Ворожцов Артём Викторович
тренер сборной команды по программированию МФТИ

Царство игры «Ним» и как математики играют в игры

- Что такое Игра?
- Игры «Конфета» и «Ним»
- Понятие выигрышной стратегии
- Граф игры и сумма игр

Что такое игра?

Нет, мы сегодня будем говорить не о компьютерных играх, не о подкидном дураке, и, конечно, не о футболе. Речь пойдет об играх математических, а точнее, *комбинаторных*.

Оказывается, математики, кроме синусов и косинусов, изучают также игры. Этот факт школьные учебники по математике обычно скрывают от учеников. Многие математические теории можно рассматривать как игры с определёнными правилами. А часто и наоборот — игры порождают сложные математические теории.

Крестики-нолики, шахматы, Го, шашки, реверси — это известные примеры комбинаторных игр. Можно сказать, что комбинаторные игры — это игры, где нет элементов случайности, все правила чётко описаны, и игроки имеют полную информацию о текущей ситуации.

Определение 1. *Комбинаторная игра* — это множество игровых позиций, про каждую из которых игрокам известно, как (в какие другие позиции) может ходить каждый из них.

1. Какие вы знаете комбинаторные игры кроме перечисленных? Является ли “русская рулетка” комбинаторной игрой?

Рассмотрим простую комбинаторную игру «Конфета».

Игра «Конфета»

Игра 1. («Конфета») Есть натуральное число N — «конфета». Игроки по очереди «откусывают» не больше половины от имеющегося кусочка. Проигрывает тот, кто не сможет откусить от оставшегося единственного «кванта конфеты».

Давайте разберёмся, как в неё играть. «Конфета» величиной в один квант — $\{1\}$ — проигрышная позиция для того, кто ходит первым. «Конфета» $\{2\}$ — выигрышная: мы ходим в $\{1\}$ и выигрываем. Далее: $\{3\}$ — проигрышная, потому что из неё можно сходить только в конфету $\{2\}$. И з$\{4\}$ можно сходить в $\{3\}$, а значит, поставить соперника в плохую ситуацию. То есть $\{4\}$ — выигрышная позиция.

2. Поиграйте в игру «Конфета» $\{20\}$ сами с собой или с другом. Попробуйте поиграть первым и вторым игроком.

3. Докажите, что «Конфета» $\{15\}$ является проигрышной позицией, то есть проигрывает тот, кто ходит первым (при правильной игре второго). В чём заключается правильная игра второго, то есть какова его выигрышная стратегия?

Опишем все проигрышные позиции игры «Конфета». Для этого построим таблицу проигрышных и выигрышных позиций («$-$» обозначает проигрышную позицию, а «$+$» — проигрышную):

1	2	**3**	4	5	6	**7**	8	9	10
$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$

11	12	13	14	**15**	16	17	18	19
$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$

4. Докажите методом математической индукции, что проигрышные конфеты — это конфеты $\{2^n - 1\}$.

Игра 2. (Вариации «Конфеты») Игроки по очереди «откусывают»

а) 3, 5 или 8 квантов.

б) 2^n квантов, где $n = 0, 1, 2 \ldots$

в) n^2 квантов, где $n = 1, 2, 3 \ldots$

Проигрывает тот, кто не может откусить от «конфеты».

5. Нарисуйте табличку проигрышных и выигрышных позиций для указанных трёх игр и попытайтесь угадать в них закономерность.

Игра Ним

Это древняя китайская игра. В неё любили играть китайские императоры. Тем, кто у них выигрывал, отрубали голову.

Игра 3. (Ним$\{3,2,1\}$) Есть три кучки камней с числом камней — $\{3,2,1\}$. Играющие по очереди забирают любое количество камней из любой кучки. Проигрывает тот, кому нечего забирать.

Как нужно играть, чтобы выиграть в Ним?

6. Поиграйте в Ним со своими друзьями. Есть ли выигрышная стратегия у первого? А у второго?

Для того, чтобы разобраться с этим, давайте рассмотрим различные игровые позиции. Во-первых, сколько игровых позиций? Перечислим все: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,1\}$, $\{2,1\}$, $\{3,1\}$, $\{2,2\}$, $\{3,2\}$, $\{1,1,1\}$, $\{2,1,1\}$, $\{3,1,1\}$, $\{2,2,1\}$, $\{3,2,1\}$. Это позиции, в которые мы можем попасть через некоторое, произвольное число ходов. Очевидно, что в позиции $\{1,1\}$ выигрывает второй, а в позициях $\{1\}$, $\{1,1,1\}$ — первый.

