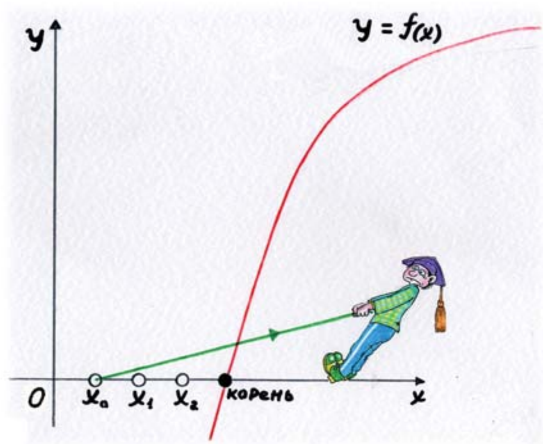
Петров Игорь Борисович
Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики Московского физико-технического института (МФТИ), член-корреспондент Российской академии естественных наук, действительный член Нью-Йоркской академии наук.

Сможете ли вы решить любое алгебраическое уравнение?

Большинство школьников, особенно те, кто увлекаются математикой, ответят на этот вопрос утвердительно. Однако не стоит торопиться. Разве вам не встречались нелинейные уравнения, или системы нелинейных уравнений, решения которых не удаётся представить в виде простой формулы? Наверное, встречались. Что же вы пытались делать в этом случае? Не приходилось задуматься над этим вопросом? Кто-то наверняка задумывался, а кто-то, возможно, и догадывался, что такие уравнения нужно решать численно, т.е. предварительно найти отрезок, на котором лежит корень уравнения, а затем придумать алгоритм, с помощью которого можно уточнить значение этого корня с нужной степенью точности.

Существует предположение о том, что ещё древние египтяне умели вычислять корень квадратный из двойки (это им было необходимо для вычисления диагонали квадрата, при делении земель возле Нила) по формуле:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), x_0 = a > 0.$$



(можно показать, что эта последовательность сходится к $\sqrt{2}$).

Алгоритм вычисления, как Вы уже догадались, весьма прост: сначала выбирается так называемое нулевое приближение к $\sqrt{2}.$ Это число $x_0 = a$, которое разумно брать как можно ближе к искомому значению квадратного корня, например, $a = 1{,}4$ (впрочем, можно положить и $a = 2$, или $a = 1$). Следующим шагом Вы вычисляете значение

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right),$$

затем

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right),$$

далее

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right),$$

и так далее:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Когда же нам закончить расчёты? Задайте точность, с которой Вам хотелось бы вычислить искомый корень, например $\varepsilon = 10^{-7}$. В таком случае Вы можете продолжить расчёты, пока не будет выполнено неравенство:

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \le \varepsilon.$$

Если есть желание, то Вы можете написать простейшую программу на вашем любимом алгоритмическом языке и вычислить значение $\sqrt{2}$ с нужной Вам точностью. А если хотите, то с помощью алгоритма

$$x_{n+1} = \frac{1}{r}\left[(r-1)x_n + \frac{d}{x_n^{r-1}}\right], x_0 = a$$

Вы можете вычислить корень r-той степени (r-натуральное число) из числа $d>0$ (можно показать, что эта последовательность сходится к $\sqrt[r]{d}$).

Неужели в Древнем Египте умели численно решать уравнение

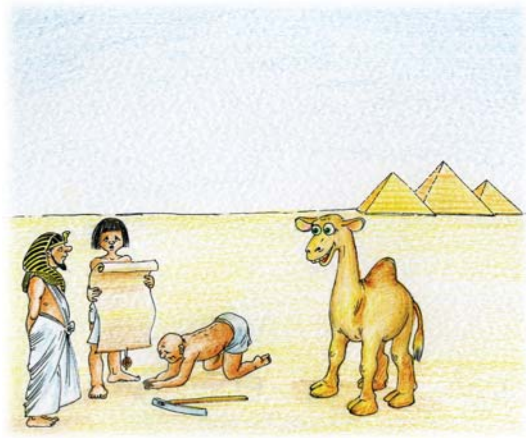
$$x^2 - 2 = 0\,?$$

Вряд ли. Скорее всего, если эта гипотеза верна, то древнеегипетские математики дошли до приведённой формулы эмпирическим путём, либо это была их гениальная (для того времени) догадка.

