Мычка Евгений Юрьевич
Кандидат физико-математических наук ведущий научный сотрудник кафедры общей топологии и геометрии механико-математического факультета МГУ. Выпускник СУНЦ МГУ 2002 года.

Расчёт электрических цепей

1. Хорошо известно, что при *последовательном соединении* сопротивление r цепи равно сумме входящих в неё сопротивлений:

$$r = r_1 + r_2 + \ldots + r_n, \qquad (1)$$

а при *параллельном соединении* – рассчитывается из формулы

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n}. \qquad (2)$$

Однако, не всякую электрическую цепь удаётся рассчитать с помощью этих формул. Простейшим примером такой цепи служит *мостиковая схема*, изображённая на рисунке 1.

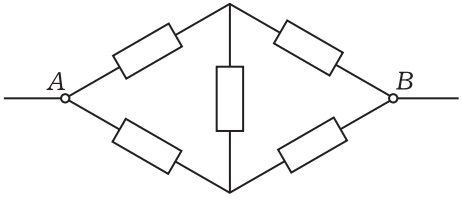

Рис. 1

Для того, чтобы её рассчитать, рассмотрим более сложные соединения.

Соединения, изображённые на рисунке 2, называются *«треугольник»* и *«звезда»*.

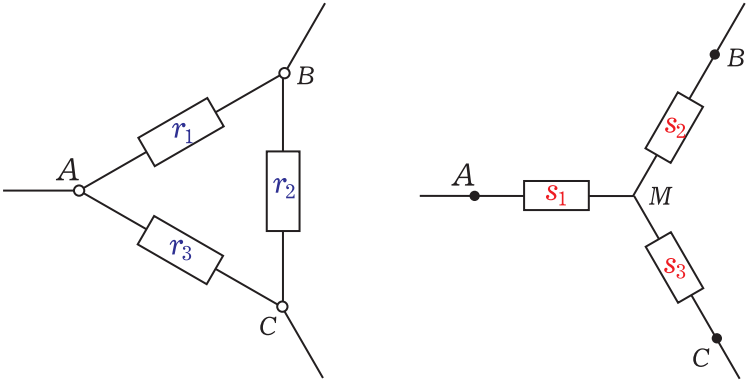

Рис. 2

Предположим, что в некоторой электрической цепи удалось выделить участок, образующий соединение «треугольник». Обозначим сопротивления, участвующие в «треугольнике», через r_1, r_2 и r_3. Мы хотим определить такие сопротивления s_1, s_2, s_3, образующие соединение «звезда», чтобы «треугольник» можно было бы заменить на «звезду». При этом все токи и напряжения вне заменяемого участка должны остаться без изменения. Другими словами, мы хотим заменить «треугольник» на «звезду» так, чтобы электрическая цепь «не заметила» бы замены.

Запишем закон Ома на участках AB, BC и CA: $U_{AB} = r_1 \cdot I_{r_1}$, $U_{BC} = r_2 \cdot I_{r_2}$, и $U_{AC} = r_3 \cdot I_{r_3}$. Напряжение U_{AC}, посчитанное вдоль пути $A-B-C$, даст равенство $U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$. Выразим напряжение U_{AM} через напряжения U_{AB} и U_{AC} двумя разными способами:

$$U_{AM} = s_1 \cdot (I_{r_1} + I_{r_3}) =$$

$$= \frac{s_1}{r_1} \cdot U_{AB} + \frac{s_1}{r_3} \cdot U_{AC}; \qquad (*)$$

$$U_{AM} = U_{AC} - U_{MC} = U_{AC} - s_3 \cdot (I_{r_2} + I_{r_3}) =$$

$$= U_{AC} - \frac{s_3}{r_2} \cdot U_{BC} - \frac{s_3}{r_3} \cdot U_{AC} =$$

$$= U_{AC} - \frac{s_3}{r_2} \cdot (U_{AC} - U_{AB}) - \frac{s_3}{r_3} \cdot U_{AC} =$$

$$= \frac{s_3}{r_2} \cdot U_{AB} + (1 - \frac{s_3}{r_2} - \frac{s_3}{r_3}) \cdot U_{AC}. \qquad (**)$$

