Михаил Юрьевич Замятнин
Почетный работник общего образования РФ, тьютор лаборатории по работе с одаренными детьми МФТИ, член центральной предметно-методической комиссии по физике.

Максим Сергеевич Клепиков
Преподаватель физики и заведующий лабораторией экспериментальной физики «Физтех-лицея» им. П.Л. Капицы.

Уймин Андрей Иванович
Студент ФОПФ МФТИ.

Геометрические методы решения задач кинематики

В статье рассматривается прием решения задач кинематики криволинейного равноускоренного движения с использованием векторных треугольников. О таком подходе уже были наши публикации в журнале «Потенциал», но в данной статье предложено дальнейшее его развитие.

Траектория тела при криволинейном равноускоренном движении

В случае, если вектор начальной скорости и вектор ускорения тела при равноускоренном движении не направлены вдоль одной прямой, движение происходит по криволинейной траектории. В этом случае уравнения координат по осям, направленным вдоль и перпендикулярно ускорению (см. рис. 1) имеют вид:

$$x = v_0 \cos\alpha t \qquad (1)$$

$$y = -v_0 \sin\alpha t + \frac{a}{2}t^2 \qquad (2)$$

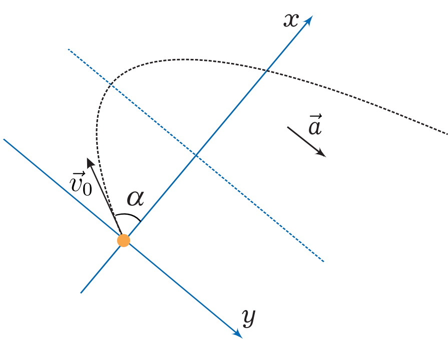


Рис. 1

Выражая время из уравнения (1) и подставляя его в (2), с учетом тригонометрического соотношения $\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+tg^2\alpha$, получим:

$$y(x)=-x*tg\alpha+\frac{gx^2}{2v_0^2}(1+tg^2\alpha) \qquad (3)$$

Это уравнение параболы, ось симметрии которой параллельна оси y. Использование свойства симметрии параболы в ряде случаев может упростить расчеты, например, при определении направлений векторов скоростей или времен движения на отдельных ее участках.

Геометрический подход в задачах кинематики равноускоренного движения

При описании равноускоренного движения в ряде случаев оказывается целесообразным не прибегать к проецированию уравнений на оси, с последующим решением громоздких систем, а работать непосредственно с векторными уравнениями, визуализируя их в виде векторных треугольников или многоугольников. Это позволяет использовать известные свойства геометрических фигур и готовые геометрические законы и теоремы.

Векторные уравнения, встречающиеся в кинематике равноускоренного движения, вследствие правила сложения векторов, по сути – векторные треугольники.

$$\vec{s}=\vec{v}_0t+\vec{a}\frac{t^2}{2} \qquad (4)$$

$$\vec{s}=\vec{v}t-\vec{a}\frac{t^2}{2} \qquad (5)$$

$$\vec{s}=\frac{\vec{v}_0+\vec{v}}{2}t \qquad (6)$$

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t \qquad (7)$$

В первых трех векторных равенствах все слагаемые имеют размерность длины, поэтому такие треугольники логично назвать **треугольниками перемещений**, а в уравнении (7) все слагаемые – скорости, такой треугольник назовем – **треугольником скоростей**.

Покажем, как работает геометрический подход при решении задач кинематики.

Пример 1

Облетая грозовые тучи, самолет, летящий на восток со скоростью v_0 = 134 м/с, сделал несколько маневров. Сначала он некоторое время τ двигался с ускорением a, направленным на юг, в результате чего его скорость выросла до $\sqrt{2}v_0$. Затем летел еще время τ с таким же ускорением a, направленным на восток. И на третьем маневре, он двигался, тоже в течение времени τ, с ускорением $2a$, но направленным на север. Какой стала скорость самолета, и под каким углом к курсу на восток она направлена после завершения маневрирования?

