



Михаил Юрьевич Замятин

Тьютор лаборатории по работе с одаренными детьми МФТИ,
член центральной предметно-методической комиссии по физике,
почетный работник общего образования РФ



Антон Юрьевич Вергунов

Преподаватель физики
«Физтех-лицея» им. П.Л.Капицы

Вариационные принципы механики. Метод виртуальных перемещений

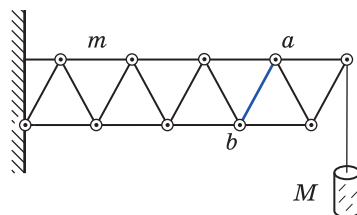
Энергетическими методами, рассматриваемыми в статье, можно существенно упростить решения задач статики, гидростатики, динамики и электростатики.

Обычно при исследовании равновесия систем пользуются двумя типами уравнений – равенством нулю векторной суммы сил, действующих на тела, которые входят в систему, и правилом моментов сил.

Это так называемый **силовой (невариационный) подход**. Чтобы записывать условия равновесия частей системы, приходится вводить внутренние силы (силы реакции связей). Чем больше таких связей в системе (нитей, стержней, блоков или шарниров), тем сложнее следить за возникающими в них силами.

Например, в изображенной на рисунке конструкции, состоящей из стержней массами m , совсем не просто определить даже направления

сил, действующих со стороны шарниров на выделенный цветом стержень ab , и еще сложнее найти их величины.



Итак, силовой подход неудобен, если неизвестны или неочевидны внутренние силы. Другим его недостатком порой становится необходимость решать систему из большого числа уравнений, а иногда и неизбежность применения сложного математического аппарата.

В подобных случаях на выручку приходят **энергетические (вариационные) принципы** (в частности метод виртуальных перемещений), преимущество которых в том, что они позволяют получать решения без учета внутренних сил, попросту не входящих в уравнения. Решения становятся

простыми, а иногда и очень изящными.

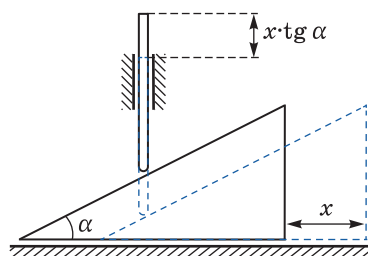
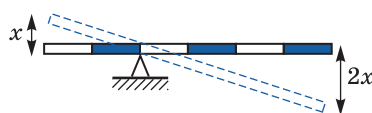
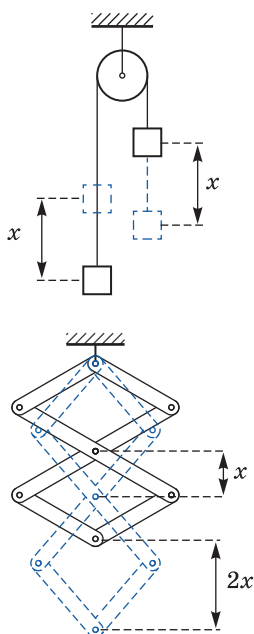
Идея энергетического подхода была сформулирована Иоганном Бернулли в 1717 г. в качестве нового способа решения статических задач. В дальнейшем вариационные принципы получили развитие в работах Даламбера и Лагранжа.

Работа внутренних сил

Связями называют ограничения, которые наложены на положение отдельных частей системы или на возможности их перемещения (нити, удерживающие груз; шарниры, соединяющие отдельные части меха-

низма; плоскости, на которых находятся тела системы, и т. п.).

Примеры систем со связями с указанием соотношений перемещений отдельных их частей приведены на рисунках:



В основе энергетического метода лежит замечательное свойство сил реакций связей — **их суммарная работа при малом смещении системы от положения равновесия равна нулю.**

Заметим, что это свойство выполняется только если внутри связей не действуют силы трения, то есть связи идеальные.

Уточним, что подразумевается под «малым отклонением» системы от положения равновесия.

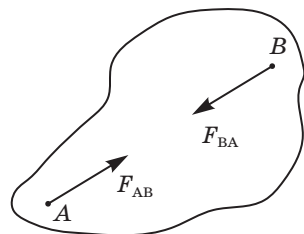
- Прежде всего перемещения не должны нарушать сами связи (нити не должны рваться, шарниры – ломаться и т.п.).

- Малость перемещений нужна для того, чтобы силы реакции можно было считать неизменными и чтобы существенно не изменялись углы, под которыми действуют силы реакции.

Такие перемещения называют возможными, или виртуальными. Их следует отличать от истинных перемещений, совершаемых под действием приложенных сил. Виртуальные перемещения не имеют отношения к процессу движения системы – они вводятся лишь для того, чтобы найти соотношения между силами и вывести условия равновесия.

Рассмотрим, какую работу выполняют силы идеальных связей на примере системы точек, образующих абсолютно твердое тело. Выделим какие-либо две точки A и B и обозначим силы реакции, действующие между ними, через $\vec{F}_{AB}$ и $\vec{F}_{BA}$ (первая из них приложена к точке A , вторая – к B).

Забудем на время обо всех остальных точках тела, кроме двух



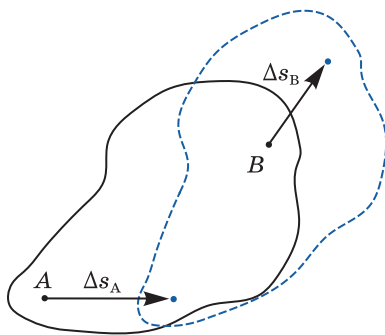
выделенных. Тогда у нас остается система двух материальных точек, соединенных невесомым жестким стержнем. По третьему закону Ньютона, $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$.