Но в наши планы догадки, как Вы понимаете, не входят. Поэтому будем искать корни алгебраических уравнений при помощи последовательных приближений (итераций). Итак, у нас есть уравнение

$$f(x)=0,$$

которое нам нужно решить. Все аналитические способы его решения мы



уже использовали, испробовав весь известный набор алгебраических преобразований. У нас остаётся единственный выход: приблизительно оценить отрезок, на котором лежит корень, или же найти его нулевое приближение, и с помощью некоторого алгоритма уточнить его, вычислив с нужной нам точностью. Давайте подумаем, как это можно сделать.

Если наше уравнение имеет только один корень на некотором отрезке $[b;c]$, то мы можем уточнить его положение, определив знаки $f(b)$ и $f(c)$, затем вычислив знак $f\left(\frac{b+c}{2}\right)$. Очевидно, что если знаки $f(b)$ и $f\left(\frac{b+c}{2}\right)$ одинаковые, то корень лежит на отрезке $\left[\frac{b+c}{2};c\right]$. Вычислим теперь значение функции $f(x)$ в середине этого отрезка. При этом, сравнив знаки функции $f(x)$, вычисленной в точках $\frac{b+c}{2}, c$ и в середине отрезка, мы определим, на каком их этих двух отрезков

$$\left[\frac{b+c}{2};\frac{\frac{b+c}{2}+c}{2}\right],\left[\frac{\frac{b+c}{2}+c}{2};c\right]$$

находится искомый корень. Если мы продолжим эту процедуру дальше, то сможем найти корень данного уравнения с заданной точностью. Этот алгоритм носит название метода деления отрезка пополам (или метода дихотомии). Однако можно придумать и другие методы уточнения корня, предварительно оценив его нулевое приближение x_0. При этом сначала нам придётся определить отрезок, на котором лежит x_0, а для этого можно использовать метод дихотомии. Эта процедура называется локализацией корня (определение отрезка, на котором он лежит); мы считаем, что этот корень на данном отрезке единственный.

В таком случае можно предложить следующий итерационный метод (метод простой итерации или метод последовательных приближений) для уточнения искомого корня:

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad x_0 = a.$$

Разумеется, при этом мы полагаем, что уравнение

$$f(x) = 0$$

прибавлением x к обеим его частям может быть приведено к виду:

$$x - F(x) = 0, \text{ где } F(x) = x + f(x).$$

Далее мы вычисляем x_1 по формуле

$$x_1 = F(x_0) = F(a),$$

затем – x_2 по формуле

$$x_2 = F(x_1),$$

и так далее:

$$x_{n+1} = F(x_n).$$

Счёт заканчиваем при выполнении одного из указанных ранее условий.

Прекрасный по своей простоте алгоритм. Однако не стоит радоваться преждевременно, до тех пор, пока мы не исследовали свойства этого алгоритма. Действительно, зададимся вопросом: а сойдётся ли к какому-нибудь числу последовательность приближений $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$? Это утверждение требует доказательства.

Рассмотрим абсолютную величину разности двух последовательных приближений x_n и x_{n+1}:

$$|x_{n+1} - x_n| = |F(x_n) - F(x_{n-1})|.$$

Если существует такое число $0 < q < 1$, что выполняется неравенство

$$|F(x_i) - F(x_{i-1})| \le q|x_i - x_{i-1}|, \ 0 \le i \le n,$$

то можно записать:

$$|x_{n+1} - x_n| = |F(x_n) - F(x_{n-1})| \le$$
$$\le q|x_n - x_{n-1}| = q|F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})| \le$$
$$\le q^2|x_{n-1} - x_{n-2}| = q^2|F(x_{n-2}) - F(x_{n-3})| =$$
$$= q^3|x_{n-2} - x_{n-3}| = q^3|F(x_{n-3}) - F(x_{n-4})| \le$$
$$\le \ldots \le q^n|x_1 - x_0|.$$

Произведение $q^n|x_1 - x_0|$ стремится к нулю при стремлении n к бесконечности:

$$q^n|x_1 - x_0| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Таким образом, мы показали, что абсолютная величина разности $|x_{n+1} - x_n|$ стремится к нулю при $n \to \infty$, то есть последовательность чисел x_n, $n = 0, 1, \ldots$ сходится к одному числу a. Покажем, что это число и будет корнем уравнения

$$x - F(x) = 0.$$

Оценим абсолютную величину разности

$$a - F(a) \le |(a - x_{n+1}) + (x_{n+1} - F(a))| \le$$
$$\le |(a - x_{n+1}) + (F(x_n) - F(a))| \le$$
$$\le |a - x_{n+1}| + |F(x_n) - F(a)| \le$$
$$\le |a - x_{n+1}| + q|a - x_n|.$$

Обе разности, находящиеся под знаком абсолютной величины, как мы уже знаем, стремятся к нулю при увеличении n. Следовательно, поскольку число n выбрано произвольным, а левая часть от n не зависит, то $a = F(a)$, то есть a является корнем уравнения $x - F(x) = 0$.