Возможное решение

Скорости самолета после всех маневров могут быть найдены путем последовательного применения уравнения $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t$ для всех трех этапов полета, что можно изобразить в виде векторного многоугольника (рис. 2).

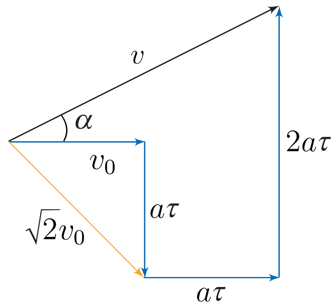


Рис. 2

Так как после первого маневра скорость стала $\sqrt{2}v_0$, из теоремы Пифагора получим, что $v_0 = a\tau$. После завершения маневров конечная скорость станет равна $v = \sqrt{5}v_0 = 300$ м/с. Новый курс направлен под углом $tg\alpha = 1/2$, $\alpha = 27°$ к восточному направлению.

Геометрический подход в задачах на движение тел в однородном поле гравитации

При решении задач на движение тела под действием силы тяжести векторные уравнения упрощают ситуацию еще сильнее, так как в этом случае известно не только чему равно ускорение, но и куда оно направлено ($\vec{a} = \vec{g}$). Траектория летящего тела – парабола, ось симметрии которой вертикальна.

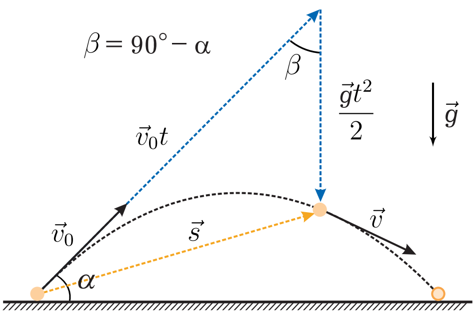


Рис. 3

Формулы 4 – 7 приобретают вид:

$$\vec{s} = \vec{v}_0 t + \vec{g}\frac{t^2}{2} \qquad (8)$$

$$\vec{s} = \vec{v} t - \vec{g}\frac{t^2}{2} \qquad (9)$$

$$\vec{s} = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2} t \qquad (10)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \qquad (11)$$

Уравнения 8 и 9 можно изобразить в виде векторных треугольников перемещений одна из сторон в которых – вертикальна (рис. 4).

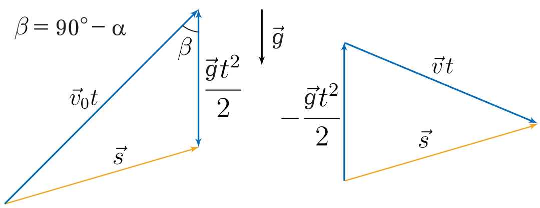


Рис. 4

Уравнение 11 является треугольником скоростей, так же с одной вертикальной стороной (рис. 5)

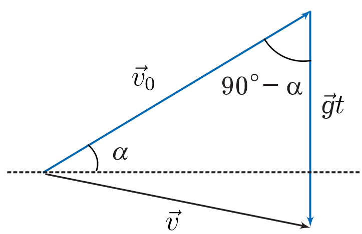


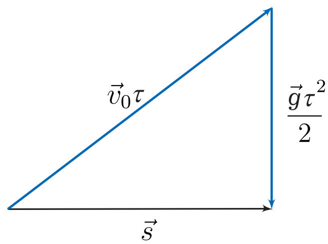
Рис. 5

Пример 2

Мячик бросили со скоростью v_0 под углом к горизонту. В полете он находился время τ. Чему равна дальность полета, если точки бросания и приземления находятся на одной высоте?

Возможное решение

Представим уравнение $\vec{s}=\vec{v}_0 t-\vec{g}\dfrac{t^2}{2}$ в виде векторного треугольника перемещения.



Применив теорему Пифагора, получим $s=\sqrt{v_0^2\tau^2-\left(\dfrac{g\tau^2}{2}\right)^2}$.