Мысленно сместим эти точки на $\Delta\vec{s}_A$ и $\Delta\vec{s}_B$ (см. рисунок а). Так как точка A не приближается и не удаляется от B , то можно считать, что $\Delta\vec{s}_A$ – общее для обеих точек поступательное перемещение твердого тела как целого, а $\Delta\vec{s}_B = \Delta\vec{s}_A + \Delta\vec{s}$, где $\Delta\vec{s}$ – перемещение, совершаемое при вращении точки B относительно точки A (см. рисунок б).

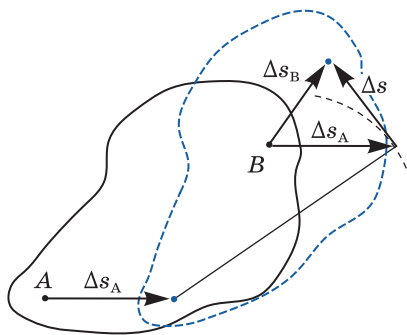
Полная работа сил реакции при этих виртуальных перемещениях равна:

$$A = (\vec{F}_{AB} \cdot \Delta\vec{s}_A) + (\vec{F}_{BA} \cdot \Delta\vec{s}_B) =$$

$$= ((\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA}) \cdot \Delta\vec{s}_A) + (\vec{F}_{BA} \cdot \Delta\vec{s}).$$



а



б

Первое слагаемое в правой части равенства равно нулю в силу третьего закона Ньютона. Равным нулю оказывается и второе слагаемое, так как перемещение $\Delta \vec{s}$, соответствующее вращению точки B относительно точки A , перпендикулярно силе $\vec{F}_{BA}$, направленной вдоль прямой, соединяющей точки A и B .

Работа внешних сил

Чтобы окончательно сформулировать энергетический принцип равновесия, остается рассмотреть виртуальную работу внешних сил. Заметим, что каждая приложенная к находящейся в равновесии системе внешняя сила должна уравновешиваться силой реакции, вызванной ею. Поэтому, если вычислить суммарную работу, совершаемую внешними силами и соответствующими им силами реакции связей при любом виртуальном перемещении, то она окажется равной нулю. Но внутренние силы реакции, как было показано выше, полной работы не совершают. Следовательно, при любом виртуальном перемещении полная работа внешних сил также должна быть равна нулю.

Аналогично равна нулю работа сил реакции и для любых других точек твердого тела. Таким образом, при виртуальном перемещении системы с идеальными связями полная работа всех внутренних сил оказывается равно нулю.

Итак, условие равновесия механической системы может быть сформулировано в виде (принцип виртуальных перемещений):

для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма работ всех действующих на систему внешних сил при любых виртуальных перемещениях системы была равна нулю.

Благодаря этому принципу для нахождения условий равновесия нет необходимости рассматривать большое число внутренних сил реакций связей. Достаточно выбрать удобные виртуальные перемещения, вычислить соответствующую им суммарную работу только внешних сил и приравнять ее нулю.

Применение метода виртуальных перемещений

Существуют некоторые признаки, которые указывают на то, что метод может упростить решение задачи:

- в системе возникает много внутренних сил;
- характер внутренних взаимодействий сложен или вообще неизвестен;
- легко устанавливается связь между работой внешних сил и изме-

нением потенциальной энергии системы, вызванной этой работой, при малом смещении системы из положения равновесия.

Как метод применяется на практике?

1. Сначала определяем внешние силы, способные удерживать систему/часть системы в положении равновесия.

2. Допускаем, что внешние силы незначительно смещают систему/часть системы, и рассчитываем работу (возможно, суммарную работу) внешних сил.

3. Приравниваем найденную работу изменению энергии системы. Так как внешние силы не разгоняют систему, то учитываем лишь изменение потенциальной энергии и записываем закон сохранения энергии:

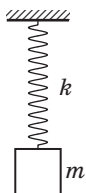
$$A_{\text{внеш}} + W_{\text{сист}1} = W_{\text{сист}2}$$

4. Сокращаем величину виртуального перемещения и находим внешние силы.

Проиллюстрируем применение метода виртуальных перемещений на примерах.

Задача 1

Найдите силу упругости пружины, к которой подвешен груз массой m .



К грузу приложены две внешние силы – сила упругости пружины F и сила тяжести mg . Мысленно сместим груз, находящийся в равновесии, на малую величину δx вниз. Знаком δ (строчная буква дельта) здесь и далее будем обозначать малое виртуальное изменение какой-либо величины и элементарные виртуальные работы.

Работа силы тяжести положительная и равна: $\delta A_1 = mg\delta x$, а работа силы упругости отрицательная: $\delta A_2 = -F\delta x$.

По принципу виртуальных перемещений, сумма работ обеих сил равна нулю:

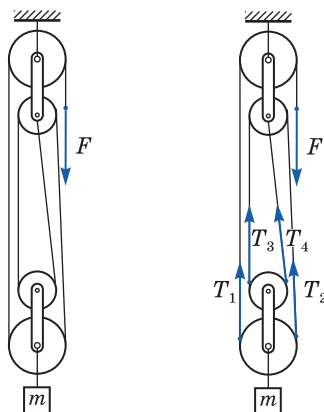
$$\delta A_1 + \delta A_2 = mg\delta x - F\delta x = 0,$$

откуда, сокращая δx , получаем ответ: $F = mg$.

Эту задачу, разумеется, проще решить обычным способом — используя условие равновесия тела, но на этом простом примере мы лишь демонстрируем суть метода.

Задача 2 (Лагранжа).

В системе, изображенной на рисунке, к нижнему блоку подвешен груз массой m . Какую минимальную силу надо приложить к свободному концу нити, чтобы удержать систему в равновесии? Нити нерастяжимы, блоки невесомы. Нити между блоками можно считать параллельными.