7. Докажите, что позиции $\{2,1\}$, $\{3,1\}$, $\{2,1,1\}$ — выигрышные.

► Они выигрышные, потому что из них можно сходить в $\{1,1\}$. ◄

8. Докажите, что позиция $\{2,2\}$ — проигрышная.

Теперь, когда вы, наверное, уже придумали выигрышную стратегию для второго, давайте подробнее разберём понятие *выигрышная стратегия*.

Что такое выигрышная стратегия?

Определение 2. Позиции, в которых выигрывает тот, кто ходит первым, назовём *выигрышными*, а в которых выигрывает второй — *проигрышными*.

«Выигрывает» — значит имеет возможность так ходить и так отвечать на ходы противника, чтобы выиграть у него, независимо от того, как противник будет ходить. Эта возможность + описание того, как нужно отвечать на ходы соперника называется *выигрышной стратегией*. Другими словами, если игрок умный и ходит первым из выигрышной позиции, то он выиграет. Но как бы ни был умён игрок, он может проиграть даже дураку, если будет ходить первым из проигрышной позиции.

9. Докажите, что позиция $\{10,10\}$ проигрышная, то есть проигрывает тот, кто ходит первым.

10. Докажите, существование выигрышной стратегии для игрока, который ходит вторым из позиции $\{3,2,1\}$.

Граф Игры

Важно понять, что в игре Ним кроме проигрышных и выигрышных позиций никаких других позиций нет. Это довольно сложно объяснить, хотя кажется очевидным. В шахматах это не так — там возможны «ничейные» позиции. Другое важное отличие шахмат от игры Ним заключается в том, что в шахматах множества ходов, которые могут сделать игроки из одной и той же позиции, разные (играющий черными не может двигать белые фигуры, и наоборот). Здесь мы рассматриваем только те игры, в которых множества ходов, которые могут сделать игроки из одной позиции, совпадают (у игроков нет «цвета»). Такие игры называются *нейтральными*. Шахматы, шашки, крестики-нолики — не нейтральные игры, они — *цветные*.

На рисунке 1 показана схема ходов в игре Ним$\{3,2,1\}$. Эта схема называется *графом игры*.

Определение 3. *Граф игры* — это множество точек, соединённых стрелочками (направленными рёбрами). Точки (вершины графа) — это множество всех игровых ситуаций, которые могут возникнуть в данной игре. Каждая точка соответствует одной из возможных игровых ситуаций. То, что из точки A ведёт стрелочка в точку B, означает, что из позиции A можно сходить в позицию B.

Чтобы освоиться с понятием «граф игры», решите две задачи:

11. Кто выигрывает при правильной игре в Ним$\{5,2\}$? Нарисуйте граф игры.

12. Кто выигрывает при правильной игре в «Конфете» $\{5\}$? Нарисуйте граф игры.

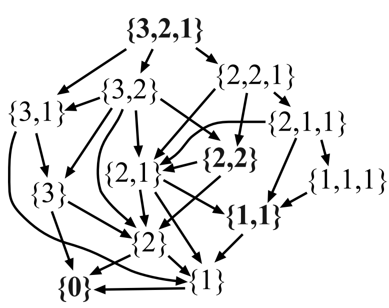

Рис. 1: Граф игры Ним$\{3,2,1\}$.

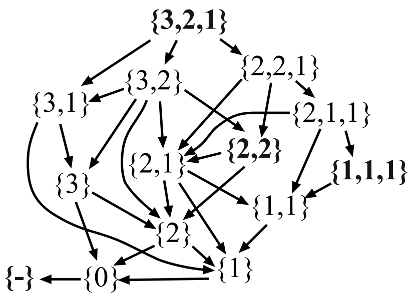

Рис. 2: Граф игры Ним$\{3, 2, 1\}$ в поддавки.

Давайте рассмотрим игру Ним в поддавки, условия которой таковы: тот, кто взял последний камень, тот и проиграл.

13. Кто выигрывает при правильной игре в Ним$\{3, 2, 1\}$ в поддавки? Нарисуйте граф игры.