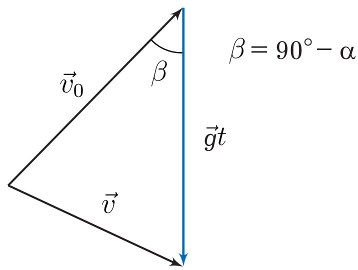
Пример 3

Камень бросили с крутого берега реки вверх под углом 30° к горизонту со скоростью $v_0=10$ м/с. С какой скоростью он упал в воду, если время полета равно t = 2 с?

Возможное решение

Представим уравнение $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{g}t$ в виде векторного треугольника скоростей. По теореме косинусов

$$v=\sqrt{v_0^2+(gt)^2-2v_0 gt\sin\alpha}.$$



Важные замечания

1. Медианы

Если наложить друг на друга треугольники перемещений (рис. 4), получится **параллелограмм перемещений**, диагонали которого сонаправлены с векторами начальной и конечной скорости (рис. 6).

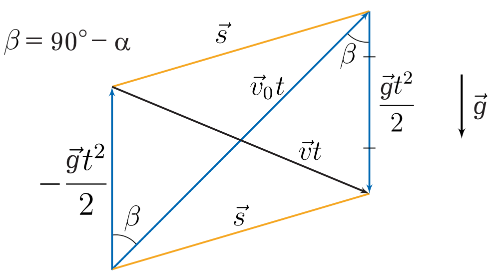


Рис. 6

Так как диагонали параллелограмма пересекаются посередине, то вектор конечной скорости направлен вдоль медианы, проведенной к стороне $\vec{v}_0 t$ в треугольнике перемещений (рис. 7)

Если все стороны в параллелограмме перемещений разделить на $t/2$, то медиана, проведенная к стороне $\vec{g}t$, у одной из его частей (выделена цветом на рис. 8) совпадающей с треугольником скоростей, будет равна $\dfrac{\vec{s}}{t}$, что, впрочем, непосредственно следует из уравнения (10).

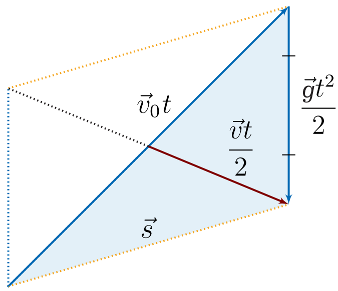
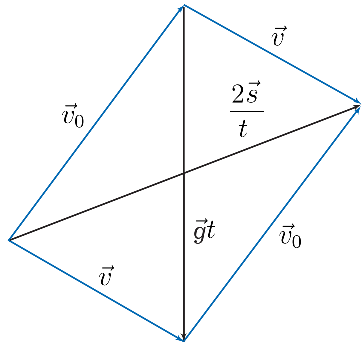


Рис. 7



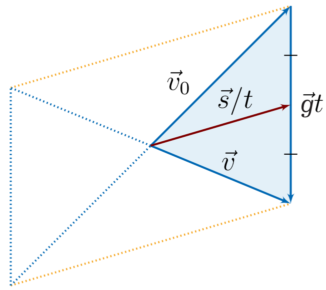


Рис. 8

Итак, вектор перемещения направлен вдоль медианы в треугольнике скоростей, а векторы скоростей, направлены вдоль медиан в треугольниках перемещений.

Стоит обратить внимание еще на одно замечательное свойство параллелограмма – сумма квадратов длин его диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон. Это легко доказать, выразив длины диагоналей с помощью теоремы косинусов. Откуда, после сложения уравнений:

$$2(v^2+v_0^2)=(gt)^2+\left(\frac{2s}{t}\right)^2.$$

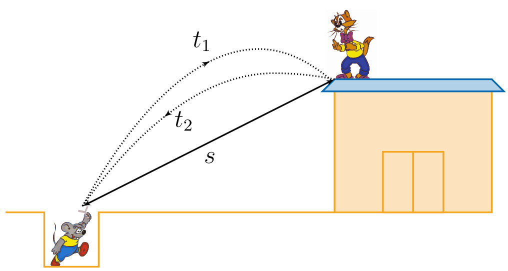
После преобразований получим биквадратное уравнение относительно времени:

$$t^4-2\frac{v^2+v_0^2}{g^2}t^2+\left(\frac{2s}{g}\right)^2=0.$$

Покажем на примере двух задач всероссийской олимпиады школьников, как параллелограмм скоростей упрощает их решение.

