращают внимания. Иногда его отмечают, но не считают принципиальным. А это оказывается важным, поскольку позволяет расширить границы применимости уравнения Мещерского. Полученное уравнение (9) годится и в случае конечной массы Δm, как это было в рассмотренном примере, когда человек спрыгивал с тележки (см. уравнение (8)).

Два частных случая

Если относительная скорость $\vec{u}$ присоединяемой или сбрасываемой массы равна нулю, то уравнение Мещерского принимает вид

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, m\vec{a} = \vec{F},$$

что по форме совпадает с уравнением второго закона Ньютона для материальной точки при $m = \text{const}$. Здесь же это уравнение имеет другое содержание. Оно верно и для $m \neq \text{const}$. Но для этого имеется обоснование – **второй** и **третий** законы Ньютона.

Рассмотрим движение нагруженной песком тележки общей массой M, к которой приложена постоянная сила F (рис. 5).

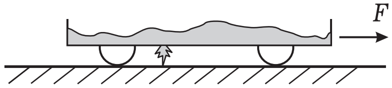

Рис. 5

Пусть в некоторый момент времени скорость тележки равна v_0 и из неё начинает высыпаться песок с постоянным массовым расходом

$$\mu = -\frac{dm}{dt}\left(\frac{кг}{c}\right) > 0.$$

Тогда $(M - \mu t)\dfrac{dv}{dt} = F.$

Решая это обыкновенное дифференциальное уравнение, можно получить

$$v = v_0 - \frac{F}{\mu}\ln\left(1 - \frac{\mu t}{M}\right).$$

Из этого выражения видно, что скорость тележки будет увеличиваться, так как $\ln\left(1 - \dfrac{\mu t}{M}\right) < 0.$

В связи с этой задачей можно вспомнить известный парадокс. Применяя уравнение Мещерского, предполагая, что $v_0 = 0, F = 0$, приходим к тому, что $v = 0$, то есть тележка двигаться не будет. В то же время, если применить закон движения центра масс системы, то видим, что центр масс системы «тележка+песок» не должен смещаться. А поскольку центр масс песка смещается, тележка должна двигаться. Парадокс разъясняется тем, что в модели движения тела с переменной массой, на основе которой выводится уравнение Мещерского, не учитываются движения масс внутри этого тела, которые приводят к смещению центра масс. То, что мы называем ракетой, ведёт себя как будто это материальная точка. Ещё один повод подумать о модели материальной точки. В частности, обязательно ли требовать, чтобы тело, принимаемое за материальную точку, имело постоянную массу.

Во втором частном случае считается, что $\vec{u} = -\vec{v}$, то есть что, например, присоединяемая масса покоится в некоторой системе отсчёта. Тогда

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{v}\frac{dm}{dt} + \vec{F}, \quad m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} = \vec{F}.$$

Или $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$.

Это уравнение теперь совпадает по форме записи с импульсной формой уравнения второго закона Ньютона (2) для материальной точки с постоянной массой.

Пример

Пусть на тележку массой m_0, движущуюся со скоростью v_0, в некоторый момент времени начинает насыпаться песок из неподвижного бункера (рис.6). Тогда

$$\frac{dp}{dt} = 0 \to mv = const \to$$

$$\to mv = m_0 v_0 \to v = \frac{m_0}{m} v_0.$$

Так как со временем масса тележки с песком растёт, скорость тележки будет уменьшаться.

Таким образом, только в этих двух особых случаях:

1) $\vec{u} = 0$; 2) $\vec{u} = -\vec{v}$

уравнения движения, учитывающие изменение массы движущихся тел, совпадают по форме записи с уравнениями второго закона Ньютона:

1) $m\vec{a} = \vec{F}$;

2) $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$,

полученных как опытный факт для материальной точки при обязательном условии m = const. Если же мы эти уравнения применяем, требуется объяснение, почему это можно делать. А это можно делать только при особых способах присоединения или отделения массы (2 частных случая).

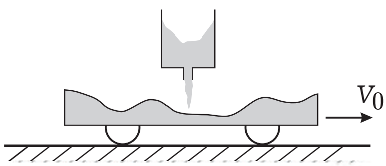

Рис. 6

Примеры решения задач

Задача 1. На покоящейся тележке массой M, которая может двигаться по горизонтальной поверхности без трения, находятся два человека массой m каждый (рис. 7). В каком случае скорость тележки станет больше: 1) оба человека спрыгивают одновременно со скоростью u относительно тележки; 2) спрыгивают по очереди с такой же скоростью u?