► Позиция $\{1\}$ проигрышная. Все позиции, из которых в неё можно сходить, являются выигрышными. Это позиции: $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 1\}$, $\{2, 1\}$, $\{3, 1\}$. Далее найдём позицию, из которой можно сходить только в эти выигрышные позиции. Это позиция $\{2, 2\}$. Она — проигрышная позиция, так как из неё нельзя сходить в проигрышную позицию (поставить своего соперника в проигрышную позицию). Позиции, из которых можно сходить в $\{2, 2\}$, — выигрышные. Это $\{3, 2\}$ и $\{2, 2, 1\}$. Теперь из оставшихся позиций, $\{1, 1, 1\}$, $\{2, 2, 1\}$ и $\{3, 1, 1\}$, нужно найти такую, из которой можно сходить только в выигрышные позиции. Это позиция $\{1, 1, 1\}$. Значит $\{2, 1, 1\}$ и $\{3, 1, 1\}$ — хорошие. Рассмотрим позицию $\{3, 2, 1\}$. Из неё нельзя сходить ни в одну из проигрышных позиций ($\{1\}, \{1, 1, 1\}, \{2, 2\}$). Все позиции, в которые можно из нее попасть, — выигрышные, а значит, она сама — проигрышная. ◄

Итак, как для игры Ним, так и для игры Ним в поддавки позиция $\{3, 2, 1\}$ является проигрышной. В этом нет никакого противоречия. Граф игры «Ним в поддавки» показан на рисунке 2.

«−»	«+»
$\{1\}$	$\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 1\}$, $\{2, 1\}$, $\{3, 1\}$
$\{2, 2\}$	$\{3, 2\}$, $\{2, 2, 1\}$
$\{2, 1, 1\}$	$\{2, 1, 1\}$, $\{3, 1, 1\}$
$\{3, 2, 1\}$	

Есть естественное обобщение игры Ним.

Игра 4. (Ним) Есть кучки камней $\{n_1, n_2, \ldots, n_l\}$, n_i — число камней в i-ой кучке. Играющие по очереди забирают любое количество камней из любой кучки. Проигрывает тот, кому нечего забирать.

Надо ответить на вопрос: кто выиграет при правильной игре? Первая идея, которой мы активно будем пользоваться, — это *идея симметрии*.

14. Докажите, что в игре $\{3, 3, 1, 1\}$ выигрывает второй.

► Действительно, разобьем кучки на две одинаковые группы: $\{3, 1\}$ и $\{3, 1\}$. Тогда, как бы ни сходил первый, второй игрок сможет делать аналогичный ход, только в другой группе. Симметричный ход всегда будет существовать, и нам всегда будет куда ходить. Поэтому мы не проиграем, а значит, выиграем. ◄

Утверждение 1. Во всех симметричных играх выигрывает второй.

Ним $\{3, 2, 1\}$ — несимметричная игра, но в ней всё равно выигрывает второй.

15. Определите статус позций $\{3, 3, 1\}$, $\{4, 3, 1\}$, $\{100, 100, 1\}$.

16. Докажите, что $\{n, n, 1\}$ при любом натуральном n является выигрышной.

Отметим следующую важную мысль: если из имеющегося набора куч выбросить симметричную составляющую, то характеристика позиции не изменится (если была проигрышная позиция, то и останется проигрышной, если была выигрышная, то останется выигрышной). Например, в предыдущей задаче можно было выкинуть $\{100, 100\}$. Позиция $\{1\}$ — выигрышная, значит, и $\{100, 100, 1\}$ — тоже выигрышная.

Проигрышные позиции будем называть *нулевыми*. $\{3, 2, 1\}$, $\{7, 7\}$, $\{2, 1, 2, 1\}$ —

нулевые. Откуда взялось такое название станет ясно из следующего утверждения.

Утверждение 2. Если к произвольной позиции добавить или отнять нулевую позицию, то характеристика позиции не изменится.

► Докажем, что при сложении выигрышной позиции A с нулевой позицией B получается выигрышная позиция. Мы, играя первыми, будем делать ходы «на доске» A и выиграем там. Всякий раз, когда соперник будет делать ход в часть B, мы сможем успешно отвечать ходом в ту же часть, поскольку по условию в части B есть выигрышная стратегия для второго.

Если обе игры нулевые, то и в результате тоже будет нулевая игра. У второго игрока есть выигрышная стратегия на обеих частях доски. На каждой из частей он сможет успешно отвечать на ходы первого. Не важно, сыграют они сначала на одной части, а потом на другой, или будут переносить игру с одной части на другую. Второй игрок будет ходить в ту же часть доски, в какую сходил первый. ◄

17. Докажите, что $\{3, 2, 1, 100, 100\}$ является нулевой позицией.