Пример 4

Кот Леопольд стоял у края крыши сарая. Два злобных мышонка выстрелили в него из рогатки. Однако камень, описав дугу, через время t_1 упруго отразился от наклонного ската крыши у самых лап кота и еще через время t_2 попал в лапу стрелявшего мышонка. На каком расстоянии S от мышей находился кот Леопольд?



Решение

Воспользуемся биквадратным уравнением для параллелограмма скоростей. По теореме Виета сразу получаем ответ:

$$S=\frac{gt_1t_2}{2}.$$

Пример 5

Величина скорости камня, брошенного с горизонтальной плоскости под углом к горизонту, через время $\tau = 0{,}5\ c$ после броска составляла $\alpha = 80\%$ от величины начальной скорости, а ещё через τ, соответственно $\beta = 70\%$.

1) Найдите продолжительность T полёта камня.

2) На каком расстоянии S от места броска упал камень?

Ускорение свободного падения $g = 9{,}8\ \frac{м}{с^2}$, сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Решение

Нарисовав параллелограмм скоростей, можно заметить, что $\frac{s}{\tau} = \alpha v_0$. И с учетом суммы квадратов его диагоналей:

$$2v_0^2(1+\beta^2) = (2g\tau)^2 + 4v_0^2\alpha^2,$$

откуда скорость броска:

$$v_0 = g\tau\sqrt{\frac{2}{1+\beta^2-2\alpha^2}} = 15{,}1\ \text{м/с}.$$

Для нахождения времени и расстояния необходимо определить, под каким углом φ к горизонту был брошен камень. Выразим скорость камня в момент времени 2τ из теоремы косинусов:

$$\beta^2 v_0^2 = v_0^2 + 4g^2\tau^2 - 4v_0 g\tau\sin\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{v_0^2(1-\beta^2)+4g^2\tau^2}{4v_0 g\tau} = 0{,}717.$$

Следовательно, $\varphi = 45$, и окончательно:

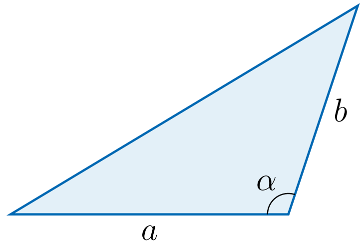
$$T = \frac{2v_0\sin\varphi}{g} = 2{,}21\ \text{с}$$

$$S = \frac{v_0^2\sin 2\varphi}{g} = 23{,}3\ \text{м}.$$

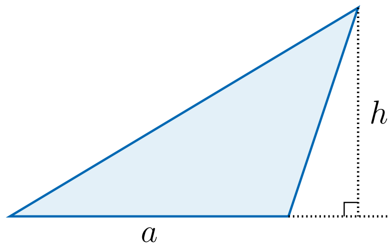
Решение координатным способом даже авторами не было изложено в полном объёме, поскольку ответы в общем виде получаются довольно громоздкими.

2. Площади

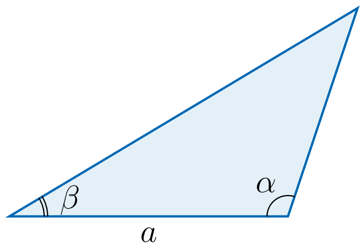
- Основные формулы для расчета площади треугольника



$$S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$



$$S_\triangle = \frac{1}{2}ah$$



$$S_\triangle = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Так как горизонтальная дальность полета $L = v_0 t \cos\alpha$ то площадь треугольника, ограниченного сторонами v_0, s/t и $gt/2$, равна $Lg/4$ (рис. 9). Но сторона s/t – медиана, которая делит треугольник скоростей на два равновеликих. Следовательно, площадь всего треугольника скоростей равна $Lg/2$.