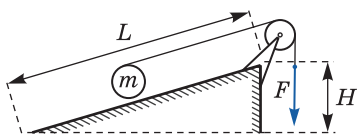
Пусть груз массой m переместится вертикально вверх на расстояние δh . При этом из-за нерастяжимости нити точка приложения силы F сместится вниз на расстояние $\delta H = 4\delta h$.

$$\delta A_1 + \delta A_2 = 0; \quad F\delta H - mg\delta h = 0.$$

Следовательно, $F = mg/4$.

Задача 3

На поверхности клина лежит однородный цилиндр массой m , на который намотана нить, перекинутая через блок (см. рисунок). Какую силу F следует прикладывать к нити для того, чтобы удерживать цилиндр? Длина наклонной поверхности клина равна L , а высота H . Проскальзывания между цилиндром и клином нет.



При смещении конца нити на δx центр цилиндра смещается на $\delta x/2$ (так как при движении без проскальзывания скорость верхней точки цилиндра всегда в два раза больше скорости его центра). Поэтому при смещении цилиндра на L конец нити опустится на $2L$. Центр цилиндра поднимется при этом на H . Запишем закон сохранения энергии для цилиндра:

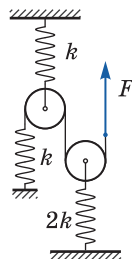
$$F2L = mgH, \text{ откуда } F = \frac{mgH}{2L}.$$

Заметим, что в решении не используются тригонометрические функции, и задача становится доступной для учеников 7–8-х классов.

Метод виртуальных перемещений можно применять не только для поиска сил, но и для расчета эквивалентной жесткости систем.

Задача 4

Нить, перекинутая через блок, изначально не натянута. К свободному концу нити прикладывают силу F . Определите эквивалентный коэффициент жесткости системы.



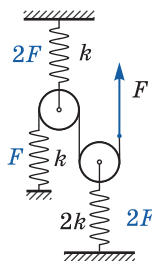
Жесткости отдельных пружин известны и указаны на рисунке.

В этой задаче легко проследить силы, действующие на разных участках системы. Приложим к концу нити силу F и тем самым увеличим энергию системы на величину $\frac{F^2}{2k_0}$.

Силы, возникающие в пружинах, найдем из условия равновесия элементов системы с учетом невесомости пружин, нитей и блоков (см. рисунок). Добавленная энергия запасется в пружинах, поэтому справедливо равенство:

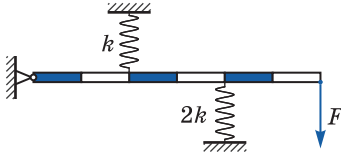
$$\frac{F^2}{2k_0} = \frac{4F^2}{4k} + \frac{4F^2}{2k} + \frac{F^2}{2k}.$$

$$\text{Откуда } k_0 = k/7.$$



Задача 5

Найдите эквивалентную жесткость системы. Внешняя сила прикладывается к ней в месте, обозначенном на рисунке стрелкой.



В отличие от предыдущего примера в данной системе легче найти связь смещений точек крепления пружин и точки приложения внешней виртуальной силы F . Пусть точка крепления верхней пружины при воздействии на систему опустится на x . Тогда из-за жесткости рычага точка крепления нижней пружины опустится на $2x$, а точка приложения силы F на $3x$.

Энергия, запасенная в системе, распределится в пружинах и будет справедливо равенство:

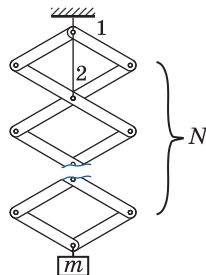
$$\frac{k_0(3x)^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{2k(2x)^2}{2}.$$

Откуда $k_0 = k$.

Из двух приведенных выше примеров видно, что в зависимости от ситуации для упрощения решения целесообразно применять разные формы записи энергии пружин.

Задача 6

Цепочка содержит N одинаковых невесомых звеньев из скрепленных шарнирно легких реек (см. рисунок). Пренебрегая трением, определите, какое натяжение должна выдерживать нить, соединяющая точки 1 и 2, если к цепочке подвесить груз массой m .



Пусть груз массой m опустился на δH . Работа силы тяжести будет равна: $\delta A_1 = mg\delta H$.

Работа силы натяжения:

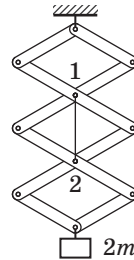
$$\delta A_2 = -T\delta h.$$

Величину δH найдем из соображений симметрии. Вертикальная диагональ каждого из звеньев удлинилась на δh , что равно виртуальному перемещению точки 2. Поэтому

$$mgN\delta h - T\delta h = 0, \text{ или } T = Nmg.$$

Задача 7

Система из трех одинаковых звеньев массой m каждое состоит из однородных стержней, соединенных шарнирно (см. рисунок). Пренебрегая трением, определите, какое натяжение должна выдерживать нить, соединяющая точки 1 и 2, если к системе подвесить груз массой $2m$.



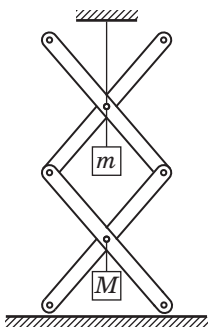
Мысленно разрежем удерживающую систему нить и к получившимся ее частям приложим силы T . Смещая концы разрезанной нити, уменьшим высоту верхнего ромба на δx . Тогда и остальные ромбы уменьшатся по высоте на δx . В результате груз поднимется на $3\delta x$, а центр масс конструкции на $3\delta x/2$. Запишем работу каждой из сил T и приравняем их сумму изменению потенциальной энергии груза:

$$\begin{aligned} -T\delta x + T2\delta x &= \\ &= 2mg3\delta x + 3mg3\delta x/2. \end{aligned}$$

$$\text{Окончательно } T = 21mg/2.$$

Задача 8

Шарнирная конструкция, состоящая из четырех легких одинаковых стержней, удерживается нитью, привязанной к потолку, и опирается на гладкую горизонтальную поверхность. Если к шарнирам, соединяющим центры стержней, подвесить грузы массами m и M , сила натяжения верхней нити окажется равной $T_1 = 30$ Н. При уменьшении массы верхнего груза вдвое сила натяжения нити уменьшится до $T_2 = 20$ Н. Определите массы грузов m и M и силы реакции N , действующие на конструкцию со стороны горизонтальной поверхности.