Итак, сложение любой позиции с нулевой позицией не меняет её характеристику.

18. Как по количеству камней в кучках определить, кто из игроков выиграет при правильной игре?

Для того, чтобы ответить на этот вопрос, нам понадобится операция xor. Чтобы осуществить операцию xor набора натуральных чисел, нужно перевести их в двоичную систему счисления и подписать друг под другом, ровняя по младшему разряду. Затем подсчитать чётность числа единиц в каждом столбце, и записать под столбцом 1, если нечётно, и 0, если чётно. Результат — нижняя строчка, осталось перевести её из двоичной системы в, привычную нам, десятичную.

Примеры операции xor:

$$\begin{array}{rr} \oplus & 10 \\ & 01 \\ \hline & 11 \end{array} \qquad 2 \oplus 1 = 3$$

$$\begin{array}{rr} \oplus & 110 \\ & 011 \\ \hline & 101 \end{array} \qquad 6 \oplus 3 = 5$$

$$\begin{array}{rr} \oplus & 1010 \\ & 1011 \\ \hline & 0001 \end{array} \qquad 10 \oplus 11 = 1$$

$$\begin{array}{rr} \oplus & 101011 \\ & 1111 \\ & 100101 \\ & 10001 \\ \hline & 10000 \end{array} \qquad 43 \oplus 15 \oplus 37 \oplus 17 = 16$$

Утверждение 3. В Ним$\{m_1, \ldots, m_k\}$ есть выигрышная стратегия для первого тогда и только тогда, когда $\mathrm{xor}(m_1, \ldots, m_k) = 0$. Иначе есть выигрышная стратегия для второго. Число $\mathrm{xor}(m_1, \ldots, m_k)$ обозначим как Nimber.

Итак, для каждой игры Ним мы можем подсчитать число Nimber.

Примеры. Nimber игры Ним из одной кучки с n камнями есть n:

$$\text{Nimber}(\{n\}) = n.$$

В случае одной кучки всегда выигрывает первый. $\text{Nimber}(\{2, 1\}) = 3$, значит в этой игре выигрывает первый. Зато $\text{Nimber}(\{3, 2, 1\}) = 0$, и в ситуации $\{3, 2, 1\}$ есть выигрышная стратегия у второго.

19. Вычислите $\text{Nimber}(\{5, 1\})$ и $\text{Nimber}(\{9, 8, 1\})$.

Выигрышная стратегия в Ним

Если в текущий момент набор кучек таков, что их Nimber не равен 0, то вы должны сходить так, чтоб он стал равен 0. Второй из позиции с нулевым Nimber-ом сможет сходить только в позицию с ненулевым Nimber-ом. Вы после его хода снова сходите в позицию с нулевым Nimber'ом, и так далее. Конечная позиция – полное отсутствие камней – имеет нулевой Nimber, а значит, когда-нибудь именно вы в неё сходите и выиграете. Это стратегия опирается на два факта, которые необходимо доказать.

20. Докажите, что если в позиции $\{m_1, \ldots, m_k\}$ игры Ним $\mathrm{xor}(m_1, \ldots, m_k) \neq 0$, то вы сможете сходить в новую позицию (уменьшив одно

из чисел $\{m_1, \ldots, m_k\}$), для которой $\mathrm{xor} = 0$.

21. Докажите, что если в позиции $\{m_1, \ldots, m_k\}$ игры Ним $\mathrm{xor}(m_1, \ldots, m_k) = 0$, то вы сможете сходить только в позиции, в которых $\mathrm{xor} \neq 0$.

Решив эти две задачи, вы докажите, что предложенная выше стратегия действительно «работает».

Давайте поиграем

Вам предлагается небольшая коллекция игр для самостоятельного исследования. Попробуйте поиграть в них и найти выигрышную стратегию для одного из игроков.

В некоторых из этих игр работает разобранная нами идея симметрии: ситуация симметрична, когда на каждый ход соперника есть ваш «симметричный» ход, который снова приводит к симметричной позиции. Суть этой симметрии не всегда проста.