Формулы (*) и (**) должны совпадать при любых значениях U_{AB} и U_{AC}, поэтому должны совпадать и коэффициенты при U_{AB} и U_{AC}, т. е. $\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_3}{r_1}$ и $\frac{s_1}{r_3} = 1 - \frac{s_3}{r_2} - \frac{s_3}{r_3}$. Решая эту систему мы сможем выразить s_1 и s_3 через r_1, r_2 и r_3. Аналогичным способом можно выразить и s_2 через r_1, r_2 и r_3. В итоге, формулы для s_1, s_2 и s_3 окажутся следующими:

$$s_1 = \frac{r_3 r_1}{r_1 + r_2 + r_3}; \quad s_2 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3};$$

$$s_3 = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}. \qquad (3')$$

Полученные формулы позволяют заменять «треугольник» на «звезду». Чтобы заменять «звезду» на «треугольник», нам потребуется выразить r_1, r_2, r_3 через s_1, s_2, s_3. Для этого заметим, что

$$r \cdot \frac{s_1 s_2}{s_3} = r_1^2; \quad r \cdot \frac{s_2 s_3}{s_1} = r_2^2; \quad r \cdot \frac{s_3 s_1}{s_2} = r_3^2,$$

где $r = r_1 + r_2 + r_3$. Если извлечь корень и затем сложить все уравнения, то получится выражение $\sqrt{r}$ через s_1, s_2, s_3:

$$\sqrt{r} = \sqrt{\frac{s_1 s_2}{s_3}} + \sqrt{\frac{s_2 s_3}{s_1}} + \sqrt{\frac{s_3 s_1}{s_2}}.$$

С помощью него мы получаем требуемые выражения:

$$r_1 = s_1 + s_2 + \frac{s_1 s_2}{s_3}; \quad r_2 = s_2 + s_3 + \frac{s_2 s_3}{s_1};$$

$$r_3 = s_3 + s_1 + \frac{s_3 s_1}{s_2}. \qquad (3'')$$

Формулы (1) и (2) позволяют «удалять» в цепи кратные рёбра и узлы, кратности два. Замены, соответствующие таким «удалениям», назовём *правилами (1) и (2)*. Замены «треугольника» на «звезду» и наоборот, осуществляемые формулами (3') и (3''), назовём *правилом (3)*.

Теперь мы готовы к расчёту мостиковой схемы. На рисунке 3 показано как рассчитать мостиковую схему на конкретном числовом примере.

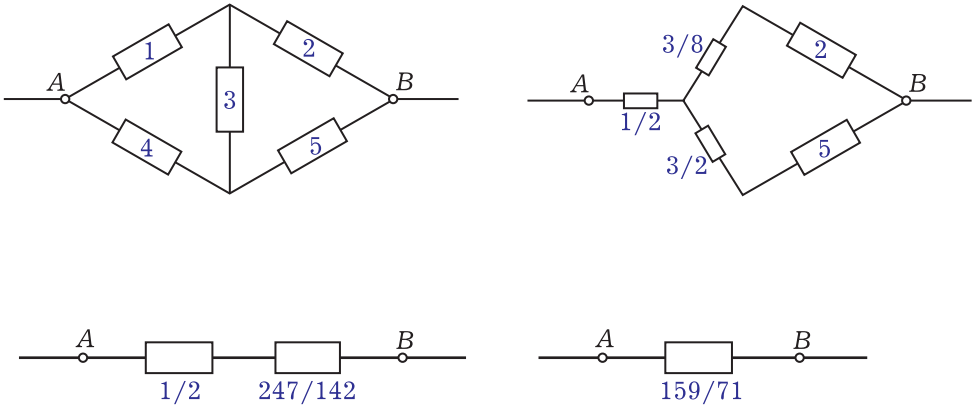

Рис. 3

Сначала мы применяем формулу (3') к «треугольнику» с сопротивлениями 1, 3, 4. Затем мы вычисляем с помощью формул (1) и (2) участок цепи с сопротивлениями $\frac{3}{8}$, 2, $\frac{3}{2}$, 5, после чего ещё раз применяем формулу (1).