Применим метод виртуальных перемещений. Заметим, что точка крепления верхнего груза расположена на высоте втрое большей, чем точка крепления нижнего. Поэтому, если переместить нижний груз на δx , верхний переместится на $3\delta x$. При равновесии системы сумма работ внешних сил при любых малых перемещениях системы равна нулю. Тогда $3T\delta x - 3mg\delta x - Mg\delta x = 0$.

Преобразуем это уравнение

$$T_1 = mg + Mg/3.$$

Если изменить массу верхнего груза, получим

$$T_2 = mg/2 + Mg/3.$$

Решая систему, получим $m = 2$ кг, $M = 3$ кг.

Равновесие системы возможно, если

$$Mg + mg = T + 2N,$$

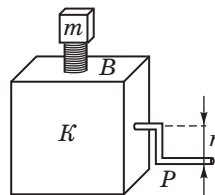
откуда

$$N = \frac{Mg + mg - T}{2} = \frac{30 + 20 - 30}{2} = 10 \text{ Н.}$$

В роли виртуального перемещения может выступать и угол.

Задача 9

В коробке K скрыт передающий механизм неизвестной конструкции (см. рисунок). При повороте ручки P вертикальный винт B плавно поднимает груз массой m . При одном полном обороте (радиус ручки r) винт поднимается на высоту h . Какую силу надо прикладывать к ручке, чтобы удерживать систему в равновесии?



Пусть искомая сила F при малом повороте на угол $\delta\varphi$ совершает работу

$$\delta A_1 = F\delta l = Fr\delta\varphi.$$

При этом груз массой m поднимается на высоту $\delta h = h\delta\varphi/(2\pi)$ и работа силы тяжести равна

$$\delta A_2 = -mgh\delta\varphi/(2\pi).$$

Тогда $\delta A_1 + \delta A_2 = 0$, или $F = mgh/(2\pi r)$.

Можно рассуждать немного иначе. Пусть рукоятка сделает полный оборот — груз при этом поднимется

на высоту h . Тогда будут совершены работы:

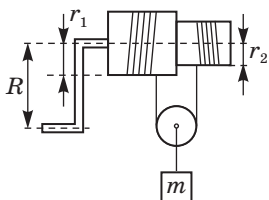
$$A_1 = 2\pi \cdot F \text{ и } A_2 = -mgh,$$

$$\text{откуда } F = mgh / (2\pi r).$$

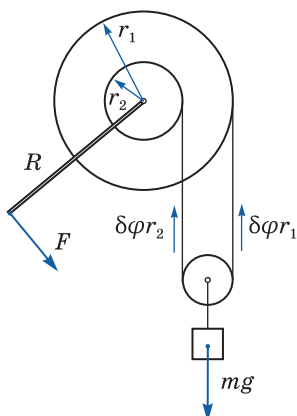
Заметим, что обычными силовыми методами задача вообще решена быть не может, так как ничего не известно о скрытом механизме передачи.

Задача 10

На рисунке изображен дифференциальный ворот. Определите, какую силу F нужно прикладывать к рукоятке, чтобы груз массой m оставался в равновесии. Вал имеет радиусы r_1 и r_2 , а рукоятка — R .



Рассмотрим перемещение на малый угол (поворачиваем на $\delta\varphi$ рукоятку, ворот поворачивается на такой же угол).



При этом перемещение конца рукоятки составит $\delta\varphi \cdot R$, левая нить укоротится на $\delta\varphi \cdot r_2$, правая — на $\delta\varphi r_1$.

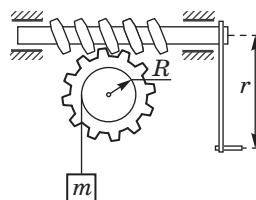
Тогда работа по перемещению рукоятки равна работе по подъему груза:

$$F \cdot \delta\varphi \cdot R = 0,5mg (\delta\varphi \cdot (r_1 + r_2)),$$

$$\text{откуда: } F = mg \cdot (r_1 + r_2) / (2R).$$

Задача 11

Определите, какую силу F необходимо прикладывать к рукоятке, чтобы удерживать систему в равновесии. Масса груза равна m . Радиус вала, на который намотан трос, и радиус рукоятки равны R и r соответственно.

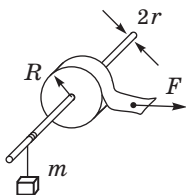


У шестеренки на рисунке 12 зубьев. Повернув ручку на полный оборот, мы повернем шестеренку на $1/12$ оборота — на один зуб. Тогда

$$F \cdot 2\pi r = mg \cdot \frac{2\pi R}{12}, \text{ и } F = mg \cdot \frac{R}{12r}.$$

Задача 12

На вал радиусом r прочно насажен моток скотча радиусом R . На этом же валу на нити висит груз массой m (см. рисунок). Если тянуть скотч с силой F , то груз будет подниматься с постоянной скоростью. С какой силой F_1 надо тянуть скотч, чтобы с той же скоростью поднимать груз массой $2m$?