Игра 5. Двое по очереди кладут одинаковые монеты на круглый стол, причём так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Игра 6. Двое по очереди ставят слонов в клетки шахматной доски так, чтобы слоны не били друг друга (цвет слонов значения не имеет). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Игра 7. Двое по очереди ставят королей в клетки шахматной доски так, чтобы короли не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Игра 8. Дана клетчатая доска а) 4×4, б) 5×4, в)3×5, г)100×200. За ход разрешается покрыть любые 2 соседние клетки доминошкой (прямоугольником 2×1) так, чтобы доминошки не перекрывались. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Игра 9. В каждой клетке шахматной доски стоит шашка. За ход разрешается снять с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку.

Игра 10. На окружности расставлено 10 точек. За ход разрешается соединить любые две из них отрезком, который не пересекает отрезков, проведенных ранее (в том числе не имеет общего конца). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Игра 11. У ромашки а) 12 лепестков; б) 11 лепестков. За ход разрешается оторвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Игра 12. Дан куб размером $4 \times 4 \times 4$, составленный из единичных кубиков. За ход разрешается проткнуть спицей любой ряд, если в нем есть хотя бы один непроткнутый кубик. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Игра 13. Дана шоколадка размера 5×8. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из имеющихся кусков вдоль углубления. Выигрывает тот, кто первым отломит дольку размера 1×1.

Игра 14. На доске два числа — $\{7, 8\}$. Игрок за ход стирает наибольшее и пишет вместо него любое меньшее натуральное число. Выигрывает тот, кто сходит в позицию $\{1, 1\}$. Изменится ли статус позиции если считать, что тот, кто сходит в позицию $\{1, 1\}$, проиграл?

Игра 15. Дан выпуклый n-угольник. Игроки по очереди соединяют любые две из его вершин диагональю. Не допускается, чтобы из одной вершины выходило 3 или больше диагоналей. Проигрывает тот, кто не может провести диагональ.

Игра 16. Дан прямоугольник $n \times m$, разделённый на единичные белые квадратики. Игроки по очереди выбирают один из белых квадратиков, закрашивают его в черный цвет, а также все квадратики, которые находятся одновременно не ниже и не левее его. Тот, кто закрасит в черный цвет угловой нижний левый квадратик, проигрывает.

Задачи

22. Бывают ли такие игры, в которых есть выигрышная стратегия как у первого, так и у второго игрока?

23. Какой ход нужно сделать первому игроку в игре «Конфета» $\{33\}$?

24. Кто выигрывает в игре 10?

25. Кто выигрывает при правильной игре в а) Ним $\{5, 5, 2, 2\}$; б) Ним$\{5, 4, 1\}$?

26. Кто выигрывает в игре Ним в поддавки в ситуации $\{5, 1, 1\}$?

27. Кто выигрывает в игре Ним в поддавки в ситуации $\{8, 4, 1\}$?

28. Нарисуйте граф игры «Конфета» $\{6\}$.

29. Докажите, что в игре 16 независимо от значений $m > 1$ и $n > 1$ выигрывает первый.

Алгоритм игры Ним

Итак, теперь мы уже готовы сформулировать алгоритм игры в Ним. Он позволяет выигрывать соперника в выигрышных ситуациях. Но если вам досталась проигрышная ситуация, то вы сможете выиграть, только если ваш соперник ошибётся.

Алгоритм игры в «Ним».

1. Текущая ситуация $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$.
2. Вычислим $x = \operatorname{xor}(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.
3. Если $x = 0$, то позиция для нас проигрышная, поэтому ходим куда-либо и переходим к шагу 6.
4. Иначе ищем i такое, что
$$\operatorname{xor}(x, n_i) < n_i.$$
5. Ходим в i-ую кучу, оставляя там $\operatorname{xor}(x, n_i)$ камней.
6. Считываем ход соперника и с новым набором $\{n_i\}$ идём в 1.

Обратите внимание на 4-й шагв этом алгоритме. На этом шаге мы ищем кучку, число камней в которой мы можем уменьшить так, чтобы её двоичная запись поменялась в нужных нам разрядах. Разряды, которые нам нужно изменить, — это разряды числа x, в которых стоят единицы. Рассмотрим страший разряд двоичной записи x. Среди кучек должна быть такая, число камней в которой имеет единичку в этом разряде. Именно из неё мы своим ходом возьмём нужное количество камней.

Вычисление Nimber для других игр

Мы с вами научились вычислять число Nimber для позиций игры Ним. По Nimber'у легко установить статус позиции:

Если Nimber $= 0$, то выигрывает второй игрок, иначе — первый. При сложении двух позиций их Nimber'ы xor-ятся (ксорятся):

$$\text{Nimber}(A+B) = \text{Nimber}(A) \oplus \text{Nimber}(B)$$

Оказывается Nimber'ы можно находить не только для позиций игры Ним.