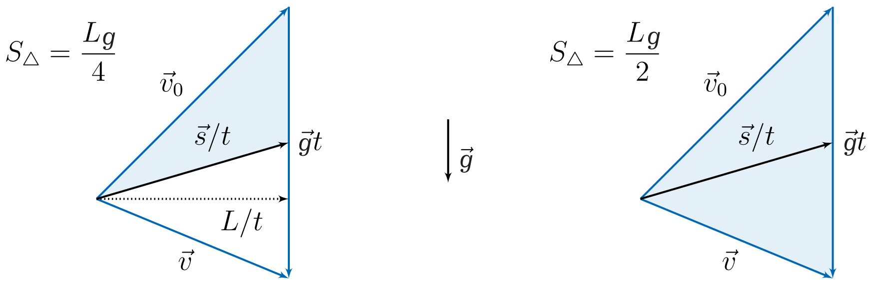


Рис. 9

Частные случаи векторных треугольников

Треугольники перемещений и скоростей для случая, когда точки броска и падения лежат на одной высоте, приведены на рис. 10.

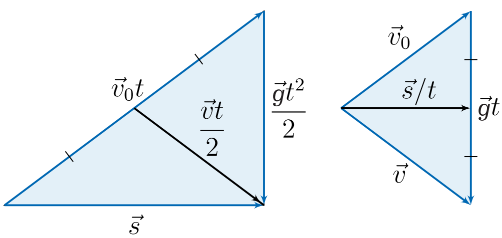


Рис. 10

Если начальная скорость направлена горизонтально, то треугольники принимают вид как на рис. 11

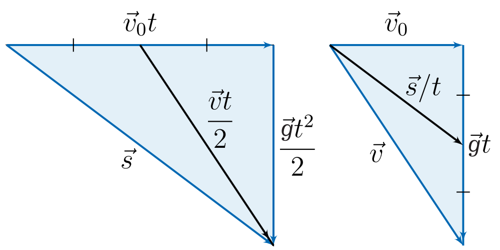


Рис. 11

Заметим, что при горизонтальном броске в любой точке траектории вектор скорости направлен под таким углом к горизонту, что его тангенс в два раза больше тангенса угла, под которым направлен вектор перемещения.

Часто встречаются ситуации, когда угол между начальной и конечной скоростью равен 90°. Параллелограмм перемещений в этом случае превращается в ромб (рис. 12), с вытекающим из этого равенством $S = \frac{gt^2}{2}$.

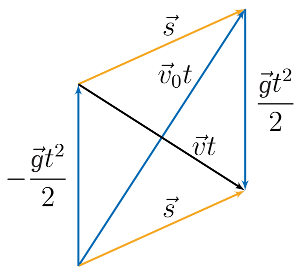


Рис. 12

Экстремальные параметры полета

Во многих олимпиадных задачах, требуется найти максимальную дальность полета, оптимальный угол бросания, или минимальную скорость, необходимую для попадания в определенную точку или при переброске через препятствие.

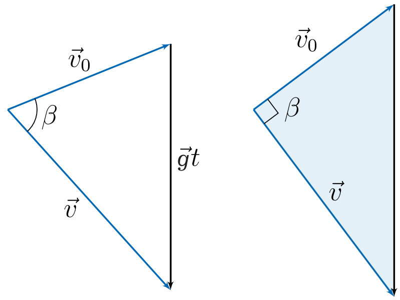
Казалось бы, без исследования функций на максимумы и минимумы с помощью производной такие задачи не решить, но на помощь опять приходят векторные треугольники. А именно треугольник скоростей с замечательным свойством своей площади $S = Lg/2$, где L − горизонтальная дальность полета.

