

Трансцендентные функции и уравнения



В статье про метод деления пополам Вам встретился термин «трансцендентное уравнение». Давайте попробуем разобраться, что это такое.

Определение 1. *Трансцендентное уравнение — уравнение вида $f(x) = 0$, где $f(x)$ — трансцендентная функция.*

Нельзя сказать, что это пролило какой-либо свет на вопрос, и всё стало ясно. Но пойдём дальше. Трансцендентные функции — это довольно сложное понятие. Несколько примеров приведено в таблице внизу стра-

ницы. До точного определения пока ещё далеко, но, может, что-то стало понятно уже сейчас? Возможно, Вам пришла в голову правильная идея, что приведённые примеры трансцендентных функций изучаются в 10 и 11 классах, и, если Вы учитесь в восьмом классе, то, наверное, у Вас сложилось мнение, что трансцендентные функции — это функции, которые Вам не известны. Это не совсем точное определение. Хотя оно близко к смысловому значению прилагательного «трансцендентный».

Трансцендентный (прил.) — *лежащий за пределами опыта, недоступный познанию, непостижимый для разума, имеющий неизвестную природу.*

Попробуйте спросить у учителя по математике точное определение понятия «трансцендентная функция». Вряд ли он Вам его даст, потому что это тайна за семью печатями, а точнее за несколькими курсами университета. Но мы рискнём эту тайну приоткрыть. Начнём с другого конца.

Табл. 1

Примеры трансцендентных и нетрансцендентных функций

Трансцендентные функции	Нетрансцендентные функции
$\sin(x), \cos(x), \arcsin(x),$ $\sec(x), \operatorname{tg}(x), \ln(x),$ $e^x, 2^x, \operatorname{arctg}(x), \pi^{2x+1}$	$x^2, 0.5x+1, \frac{1+x^2}{1+x},$ $x^2+3x-1.5, \pi x(1+x),$ $\sqrt{1+4x^2}, 2 - \frac{8x^3}{15\sqrt[4]{6x^5}}$

Определение 2. Алгебраическая функция — это функция $y(x)$, которая может быть задана неявным образом в виде уравнения $F(y, x) = 0$, где $F(y, x)$ является многочленом от x и y .

Например, функция $y(x) = \sqrt{1+x^2}$ является алгебраической, т. к. можно записать уравнение $y^2 - 1 - x^2 = 0$.

В частности, алгебраическими функциями являются функции, которые можно получить из x , используя действительные числа, операции сложения, умножения, деления а также операции возведения в степень и извлечения корня произвольной степени. Но описанные функции не покрывают всё множество алгебраических чисел. Например, функцию $y(x)$ можно задать с помощью уравнения $y^5 + y \cdot x + 1 = 0$, а именно, сказать, что $y(x)$ определена в тех случаях, когда у указанного уравнения есть хотя бы один корень, и $y(x)$ есть значение максимального из корней этого уравнения.

Итак, предположим, что с алгебраическими функциями всё понятно. Осталось сделать ещё один маленький шаг.

Определение 3. Трансцендентная функция — это функция, которая является аналитической, но не является алгебраической.

К сожалению, что такое аналитическая функция, мы рассказать здесь не сможем — нельзя же взять и сразу обо всём рассказать. Растянем это удовольствие на несколько лет. Впрочем, подсказку некоторую дадим.

Определение 4. Аналитическая функция — это функция, которую можно сколько угодно дифференцировать, или (если Вы не знаете пока, что такое дифференцирование) — это функция, которую вблизи любого значения можно представить в виде суммы степеней $(x - x_0)$, возможно, бесконечной. Аналитические функции, не являющиеся алгебраическими, и называются **трансцендентными**.

Например, функции $\sin(x)$, $\ln(1+x)$ и e^x являются аналитическими и, например, вблизи значения $x = 0$ могут быть представлены следующим образом:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} - \frac{x^7}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \dots,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots$$

Аналитические функции имеют гладкие графики, их можно дифференцировать и интегрировать, при этом снова получаются аналитические функции. Все алгебраические функции являются аналитическими, но обратное неверно.

Ю М О Р **Знаете ли вы...** М О Р

- ♦ ...математику для гурманов: $\text{apelsin}^2x + \text{abricos}^2x = 1$.
- ♦ ...что классификация математических функций на **трансцендентные** и **нетрансцендентные** подобна классификации Вселенной на бананы и небананы...