Силы, возникающие в липком слое между витками ленты, с трудом поддаются описанию уравнениями статики. Поэтому применим энергетический подход. Действуя на скотч силой F , оторвем небольшой фрагмент длиной x . При этом работа силы F пойдет как на отрыв этого участка, так и на подъем груза на высоту h , которая находится из кинематической связи $x/R = h/r$. Т.е. справедливо равенство:

$Fx = \sigma x + mgh = \sigma x + mgxr/R$, здесь σ — работа, необходимая для отрыва единицы длины скотча.

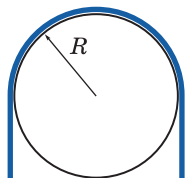
Запишем аналогичное уравнение для груза $2m$.

$$F_1 x = \sigma x + 2mgxr/R.$$

Вычитая из одного уравнения другое, получим $F_1 = F + mgr/R$.

Задача 13

На гладком блоке радиусом R висит однородный гибкий канат массой m и длиной l . Найдите максимальную силу натяжения каната.



Чем выше расположена точка каната, тем сильнее в ней натяжение так как канат весомый. Применим метод виртуальных перемещений.

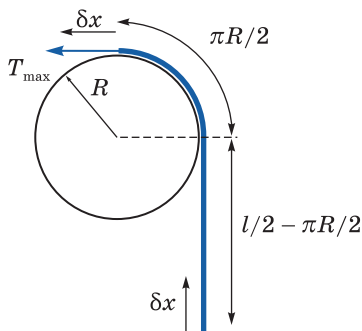
Для этого возьмем половину каната и сместим ее на малую величину δx .

Такое перемещение эквивалентно тому, как если бы мы взяли фрагмент длиной δx , отрезали его от каната снизу и переставили его к верхней части. Работа по такому перемещению фрагмента δx равна:

$$T_{\max} \cdot \delta x = \delta m g \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{\pi R}{2} + R \right).$$

Здесь δm — масса малого перемещаемого фрагмента, $\frac{l}{2} - \frac{\pi R}{2} + R$ — высота, на которую он переместился.

$$T_{\max} = \frac{\delta m g}{\delta x} \left(\frac{l}{2} - R \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right).$$



Так как канат однородный,

$$\frac{\delta m}{\delta x} = \frac{m}{l}.$$

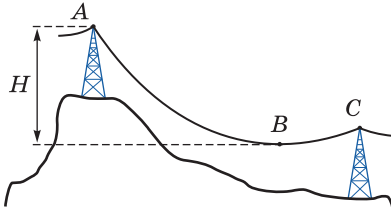
Поэтому

$$T_{\max} = \frac{mg}{l} \left(\frac{l}{2} - R \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right).$$

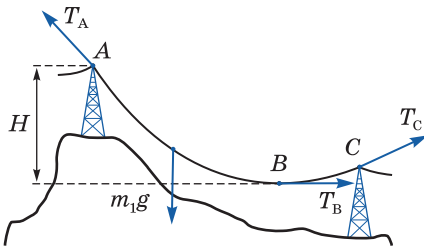
Заметим, что каждый малый фрагмент перемещается по дуге окружности, а силы реакции направлены по радиусам, то есть перпендикулярно перемещению фрагментов, и их работы равны нулю.

Задача 14

В горах проведена линия электропередачи. Масса провода между двумя опорами m , его длина L . Расстояние по вертикали между нижней точкой B провода и местом крепления его к верхней опоре в точке A равно H . Длина участка AB провода равна l . Найдите максимальную силу натяжения провода.



Опоры расположены не на одинаковой высоте, поэтому длина провода между точкой крепления к верхней опоре и нижней точкой не равна половине длины провода, но известна и равна l .



Возьмем малый фрагмент провода массой δm

$$\delta m = \frac{m}{L} \cdot \delta x$$

и переместим его из точки B в точку A .

Работа, которую мы совершим, равна изменению потенциальной энергии фрагмента:

$$\delta W = \delta m g \cdot (H_A - H_B) = mgH \delta x / L.$$

Эта же работа равна

$$T_A \delta x - T_B \delta x = (T_A - T_B) \delta x$$

$$mgH \delta x / L = (T_A - T_B) \delta x$$

$$T_A - T_B = mgH / L. \quad (*)$$

Силы T_A и T_B уравниваются силой $m_1 g = mgl / L$ (здесь m_1 — масса фрагмента AB). Следовательно, образуется прямоугольный треугольник сил и для него можно записать

$$T_A^2 - T_B^2 = \left(\frac{mgl}{L} \right)^2.$$

Перепишем:

$$(T_A - T_B)(T_A + T_B) = \left(\frac{mgl}{L} \right)^2.$$

Подставим разность сил:

$$\frac{mgH}{L} (T_A + T_B) = \left(\frac{mgl}{L} \right)^2.$$

Откуда

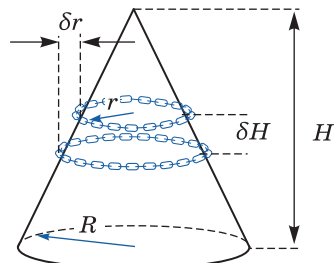
$$T_A + T_B = \frac{mgl^2}{HL}.$$

Складывая данное уравнение с

$$(*), \text{ получим: } T_A = \frac{mg}{2HL} (H^2 + l^2).$$

Задача 15

Петля из гибкой тяжелой цепи массой m надета на гладкий конус, высота которого H , а радиус основания R (см. рисунок). Цепь покоится в горизонтальной плоскости. Найдите силу T натяжения цепи.