Рассмотрим большой класс нейтральных игр, которые формулируются как «... проигрывает тот, кому некуда ходить». На таких играх можно ввести понятие *суммы игр*. Сумма двух игр соответствует параллельной игре «на двух досках». На каждом ходе игрок делает ход на одной из досок, а позиция на второй доске не меняется. Проигрывает в такой игре тот, кому некуда ходить ни на первой, ни на второй доске.

Определение 4. Если множество позиций, в которые в принципе могут попасть игроки из начальной ситуации игры, конечно, то игра называется конечной. Другими словами, игра конечна, если её граф имеет конечное число вершин.

Для конечных нейтральных игр можно вычислять Nimber.

Алгоритм вычисления Nimber*:* Пусть дана некоторая конечная нейтральная игра. Nimber позиции A равен M по определению тогда, когда M есть минимальное из натуральных чисел, отсутствующих в множестве Nimber'ов позиций, в которые можно сходить из A.

30. Поиграйте в игру, равную сумме игр «Ромашка» {6} и «Ромашка» {5}. У кого есть выигрышная стратегия?

31. Какие из перечисленных выше игр являются конечными нейтральными играми? Вычислите Nimber'ы для различных позиций этих игр.

32. Напишите программу вычисления последовательности A_n, где A_n равно Nimber'у «Ромашки» из n лепестков, у которой один из лепестков уже сорвали. Покажите, что получается периодическая последовательность чисел с некоторым предпериодом.

Задача про Ним на El Judge

На сайте `http://acm.mipt.ru/judge` есть архив задач по программированию алгоритмов и система автоматической проверки. Это значит, что вы пишите решение на одном из разрешённых языков программирования (C/C++, Pascal, Python, Perl) и посылаете его на сервер. Сервер проверяет ваше решение на множестве тестов — необходимо чтобы ваша задача прошла все тесты. Вы найдете там несколько задач про конечные нейтральные игры. В частности, там есть следующая задача:

На вход программа получает описание ситуации игры Ним, а именно количество кучек и сколько камней находится в каждой кучке. Ваша программа должна определить, кто выигрывает в данной позиции при правильной игре — первый или второй игрок?

Удачи!

Задача про Кафе

14 ноября 2004 года прошла московская командная олимпиада школьников по программированию. Представляем вам задачу «Кафе» с этой олимпиады. Условия остальных задач и информацию о результатах можно найти на сайте `http://olympiads.ru/moscow`.

Формулировка

Около Петиного университета недавно открылось новое кафе, в котором действует следующая система скидок: при каждой покупке более чем на 100 рублей, покупатель получает купон, дающий право на один бесплатный обед.

Однажды Пете на глаза попался прейскурант на ближайшие N дней. Внимательно его изучив, он решил, что будет обедать в этом кафе все N дней, причём каждый день он будет покупать в кафе ровно один обед. Однако стипендия у Пети небольшая, и поэтому он хочет по максимуму использовать предоставляемую систему скидок так, чтобы его суммарные затраты были минимальны. Требуется найти минимально возможную суммарную стоимость обедов и номера дней, в которые Пете следует воспользоваться купонами.

Формат входных данных

В первой строке входного файла записано целое число N ($0 \leqslant N \leqslant 100$). Затем идут N чисел, обозначающих стоимость обеда в рублях на соответствующий день. Стоимость — неотрицательное целое число, не превосходящее 300.

Формат выходных данных

В первой строке выведите минимальную возможную суммарную стоимость обедов. Во второй строке выведите два числа K_1 и K_2 — количество купонов, которые останутся неиспользованными у Пети после этих N дней и количество использованных им купонов соответственно.

В последующих K_2 строках выведите в возрастающем порядке номера дней, когда Пете следует воспользоваться купонами. Если существует несколько решений с минимальной суммарной стоимостью, то выведите то из них, в котором значение K_1 максимально (на случай, если Петя когда-нибудь ещё решит заглянуть в это кафе). Если таких решений несколько, то выведите любое из них.

