Альберт Леонидович Стасенко
Профессор кафедры общей физики

Присоединенная масса и гидродинамическая память

Жидкость – загадочное вещество во всех проявлениях – от мрачной истории Всемирного потопа до веселого ручья, от все сметающего цунами – до капельки, долбящей камень, … Да и газ не менее богат в своих движениях: ураганы, торнадо, …тихий шепот ласкающего бриза.

Физики сотни лет потратили на подтверждение эквивалентности инертной и тяготеющей масс; апофеоз – ОТО (общая теория относительности), но ускоренное движение тела в жидкости вызывает к жизни еще один вид массы – присоединенная!

Идея проста: чтобы переместить тело, окруженное жидкостью, в другое место, надо из этого места убрать саму жидкость. При этом, разумеется, жидкость должна занять освобожденный телом объем (рис. 1).

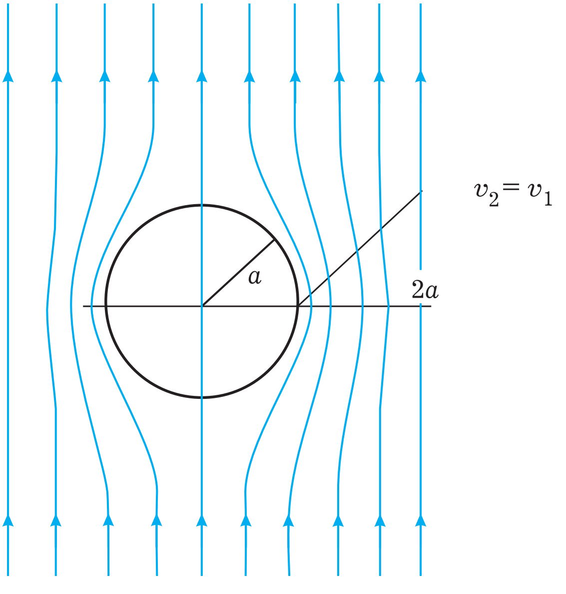

Рис. 1
К определению силы Стокса. Линии тока с точки зрения наблюдателя, «сидящего» на частице (подход Лагранжа, 1736–1813)

Об этом вполне разумно писал еще Тит Лукреций Кар (99–55 гг. до н. э.) в далеком 58–м году, обсуждая движение тел как в воде, так и воздухе:

«Так говорят, что вода, уступая чешуйчатым рыбам,
Путь им во влаге даёт, ибо сзади они оставляют
Место, где могут опять сливаться отшедшие струи;...
...коль два обширные тела, столкнувшись,
Быстро отскочат одно от другого, то воздух, конечно,
Должен всю ту пустоту захватить, что меж них получилась;
Но, и врываясь туда отовсюду стремительным током,
Всё-таки сразу всего заполнить пространства не сможет:
Он непременно займёт сначала ближайшее место...»

«О природе вещей» Книга первая Стихи 379-380

Таким образом, тело, ускоренно движущееся в окружающей среде, вынуждает вытеснять ее массу; значит, тело само становится как бы массивнее. Естественно назвать эту массу присоединённой. Понятно, что эта «присоединённая» масса тем больше, чем больше объем тела, вытесняющий эту массу, и чем больше плотность окружающей среды. Конечно, для капли воды или дробинки, падающих в воздухе, присоединённая масса пренебрежимо мала, поскольку их плотности различаются на три-четыре порядка. Но если это дирижабль, средняя плотность которого сравнима с плотностью воздуха, или подводная лодка? – тут уже явно присоединённая масса затруднит их «телодвижения» в среде. А для торможения раскрывающегося парашюта загребаемый им воздух только полезен.

Значит, в уравнении движения тела массы m в левой части уравнения второго закона Ньютона нужно написать:

$$m\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}+m'\frac{\mathrm{d}(v_1-v_2)}{\mathrm{d}t}=..., \qquad (1)$$

где (v_1-v_2) – скорость движения тела относительно невозмущенной среды, m' – присоединённая масса. Ясно, что при $v_1=v_2$ присоединенная масса не играет роли.

Здесь и далее индекс *1* – относится к движущемуся телу, *2* – к окружающей среде. Смысл правой части уравнения будет определён ниже.

Гидродинамики научились вычислять эту массу для различных тел. Например, для шара она равна

$$m'=\frac{1}{2}\frac{m}{\rho_1}\rho_2, \qquad (2)$$

то есть половине массы среды в объеме тела. Конечно, это смахивает на закон Архимеда, но надо помнить, что в рассматриваемом случае речь идет о переменном движении.

А что же написать в правой части уравнения (1)? Конечно, сумму всех действующих на тело сил. Ну, например, силу тяжести и ту же силу Архимеда Фидиевича (287–212 до н.э.):

$$F=mg\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right).$$

(Здесь положительное направление выбрано вертикально вверх.)