Пусть радиус окружности, образованной цепью, равен r . Виртуально сместим цепь как единое целое вертикально вниз на расстояние δH . Уменьшение потенциальной энергии цепи при этом окажется равным $mg\delta H$. Радиус цепи при таком перемещении увеличился на δr . Увеличение радиуса цепи и ее смещение связаны соотношением:

$$\delta r / \delta H = R / H$$

Работа сил натяжения T при рассматриваемом виртуальном перемещении цепи равна:

$$\delta A_1 = -(2\pi(r + \delta r) - 2\pi r)T = -2\pi \cdot \delta r T.$$

Сила тяжести при этом совершит работу:

$$\delta A_2 = mg \cdot \delta H.$$

Из принципа виртуальных перемещений

$$\delta A_1 + \delta A_2 = -2\pi \cdot \delta r T + mg \cdot \delta H = 0.$$

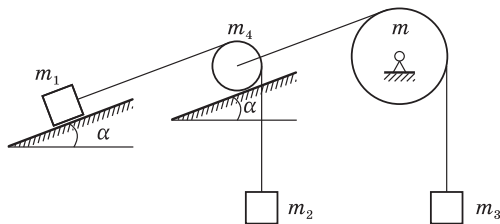
Находим

$$T = \frac{mg}{2\pi} \frac{\delta H}{\delta r} = \frac{mgH}{2\pi R}.$$

Задача 16

Через блок массой m переброшена нить, к концам которой привязаны груз массой m_3 и гладкий массивный цилиндр массой m_4 , лежащий на гладкой наклонной плоскости (см. рисунок). Через цилиндр переброшена нить, к концам которой привязаны груз массой m_2 и груз массой m_1 , лежащий на параллельной гладкой плоскости. Определите массу груза m_3 и угол α наклона плоскости с горизонтом, если система находится в равновесии. Нити считайте невесомыми и нерастяжимыми.

Для нахождения угла наклона плоскости α сместим груз m_2 на малое расстояние δr_2 вниз. При этом



груз m_3 и цилиндр m_4 останутся на месте, а груз m_1 переместится на расстояние δr_1 параллельно наклонной плоскости вверх.

Воспользуемся методом виртуальных перемещений:

$$m_2 g \delta r_2 - m_1 g \delta r_1 \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$\sin \alpha = \frac{m_2}{m_1}.$$

Для нахождения массы груза m_3 сместим груз m_3 на малое расстояние δr_3 вниз. При этом грузы m_2 и m_1 по отношению к цилиндру останутся в покое, а цилиндр вместе с прикрепленными к нему грузами переместится на расстояние δr_3 параллельно наклонной плоскости вверх.

Воспользуемся методом виртуальных перемещений:

$$m_2 g \delta r_3 - m_4 g \delta r_3 \sin \alpha - m_2 g \delta r_3 \sin \alpha - m_1 g \delta r_3 \sin \alpha = 0,$$

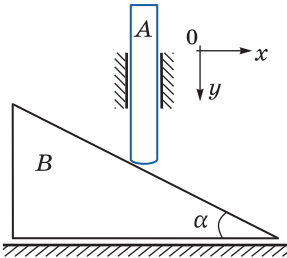
откуда

$$\begin{aligned} m_3 &= (m_1 + m_2 + m_4) \sin \alpha = \\ &= (m_1 + m_2 + m_4) \frac{m_2}{m_1}. \end{aligned}$$

Задача 17

Штифт A массой m может скользить в гладких вертикальных направляющих, опираясь своим нижним концом на гладкую поверхность

клина B , составляющую угол α с горизонтом. Клин может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Масса клина M . Найдите его ускорение.



Штифт и клин движутся поступательно. Между их перемещениями δx и δy , скоростями и ускорениями a_x и a_y существуют соотношения:

$$\delta y = \operatorname{tg} \alpha \cdot \delta x, \quad v_y = \operatorname{tg} \alpha \cdot v_x,$$

$$a_y = \operatorname{tg} \alpha \cdot a_x.$$

Приравняем нулю сумму работ всех сил на виртуальном перемещении клина δx и получим:

$$N_y \delta y - N_x \delta x = 0,$$

где по второму закону Ньютона

$$N_y = mg - ma_y; \quad N_x = Ma_x.$$

$$\text{Тогда } (mg - ma_y) \delta y - Ma_x \delta x = 0,$$

$$\text{или } (mg - m \operatorname{tg} \alpha \cdot a_x) \operatorname{tg} \alpha \cdot \delta x - Ma_x \delta x = 0.$$

Откуда

$$a_x = \frac{mg \operatorname{tg} \alpha}{M + m \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Метод виртуальных перемещений успешно применяется не только в механике, но и при решении задач молекулярной физики и электростатики.

Задача 18

Чему равно избыточное давление внутри сферического мыльного

пузыря радиусом r , если коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора равен σ ?

Пусть мыльный пузырь радиусом r находится в равновесии. Мысленно увеличим его радиус на δr . Тогда суммарная виртуальная работа сил избыточного давления будет равна $\delta A_1 = 4\pi r^2 p_{\text{изб}} \delta r$ (сила избыточного давления на каждом участке направлена по нормали к поверхности пузыря).

С другой стороны, виртуальная работа сил поверхностного натяжения равна изменению поверхностной энергии:

$$\delta A_2 = 2\sigma \cdot 4\pi(r^2 - (r + \delta r)^2) = -16\pi\sigma r \delta r$$

(здесь учтено, что у мыльного пузыря две поверхности и сделано пренебрежение квадратом малой величины δr).

По принципу виртуальных перемещений:

$$\delta A_1 + \delta A_2 = 4\pi r^2 p_{\text{изб}} \delta r - 16\pi\sigma r \delta r = 0.$$

$$\text{Откуда } p_{\text{изб}} = \frac{4\sigma}{r}.$$

Задача 19

Электрический заряд Q равномерно распределен по тонкой жесткой металлической сфере радиусом R . Какая сила F действует на единицу площади поверхности со стороны остального заряда?