Можно дать геометрическую интерпретацию итерационного процесса, уточняющего корень уравнения $x - F(x) = 0$.

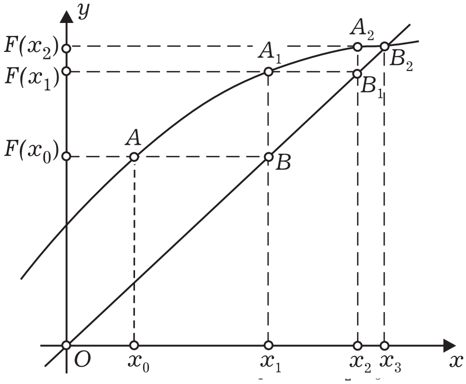


Рис. 1

Изобразим в системе координат (x,y) графики функций (рис.1):

$$y = x \quad \text{и} \quad y = F(x).$$

На оси Ox отметим точку начального приближения $x = x_0$. Проведём из неё перпендикуляр до пересечения с графиком функции $y = F(x)$ (точка A). Через точку A проведём горизонтальную прямую линию (влево и вправо) до пересечения её с осью Oy и графиком функции $y = x$ – точка B (биссектрисой прямого угла yOx). Очевидно, что ординаты точек A и B есть $F(x_0)$. Однако поскольку $F(x_0) = x_1$, то $F(x_0)$ является значением первого приближения корня x_1. В таком случае координата точки x_1 на оси Ox определяется очень просто. Опустим из точки B перпендикуляр на ось Ox. Точка пересечения этого перпендикуляра с осью Ox и будет точкой x_1, поскольку треугольник OBx_1 прямоугольный и равнобедренный, следовательно, $Ox_1 = x_1B = F(x_0)$, то есть $x_1 = F(x_0)$.

Эту несложную графическую процедуру можно продолжить аналогично и дальше, определяя следующие приближения: $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ Кривая, которая получается в результате этих построений $x_0ABA_1B_1A_2\dots$, называется лесенкой Ламерея. Сходится ли эта лесенка к корню нашего уравнения. Сходиться к корню наш итерационный процесс будет при выполнении условия: $0<q<1$.

А как будет выглядеть лесенка Ламерея, если $q>1$? Давайте построим её для этого случая (рис.2). Как видно, последовательность «убегает» от искомого корня. Говорят, что итерационный процесс расходится. Значит, сходимость итерационного процесса к корню уравнения является условной, то есть реализуется при выполнении некоторого условия, о котором мы уже говорили.

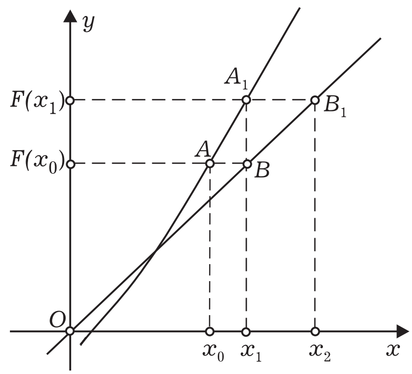


Рис. 2

Для «воздействия» на процесс сходимости последовательности $x_0, x_1, \dots$ к корню уравнения

$$f(x)=0$$

вводят итерационный параметр τ_n:

$$x_{n+1} = x_n + \tau_n f(x_n),\ x_0 = a.$$

Понятно, что при уменьшении разности $(x_{n+1} - x_n)$ будет уменьшаться и $f(x_n)$. Но для того, чтобы наша последовательность быстрее сошлась к корню, можно попробовать выбрать параметр τ_n. Так, если $f(x)$ дифференцируемая функция, то положим

$$\tau_n = -\frac{1}{f'(x_n)},$$

что соответствует приравниванию к нулю производной функции

$$F(x) = x + \tau f(x),$$

стоящей в правой части итерационной формулы, тогда получим итерационный процесс Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ x_0 = a.$$

Этот процесс часто используется при численном решении нелинейных алгебраических уравнений, поскольку последовательность $x_0, x_1, \ldots$, порождённая им, сходится быстрее, чем последовательность, порождённая методом простой итерации (т.е. для достижения значения корня с нужной нам точностью необходимо затратить меньшее количество итераций):

$$x_{n+1} = F(x_n),\ x_0 = a.$$

Геометрическая интерпретация процесса Ньютона имеет вид, представленный на рис.3. На оси Ox обозначаем нулевое приближение – точку x_0 – и проводим перпендикуляр до пересечения с графиком функции $y = f(x)$ – точка A_0.