Пример:

Вход:	Выход:
5	229
35 40 101 59 63	0 1
	5

Разбор задачи

В приведённом выше примере $N = 5$. Обед в первый день стоит 35 рублей, во второй – 40 рублей, и т. д. В первые три дня Петя вынужден платить, так как у него нет купонов. Но в третий день он получает один купон, так как платит 101 рубль за обед. Он может истратить этот купон на следующий день. Но экономичнее израсходовать его на пятый день. Суммарные затраты Пети в указанном примере составили

$35 + 40 + 101 + 53 = 229$ рублей.

Итак, нам даны стоимости обедов и нам нужно решить, за какие обеды мы платим рублями, а какие получаем за купоны. Купоны приобретаются в те дни, когда мы платим деньгами за обед более, чем 100 рублей.

Задача решается методом *динамического программирования*. Это значит, что вместо одной задачи, мы рассмотрим целый класс задач, начнём решать простые задачи из этого класса и постепенно дойдём до нужной нам задачи. Определим функцию:

$\mathrm{M}(d, k)$ = минимальное число денег, которые можно потратить за первые d дней и иметь в результате на руках k или больше купонов.

Вычислить эту функцию при всевозможных параметрах d и k — и есть наш класс задач. Нас интересует только значение $\mathrm{M}(N, 0)$, то есть минимальное количество денег, которые Петя может потратить за N дней и иметь в конце на руках 0 или больше купонов. Но чтобы вычислить это значение, нам придется вычислить $\mathrm{M}(d, k)$ при различных значениях параметров.

Обозначим цену обеда в d-й день через $\mathrm{P}(d)$. Несложно понять, что

- $\mathrm{M}(1, k) = \mathrm{undef}$, если $k > 1$.
- $\mathrm{M}(1, 0) = \mathrm{P}(1)$ и $\mathrm{M}(1, 1) = \mathrm{undef}$, если $\mathrm{P}(1) \leqslant 100$.
- $\mathrm{M}(1, 0) = \mathrm{M}(1, 1) = \mathrm{P}(1)$, если $\mathrm{P}(1) > 100$.

Здесь undef обозначает «неопределенность», то есть нет возможности иметь столько купонов в этот день. Можно считать, что $\mathrm{undef} = +\infty$, то есть очень-очень много.

Естественно рассматривать M как двумерный массив или таблицу. Указанные выше правила позволяют вычислить первую строчку этой таблицы.

Осталось, двигаясь змейкой по строчкам, вычислить значения остальных её элементов. Внешний цикл будет по переменной d (строчки), а внутренний — по переменной k (столбцы). Будем пользоваться соотношениями:

- Если $\mathrm{P}(d) \leqslant 100$, то $\mathrm{M}(d, k) = \min(\mathrm{M}(d-1, k) + \mathrm{P}(d), \mathrm{M}(d-1, k+1))$.
- Если $\mathrm{P}(d) > 100$, то $\mathrm{M}(d, k) = \min(\mathrm{M}(d-1, k-1) + \mathrm{P}(d), \mathrm{M}(d-1, k))$.

В последней формуле при $k = 0$ следует учесть, что

$$\mathrm{M}(d-1, -1) = \mathrm{undef} = +\infty.$$

Эти соотношения выражают число $\mathrm{M}(d, k)$, стоящее в строчке d, через число стоящее над ним в предыдущей строчке, а также через числа, стоящие в предыдущей строчке в двух соседних столбцах.

Формулы, которые выражают значение некоторой величины через значения этой величины при других значениях параметров, называются *рекуррентными формулами*.

Указанная рекуррентная формула позволяет последовательно, строчка за строчкой вычислить всю таблицу M. Таблица будет треугольной, так как $\mathrm{M}(d, k) = \mathrm{undef}$ при $k > d$. По таблице можно восстановить, в какие дни следует платить купон, а в какие — тратить. Разберитесь в этом самостоятельно.

Отметим важный момент. В задаче требуется, чтобы мы минимизировали количество потраченных денег и среди оптимальных решений выбрали то, в котором число оставшихся на руках купонов максимально. То есть нужно найти максимальное k, такое что $\mathrm{M}(N, k) = \mathrm{M}(N, 0)$. Это и будет искомое K_1.

1. Покажите, что иметь в конце на руках более одного купона не экономично, то есть $K_1 = 0$ или 1.

2. Постройте вручную таблицу M для входа $N = 5$, $\mathrm{P} = \{101, 102, 50, 90, 103\}$.

3. Пусть у Пети есть определенное количество денег. Придумайте алгоритм, который найдёт как нужно тратить их, чтобы иметь в конце как можно больше купонов.