По условию сфера жесткая, поэтому ее радиус R изменяться не может. Однако представим себе, что в результате отталкивания одноименных электрических зарядов радиус сферы чуть-чуть увеличился на бесконечно малую величину δR , и каждая точка сферы совершила бесконечно малое перемещение δR в

направлении, перпендикулярном поверхности.

Потенциал поверхности сферы связан с ее зарядом соотношением $\varphi = Q / 4\pi\epsilon_0\epsilon R$. С другой стороны, согласно определению емкости $\varphi = Q / C$. Поэтому для заряженной сферы емкость равна $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R$, а энергия $W = Q^2 / 2C = Q^2 / 8\pi\epsilon_0\epsilon R$.

При увеличении радиуса энергия уменьшается до

$$W' = Q^2 / 8\pi\epsilon_0\epsilon(R + \delta R).$$

Таким образом, изменение энергии оказывается равным

$$\Delta W = W - W' = \frac{Q^2 \cdot \delta R}{8\pi\epsilon_0\epsilon R(R + \delta R)}.$$

По закону сохранения энергии, это изменение равно суммарной работе δA сил электростатического отталкивания, действующих между отдельными элементами заряженной поверхности.

Если F — сила, действующая на единицу площади сферы, то $\delta A = 4\pi R^2 F \cdot \delta R$. Следовательно,

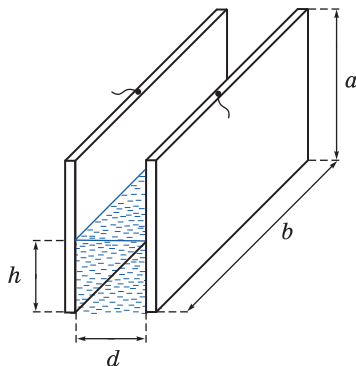
$$4\pi R^2 F \cdot \delta R = \frac{Q^2 \cdot \delta R}{8\pi\epsilon_0\epsilon R(R + \delta R)}.$$

Учитывая, что $\delta R \ll R$, находим

$$F = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0\epsilon R^4}.$$

Задача 20

Жидкость плотностью ρ с диэлектрической проницаемостью ϵ налита в большой сосуд. Две расположенные вертикально параллельные пластины касаются ее поверхности (см. рисунок). Расстояние между пластинами d . Найдите установившуюся равновесную высоту h столба жидкости между пластинами



после того, как их подсоединят к источнику с разностью потенциалов U .

Рассмотрим систему в состоянии равновесия. Пусть размеры пластин a и b . Предположим, что столб жидкости виртуально смещается по высоте вверх на δh . Тогда работа силы тяжести $\delta A_1 = -mg \cdot \frac{\delta h}{2} = -\rho g h b d \cdot \frac{\delta h}{2}$.

Изменением массы столба жидкости из-за «втягивания» жидкости из сосуда в пространство между пластинами мы пренебрегаем, поскольку соответствующая работа силы тяжести по поднятию этой массы на высоту δh пропорциональна $(\delta h)^2$.

Работа сил электрического поля равна изменению энергии δW конденсатора, образованного пластинами, при виртуальном изменении высоты столба жидкости на δh :

$$\delta A_2 = \delta W = \delta \frac{CU^2}{2} = \frac{U^2}{2} \cdot \delta C \quad (\text{так как}$$

$U = \text{const})$.

Рассматривая заполненную и не заполненную части конденсатора как два конденсатора, соединенных параллельно, получим выражение:

$$C = \frac{\epsilon_0 S_1}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon S_2}{d} = \frac{\epsilon_0 (a-h)b}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon h b}{d} = \frac{\epsilon_0 a b}{d} + \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) h b}{d}.$$

Следовательно,

$$\delta C = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)b \cdot \delta h}{d}.$$

Таким образом,

$$\delta A_2 = \frac{\varepsilon_0 U^2(\varepsilon - 1)b \cdot \delta h}{2d}.$$

Применяя принцип виртуальных перемещений, получим:

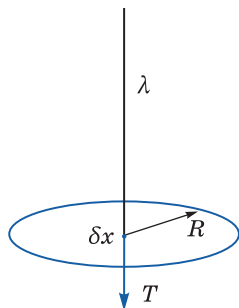
$$\frac{\varepsilon_0 U^2(\varepsilon - 1)b \cdot \delta h}{2d} - \rho g h d b \cdot \frac{\delta h}{2} = 0.$$

Откуда

$$h = \frac{\varepsilon_0 U^2(\varepsilon - 1)}{\rho g d^2}.$$

Задача 21

Система состоит из тонкого заряженного проволочного кольца радиусом R и очень длинной равномерно заряженной нити, которая удерживается вдоль оси кольца так, что один из ее концов совпадает с центром кольца. Последнее обладает



зарядом Q . На единицу длины нити приходится заряд λ . Найдите силу взаимодействия кольца и нити.

Пусть к нижнему концу нити приложена сила T , удерживающая ее в равновесии. Эта сила равна силе, с которой нить отталкивается от кольца. Виртуально сместим нить вниз вдоль оси кольца на небольшое расстояние δx . Работа по этому перемещению будет равна изменению потенциальной энергии взаимодействия нити и кольца: $T \cdot \delta x = \delta W_{\text{п}}$.

Можно считать, что в целом нить не изменила своего положения в пространстве, но из бесконечности к центру кольца переместился небольшой фрагмент нити с зарядом $\delta q = \lambda \delta x$.

Тогда изменение потенциальной энергии системы равно $\delta W_{\text{п}} = \delta q \frac{kQ}{R} = \frac{kQ\lambda \delta x}{R}$, откуда сила взаимодействия равна:

$$T = \frac{kQ\lambda}{R}.$$

Задачи для самостоятельного решения

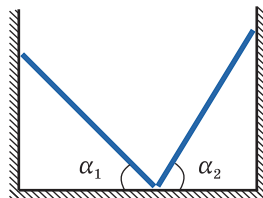
Задача 22

Решите задачу 6, считая, что все рейки однородные и масса самой конструкции так же равна m .