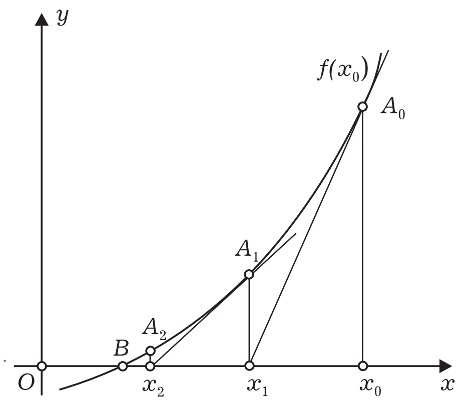


Рис.3

Из точки A_0 проводим касательную к графику функции $y = f(x)$ до пересечения с осью Ox – точка x_1 (первое приближение). Аналогично получаем приближения $x_2, x_3, \ldots$, которые сходятся к корню нашего уравнения – точке B.

А теперь постройте итерационный процесс Ньютона для уравнений:

$$x^2 - 2 = 0,$$

$$x^r - d = 0,$$

где $d>0$, а r – натуральное число. Если Вы сделаете это правильно, то у Вас получатся уже приведённые в начале статьи итерационные формулы. Если же используете эти формулы для вычисления $\sqrt{2}$ с начальным приближением $x_0 = 1$, то получите следующие результаты:

$$x_0 = 1,$$

$$x_1 = 3/2,$$

$$x_2 = 17/12,$$

$$x_3 = 577/408 \approx 1{,}414216 \text{ и т. д.}$$

напомним, что $\sqrt{2} \approx 1{,}414214$.

Для вычисления $\sqrt{13}$ с начальным приближением $x_0 = 3$, получим:

$$x_0 \approx 3{,}0000,$$

$$x_1 \approx 3{,}66660,$$

$$x_2 \approx 3{,}60606,$$

$$x_3 \approx 3{,}60555 \text{ и т. д.}$$

А теперь вычислим корни уравнения

$$2x - \cos x = 0$$

методом простой итерации, положив x_0=0,5. Для этого представим итерационный процесс в виде:

$$x_{n+1} = \frac{\cos x_n}{2};\ x_0 = 0{,}5.$$

В этом случае получим:

$$x_0 = 0{,}5,$$

$$x_1 = 0{,}43879,$$

$$x_2 = 0{,}45263,$$

$$x_3 = 0{,}449641 \text{ и т. д.}$$

Рассмотрим численную процедуру решения квадратного уравнения

$$x^2 - 100x + 1 = 0,$$

зная, что

$$x^{(1)} \approx 10^{-2},\ x^{(2)} \approx 10^2$$

($x^{(1)}, x^{(2)}$ – корни этого уравнения).

Для этого запишем итерационный процесс в виде:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{100}.$$

Если положить $x_0 = \pm 10$, то вычисление последующих приближений даёт:

$$x_1 = 1{,}01,$$

$$x_2 = 0{,}02020,$$

$$x_3 = 0{,}01000 \text{ и т. д.}$$

Однако для вычисления второго корня нам придётся выбрать другой итерационный процесс, т.к. вблизи x_2 условие сходимости метода простой итерации не выполняется:

$$x_{n+1} = 100 - \frac{1}{x_n},\ x_0 = 100.$$

Тогда:

$$x_1 = 99{,}99,$$

$$x_2 = 99{,}98999,$$

$$x_3 = 99{,}98999 \text{ и т. д.}$$

А теперь придумайте своё алгебраическое уравнение, которое Вам не удалось решить аналитически, и при помощи компьютера составьте несложную программу, которая поможет Вам решить это уравнение численно. Будет особенно интересно, если Вам удастся провести численное решение двумя методами: простой итерации и Ньютона, а затем сравнить эти методы по скорости сходимости.

Конечно же, в этой статье перечислены далеко не все методы, которые используются для численного решения нелинейных алгебраических уравнений, однако понятие о них у Вас уже есть.

ЮМОР ЮМОР ЮМОР ЮМОР ЮМОР ЮМОР

- Единица плохого почерка в СИ - одна каракуля. Так вот, у тебя в тетради несколько килокаракулей.
- Контрольный вопрос в голову.
- Не можешь взять интеграл - бери лопату.
- Три стадии признания научной истины: первая - «это абсурд», вторая - «в этом что-то есть», третья - «это общеизвестно». (Эрнест Резерфорд)
- \- Какова разница между военным инженером и гражданским?
  \- Военный инженер делает оружие, а гражданский - цели.