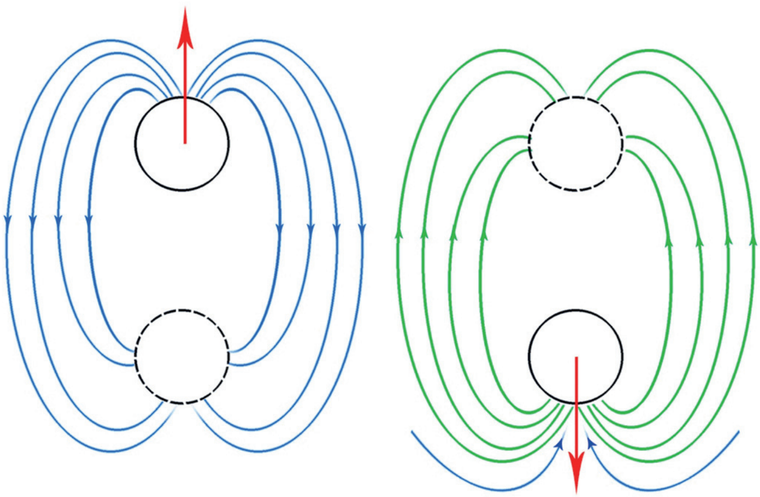

Рис. 2
Очень приблизительная картина линий тока окружающей жидкости, неподвижной «на бесконечности» (подход Эйлера, 1707–1783)

А еще силу сопротивления среды. При медленном движении шарика основную роль играет «сила трения», связанная с вязкостью среды и называемая силой Стокса (1819–1903).

Но что такое вязкость? Когда мы радостно потираем ладони, ощущаем силу сухого трения и выделение тепла. В случае с жидкостью сила тоже зависит от «трения» среды о поверхность твердого тела, причем она тем больше, чем резче изменяется скорость обтекания у поверхности. Эту степень «резкости» разумно характеризовать отношением $\frac{v_1 - v_2}{a}$, (a – радиус шарика). Тут-то на сцену и выступает коэффициент вязкости η, окончательно определяющий поверхностную плотность тангенциальной силы:

$$\tau = \frac{F}{S} = \eta\frac{|v_1 - v_2|}{a}, \quad \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

где S – площадь поперечного сечения.

Это закон Ньютона (1642–1727) вязкого трения. Отсюда видна и размерность $[\eta] = \frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}^2}$, что пригодится нам в дальнейшем.

Если это шарик, радиус которого a, для оценки полной силы сопротивления логично умножить τ на площадь его поверхности:

$$F_{\text{St}} \sim 4\pi a^2 \eta \frac{(v_1 - v_2)}{a},$$

Точное выражение для силы Стокса имеет вид:

$$F_{\text{St}} = -6\pi a\eta(v_1 - v_2),$$

так что наша оценка недалека от истины.

Подставим эту силу в правую часть (1). Заметим, что эта сила вязкого сопротивления действует на шарик и при установившемся движении.

Что же происходит в общем случае? На рис. 2 слева показан шарик, движущийся вверх, и линии тока окружающей жидкости (конечно, несжимаемой), спешащие занять освобожденное место.

Мы уже знаем, на сколько он «потяжелеет» за счет присоединенной массы. Но представьте себе, что ему захотелось вернуться на прежнее место (пунктир на рис. 2 справа), – например, в случае его вертикальных колебаний с периодом T. А в этом месте (внимание!) еще продолжается движение жидкости, вызванное ранее $\left(-\frac{T}{2}\right)$ тем же шариком и не успевающее полностью затухнуть – (остаточные линии тока от прежнего движения шарика на рис. 2 справа). И эти линии тока направлены против тех, которые теперь вызвал шарик, и добавляют ему более тонкий эффект: память (!) жидкости о недавнем прошлом! Причем не только о том, что было полпериода назад, а два, и три ... периода – в принципе, за всю историю движения шарика. Тут уже попахивает интегрированием по времени. Но, прежде чем мы реализуем это серьезное предупреждение, обсудим, от чего может зависеть эта «сила памяти» Бассе (1854–1930).

Ясно, что эта самая таинственная из сил должна тоже зависеть от плотности среды $\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ и вязкости $\eta, \frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}}$ (см. рис. 1). Значит, уже назревает $\sqrt{\rho\eta}, \frac{\text{кг}}{\text{м}^2\text{с}^{1/2}}$, поскольку «килограмм» массы входит в размерность любой силы. Конечно, тут должен войти и радиус шарика a, [м], и время t, [сек], – теперь легко определить их роль.

Наконец, осмелимся выписать все силы, действующие на тело в вязкой среде:

$$m\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}+m'\frac{\mathrm{d}(v_1-v_2)}{\mathrm{d}t}=$$

$$=-mg\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)-6\pi\eta a(v_1-v_2)-6a^2\sqrt{\pi\rho_2\eta}\int_{-\infty}^{t}\frac{\mathrm{d}(v_1-v_2)}{\mathrm{d}t'}\cdot\frac{\mathrm{d}t'}{\sqrt{t-t'}}.$$

Здесь нижний предел ($-\infty$) описывает всю предысторию жидкости до рассматриваемого момента времени t.

Разве это не чудо – гидродинамикам удалось сложнейший процесс взаимодействия тела с обтекающей жидкостью представить в виде суперпозиции отдельных слагаемых!

Конечно, движение обтекаемого тела не обязательно должно быть медленным; в общем случае силы его взаимодействия со средой будут описываться другими функциями.

А если кому что-нибудь не понятно, приглашаем на ФАЛТ МФТИ, – там всё объяснят...