Задача 23

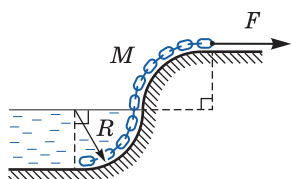
Два однородных стержня массами m_1 и m_2 опираются на гладкие вертикальные стенки и гладкую горизонтальную поверхность (см. рисунок). Найдите соотношение

между углами α_1 и α_2 при равновесии системы.



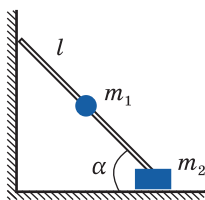
Задача 24

На гладкой поверхности лежит тонкая массивная цепочка массой M (см. рисунок). Нижняя половина цепочки находится в жидкости с плотностью втрое меньше плотности материала цепочки. Поверхность состоит из двух частей, представляющих из себя четверти окружности одинакового радиуса. Какую силу F необходимо прикладывать к верхнему концу цепочки, чтобы она не скользила?



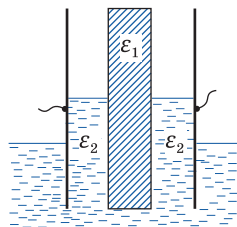
Задача 25

Легкий стержень, на середине которого закреплен груз массой m_1 , одним концом скользит по вертикальной стене, а другим прикреплен шарнирно к ползуну массой m_2 , движущемуся горизонтально (см. рисунок). Найдите ускорение ползуна в начальный момент, когда стержень составляет угол α с горизонтом.



Задача 26

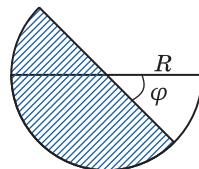
Между пластинами плоского воздушного конденсатора помещена диэлектрическая пластина толщи-



ной l_2 с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 (см. рисунок). Конденсатор частично погружен в жидкость с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 и плотностью ρ . Пренебрегая капиллярными явлениями, найдите высоту h уровня жидкости в конденсаторе, если между его обкладками поддерживается разность потенциалов U . Суммарная ширина столбов жидкости в конденсаторе равна l_1 .

Задача 27

Конденсатор переменной емкости состоит из двух неподвижных металлических пластин, расположенных на расстоянии d друг от друга, и подвижной диэлектрической пластины, которая может поворачиваться и входить в зазор между неподвижными (см. рисунок). Все пластины имеют форму полукруга радиусом R , причем зазоры между диэлектрической пластиной и пластинами конденсатора пренебрежимо малы по сравнению с d . Найдите силу F , действующую на подвижную пластину, когда она выведена из положения равновесия. Конденсатор подключен к источнику с разностью потенциалов U . Диэлектрическая проницаемость подвижной пластины ϵ .



Ответы

$$22. T = \frac{3}{2} Nmg;$$

$$23. \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{m_1}{m_2};$$

$$24. F = \frac{7}{3\pi} Mg;$$

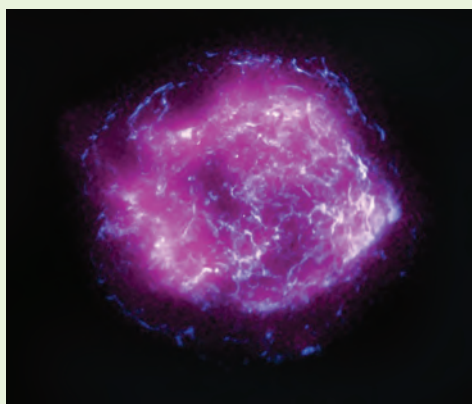
$$25. a = \frac{m_1 g \sin 2\alpha}{m_1 + 4m_2 \sin^2 \alpha};$$

$$26. h = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1^2 (\varepsilon_2 - 1) U^2}{\rho g (\varepsilon_1 l_1 + l_2) (\varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_2 l_2)};$$

$$27. F = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) U^2 R}{2d}.$$

НОВОСТИ

Рентгеновский космический телескоп IXPE прислал первый снимок



*Рентгеновское изображение
Кассиопеи А по данным телескопов
IXPE (пурпурный цвет) и «Чандра»
(синий цвет)
NASA / CXC / SAO / IXPE*

Новая рентгеновская космическая обсерватория IXPE передала на Землю первые научные данные, благодаря которым астрономы построили карту интенсивности рентгеновского излучения от остатка сверхновой Кассиопея А. Ожидается, что вскоре ученые впервые создадут благодаря телескопу карту поляризации рентгеновского излучения от туманности, сообщается на сайте NASA.

IXPE (Imaging X-ray Polarimetry Explorer) была запущена в космос в конце прошлого года и работает на околоземной орбите высотой 600 километров. Задачей обсерватории является измерения поляризации рентгеновского излучения от пульсаров, магнитаров, плерионов, двойных систем с черными дырами, активных

ядер галактик, квазаров и остатков сверхновых. Таким образом, астрофизики хотят узнать больше о процессах, связанных с подобными объектами.

Первой целью наблюдений IXPE стала Кассиопея А — остаток от взрыва массивной звезды (примерно в 16 раз тяжелее Солнца), который находится на расстоянии в 11 тысяч световых лет от Земли. Свет от взрыва дошел до нас около 325 лет назад. Размер расширяющейся туманности на сегодняшний день оценивается в десять световых лет, в ее центре находится нейтронная звезда. Кстати, Кассиопея А была и первой целью для рентгеновского телескопа «Чандра».

Продолжение: <https://nplus1.ru/news/2022/02/15/ixpe-first-photo>