Пример 6

Камень брошен с башни так, что дальность полёта максимальна. Начальная скорость камня $v_0 = 3$ м/с, конечная $v = 4$ м/с. Найдите время полёта камня.

Возможное решение

Так как при известной разности высот h по закону сохранения энергии $v_0^2 = v^2 \pm 2gh$ (знак плюс при подъеме, а минус при спуске) скорости v_0 и v связаны однозначно, то приравнивая площадь треугольника скоростей $S = \frac{1}{2} v_0 v \sin\beta = \frac{1}{2} Lg$, получим, что максимальная дальность достигается при $\sin\beta = 1$, то есть когда скорости перпендикулярны и треугольник скоростей − прямоугольный (см. рис. 12).



Применив теорему Пифагора, находим $gt = 5$ м/с, или $t = 0{,}5$ с.

С учетом вывода о прямоугольности треугольника скоростей при «экстремальном» полете, можно найти оптимальный угол, под которым надо бросать тело с башни высотой h, чтобы дальность полета оказывалась максимальной:

$tg\alpha = \frac{v_0}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2hg}}$, здесь угол α отсчитывается от горизонта.

Заметим, что если направление из места старта на конечную точку известно, то для нахождения угла, под которым необходимо совершать бросок, достаточно воспользоваться треугольником перемещений $\vec{s} = \vec{v}t - \vec{g}\frac{t^2}{2}$ и свойством его медианы, вдоль которой и должна быть направлена начальная скорость v_0 (рис. 13). Бросать нужно по биссектрисе между вертикалью и курсом на конечную точку.

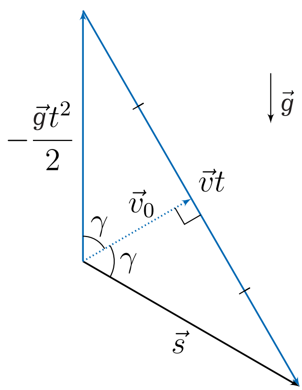
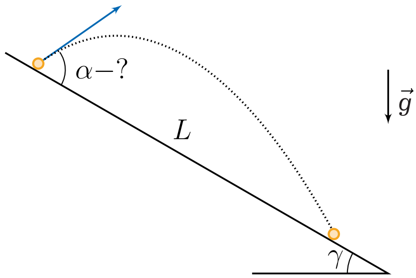


Рис. 13

Пример 7

Камень бросают с горы, имеющей постоянный угол наклона γ к горизонту. Под каким углом α к поверхности горы надо совершить бросок, чтобы дальность полёта L камня была максимальной?



Возможное решение

Так как максимальная дальность достигается в случае, когда начальная скорость направлена под прямым углом к конечной, треугольник перемещений – равнобедренный, следовательно, бросок необходимо совершать под углом $\alpha = 45° + \gamma\,/2$.

Выводы:

- Представление уравнений в виде векторных треугольников позволяет использовать готовые геометрические теоремы (Пифагора, синусов, косинусов, ...) и приёмы, существенно упрощающие решение задачи по сравнению с координатными методами.

- Упрощения решения от использования векторных треугольников можно ожидать в случаях, когда известно время полета. Так как в этом случае становятся определенными по модулю и направлению одна из сторон в треугольнике скоростей или, как правило, две стороны в треугольнике перемещений.

- Особенно просто выглядит треугольник скоростей, если конечная скорость образует прямой угол с начальной.

- В треугольнике, полученном в результате умножения сторон треугольника скоростей на время, вектор перемещения является медианой, а векторы скоростей, направлены вдоль медиан в треугольниках перемещений.

- При расчетах экстремальных параметров полета (максимальная дальность, минимальная скорость...) векторные треугольники и свойство площади $S = \ Lg/2$ треугольника скоростей позволяют не использовать производную.

В заключение авторы выражают благодарность Д.А. Александрову, Д.В. Подлесному и А.А. Коновалову, чьи работы по этой теме помогли в написании статьи.