2. Не всякую электрическую цепь возможно рассчитать, применяя правила (1), (2) и (3). Рассмотрим, например, электрическую цепь C, граф которой образуют рёбра куба и его внутренние диагонали (при этом провода, соответствующие внутренним диагоналям куба, не пересекаются). Сопротивление между диагонально противоположными вершинами куба невозможно рассчитать с помощью правил (1), (2) и (3). Причина невозможности заключается в том, что в такой цепи кратность каждого узла больше трёх, нет кратных рёбер и нет ни одного треугольного контура. Другими словами, просто нет возможности применить правило (1), (2) или (3) ни к одному из участков цепи.

А какие цепи можно рассчитать с помощью правил (1), (2) и (3)? Обратим внимание на то, что граф цепи C нельзя изобразить на плоскости без пересечения рёбер. В теории графов хорошо известно такое понятие как *плоские* графы: это такие графы, которые можно изобразить на плоскости без пересечения рёбер. В соответствие с этим назовём цепь *плоской*, если её граф является плоским. Зададимся вопросом:

Всякую ли плоскую цепь можно рассчитать с помощью правил (1), (2) и (3)?

Мы не знаем ответа и предлагаем школьникам самостоятельно начать исследование в этом направлении. Заметим лишь, что в отличие от цепи C, в плоской цепи всегда найдётся участок, к которому можно применить правило (1), (2) или (3). Действительно, обозначим через B_k и Γ_k количество вершин, из которых выходит ровно k рёбер, и количество граней, у которых ровно k сторон. Из равенств

$$2B_2 + 3B_3 + 4B_4 + \ldots = 2P =$$

$$= 2\Gamma_2 + 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + \ldots$$

следуют неравенства

$$4B - 2P \le 2B_2 + B_3$$

и $4\Gamma - 2P \le 2\Gamma_2 + \Gamma_3$,

а из формулы Эйлера $B - P + \Gamma = 2$ получаем неравенство

$$2\Gamma_2 + 2B_2 + \Gamma_3 + B_3 \ge 8.$$

Последнее неравенство и показывает, что в плоской цепи непременно найдётся участок, к которому можно применить правило (1), (2) или (3).

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Физики МГУ предложили новый механизм для создания спиновых лазеров

Сотрудники НОШ МГУ «Фотоника» предложили механизм сверхбыстрого переключения поляризации для фотолюминесценции в гибридных полупроводниковых системах. Результаты работы открывают возможность эффективного и быстрого управления спиновой поляризацией и поляризацией фотолюминесценции, что в перспективе может способствовать созданию новых быстродействующих устройств с низким энергопотреблением и тепловыделением. Исследование представляет значительный интерес для такой области физики твердого тела, как спинтроника и, в частности, для применения при создании спиновых лазеров. Результаты работы опубликованы в журнале Physica E: Low dimensional systems and nanostructures.

Спиновая транспортная электроника (спинтроника) — одна из самых молодых областей физики, задача которой состоит в поиске фундаментальных решений для создания быстродействующих устройств с низким энергопотреблением и тепловыделением.

Учёные МГУ совместно с коллегами из России (ФТИ им. А.Ф. Иоффе и ФИАН) и Финляндии (Университет города Лаппеенранта) предложили теоретическую модель, позволяющую описать возникновение динамической спиновой поляризации в гибридной полупроводниковой структуре квантовая яма — коррелированное примесное состояние и предложили механизм сверхбыстрого переключения поляризации фотолюминесценции, основанный на модуляции прозрачности туннельного барьера между квантовой ямой и примесным состоянием в результате приложения внешнего напряжения.

Предложенный механизм можно рассматривать в качестве одного из альтернативных методов для модуляции спиновой поляризации носителей для спиновых лазеров вместо традиционной импульсной оптической пикосекундной спиновой инжекции.

Источник: https://www.msu.ru/science/main_themes/