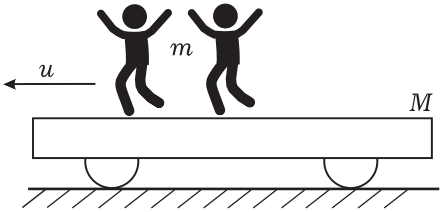

Рис. 7

1 случай

$$(M+2m)v_I = 2mu,$$

$$v_I = \frac{2m}{M+2m}u =$$

$$= \left(\frac{m}{M+2m} + \frac{m}{M+2m}\right)u.$$

2 случай

$$(M+2m)\Delta v_1 = mu$$

$$(M+m)\Delta v_2 = mu.$$

$$v_{II} = \Delta v_1 + \Delta v_2 = \left(\frac{m}{M+2m} + \frac{m}{M+m}\right)u.$$

Так как знаменатель второго слагаемого во втором случае меньше, скорость тележки будет больше: $v_{II} > v_I$. Так и в случае ракеты – каждая следующая сброшенная порция топлива сообщает тот же импульс меньшей массе ракеты. Этот полученный строго математический результат понятен и с физической точки зрения. В частности, объясняет преимущество многоступенчатых ракет.

Задача 2 (Олимпиада «Физтех-2002»)

На вершине покоящейся на гладком горизонтальном столе горки массой $M = 3m$ удерживают шайбу массой m (рис. 8). Шайбу отпускают, и она скользит по горке без трения и отрыва и покидает горку. Горка, не отрываясь от стола, приобретает скорость u. Найти разность высот H между вершинами горки. Верхняя часть поверхности правой вершины горки наклонена под углом $\alpha = 30°$ к вертикали. Направления всех движений параллельны плоскости рисунка.

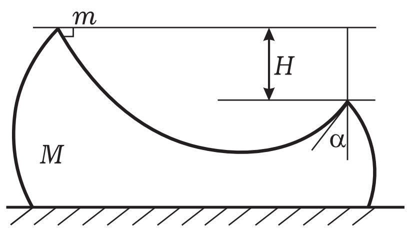

Рис. 8

Решение

Обозначим v_0 – скорость шайбы относительно горки в момент отрыва. Запишем закон сохранения импульса в проекции на горизонтальное направление в системе отсчета, движущейся влево со скоростью, равной конечной скорости горки u, и закон сохранения энергии.

$$\begin{cases} (M+m)u = mv_0 \sin\alpha \\ \dfrac{(M+m)u^2}{2} + mgH = \dfrac{mv_0^2}{2}. \end{cases}$$

Решая систему, получим ответ $H = \dfrac{30u^2}{g}$. Интересно отметить то, что в уравнении ЗСИ присутствуют только относительные величины, т. е. в этом виде оно справедливо в любой ИСО. Если к этому уравнению присмотреться внимательнее, то можно узнать в нём уравнение Мещерского в проекции на горизонтальное направление.

Задача 3

Аналогично решается задача с игрушечной пушкой.

Дано: масса пушки M, снаряда m, ствол наклонён под углом α к горизонту. После выстрела пушка получает скорость u. Определить расстояние между пушкой и снарядом в момент падения последнего на пол. Высотой пушки пренебречь.

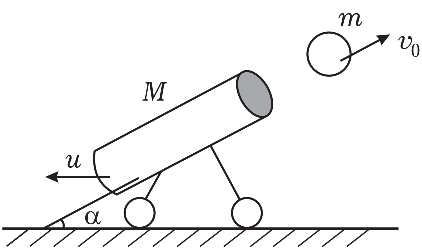

Рис. 9

Решение

$$\begin{cases} (M+m)u = mv_0\cos\alpha \\ l = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha. \end{cases}$$

Ответ: $\boxed{l = 2\left(\dfrac{m+M}{m}\right)^2 \cdot \dfrac{u^2 tg\alpha}{g}.}$

Еще раз отметим, что первое уравнение системы – это и есть уравнение Мещерского.

Задача 4

(А.Л. Стасенко. Журнал «Квант», 1982 г., №4, стр. 31. См. также «Библиотечка КВАНТ», вып. 91. 2005 г. «Физические основы полёта».)

Капля, падающая в облаке с постоянным ускорением, растёт вследствие поглощения микрокапель на своём пути. Найти это ускорение, считая начальный размер капли пренебрежимо малым. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Изменение массы капли dm пропорционально числу частиц, с которыми она сталкивается, то есть находящимися в объёме

$$dV \sim r^2 v dt = r^2 a t dt.$$

С другой стороны, оно пропорционально изменению объёма капли

$$dV_к \sim r^2 dr.$$

Таким образом

$$r^2 dr \sim r^2 a t dt, \text{ откуда } r \sim t^2.$$

Тогда масса капли $m \sim r^3 \sim t^6$.

Пусть $m = At^6 (A = const)$.

Уравнение Мещерского в данном случае ($u = -v$) можно записать как

$$\frac{d(mv)}{dt} = mg,$$

или

$$\frac{d}{dt}(At^6 at) = At^6 g,$$

откуда $a = \dfrac{g}{7}$.