Златопольский Дмитрий Михайлович
Кандидат технических наук, доцент кафедры информатики и прикладной математики Московского городского педагогического университета.

Задача о джипе

Как разработать хороший алгоритм? С чего начать? У каждого из нас есть печальный опыт, когда смотришь на задачу и не знаешь, что делать. В этой статье мы опишем один из общих методов решения задач – так называемый «метод отрабатывания назад».

Рассмотрим задачу [1]. *Путешественник должен на джипе пересечь пустыню шириной в 1000 км, расходуя по 1 л топлива на каждый километр пути. Однако бак джипа рассчитан только на 500 л. Необходимо пересечь пустыню с минимальными затратами топлива. Как это сделать?*

Идея организации движения такая. Так как нельзя пересечь пустыню за один раз, необходимо заезжать на какое-то расстояние вглубь, оставлять там некоторое количество топлива так, чтобы в баке ещё обязательно оставалось достаточно горючего для возвращения. Курсируя вперёд и назад и завозя всё больше топлива в глубь пустыни, можно двигаться дальше, в следующий раз возвращаясь уже не к началу пути, а к предыдущему хранилищу.

Формализуем эту идею. Обозначим:

1) требуемое число хранилищ – n (и будем нумеровать их, начиная с конца маршрута);

2) от финиша до первого (фактически – последнего) хранилища – x_1;

3) расстояния между хранилищами:

– между первым и вторым – x_2;

– между вторым и третьим – x_3;

– между $(n - 1)$-м и n-м – x_n.

Итак, задача сводится к нахождению перечисленных величин, а также объёмов каждого из хранилищ. Но как найти значения этих величин? Ведь и число хранилищ, и места их размещения, и объёмы могут быть самыми разными.

Будем решать задачу, так сказать, «с конца». Предположим, что путешественник добрался до первого[1] хранилища. Чтобы доехать до конца пустыни, полностью опусто-

[1] Напомним, что мы договорились вести нумерацию с конца маршрута.

шив бак (а это необходимо по требованию минимального расхода топлива), последнее хранилище должно быть организовано за 500 км до финиша, а в этом месте для достижения цели надо всего иметь 500 л топлива (в баке автомобиля и в хранилище).

Определим значение x_2.

Итак, известно место последнего на маршруте (в нашей нумерации – первого) хранилища – за 500 км до окончания пустыни. На каком расстоянии x_2 от этого хранилища должно быть предыдущее, чтобы оттуда можно было обеспечить наличие 500 л в месте последнего хранилища (см. рис. 1)?

Рис. 1

Предположим, что за $(500 + x_2)$ км до конца пустыни (в точке C размещения предпоследнего хранилища) имеется неограниченное количество топлива. Поступим так. Заправляем полный бак, доезжаем до точки B (места последнего хранилища), оставляем там какое-то количество топлива так, чтобы осталось только на дорогу назад. При возвращении (точка C) бак будет пуст, и он снова заправляется целиком, после чего опять едем до последнего хранилища (точка B), забираем то, что оставили там (в сумме должны получить ровно 500 л), чтобы пересечь остаток пустыни.

Таким образом, в точке C надо иметь запас топлива на:

1) двукратный проезд расстояния x_2 (затрачиваем 500 л, в том числе делая запас в точке B);

2) третий проезд расстояния x_2 (от точки C до точки B);

3) проезд 500 км от точки B до финиша (на проезд по пп. 2 и 3 также затрачиваем 500 л).

Пройденное расстояние должно быть равно $(3x_2 + 500)$ км, и на это может быть потрачено 1 000 л (две заправки бака джипа в точке C). Так как на 1 км пути расходуется 1 л топлива, то можем записать, что

$$3x_2 + 500 = 1\,000,$$

откуда

$$x_2 = \frac{500}{3} \text{ км.}$$

Теперь можно определить значение x_3 (см. рис. 2).

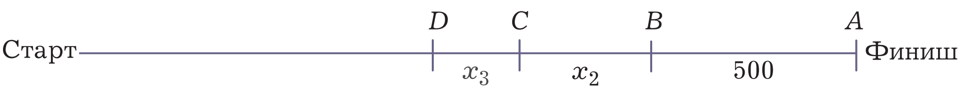

Рис. 2

Рассуждаем так. Находясь в точке D, нужно в точке C на расстоянии

$$500 + x_2 = 500 + \frac{500}{3}$$

от конца пустыни обеспечить два полных бака топлива. В этом случае из точки D нужно сделать уже не одну «подготовительную» (для создания запаса в точке C) поездку, а две. После них надо, заправив бак третий раз, доехать до точки C, взять сделанный там запас топлива и поехать в точку B. Поскольку, как мы только что установили, определяя значение x_2, в точке C надо иметь 1 000 л топлива, то можем записать:

$$5x_3 + 1\,000 = 3 \times 500,$$

где 5 – количество поездок по

участку длиной x_3, 3 – число заправок бака джипа в точке D, откуда

$$x_3 = \frac{500}{5} \text{ км.}$$

Дальнейшая схема действий по созданию промежуточных хранилищ аналогична. В результате можем составить таблицу:

Номер хранилища, i	Расстояние от i-го хранилища (или от финиша), км	Общее расстояние от хранилища до конца пустыни, км
1	$x_1 = 500$	500
2	$x_2 = \frac{500}{3}$	$500 + \frac{500}{3}$
3	$x_3 = \frac{500}{5}$	$500 + \frac{500}{3} + \frac{500}{5}$
…		
n	$x_n = \frac{500}{(2n-1)}$	$500\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)}\right)$

Это означает, что для решения задачи нужно найти такое наименьшее число хранилищ n, при котором значение $500\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)}\right)$ будет больше либо равно 1000.

Проведя расчёты, например, используя электронную таблицу Microsoft Excel или подобную, получим следующее:

Число хранилищ, n	Надо иметь топлива, л		Они позволят проехать, км
1	500	500.0	500.0
2	1000	166.7	666.7
3	1500	100.0	766.7
4	2000	71.4	838.1
5	2500	55.6	893.7
6	3000	45.5	939.1
7	3500	38.5	977.6

Примечание. Данные в третьем столбце таблицы – вспомогательные для расчёта значений в четвёртом столбце.

Из последней таблицы видно, что из точки нахождения седьмого хранилища можно проехать 977,6 км, что недостаточно, то есть место старта находится до седьмого хранилища. Читателю предлагается самостоятельно убедиться в том, что для обеспечения 3 500 л топлива в хранилище, отстоящем от старта на расстоянии 22,4 км, достаточно 337,5 л, то есть, чтобы пересечь пустыню, на старте надо иметь 3 837,5 л горючего.

Теперь алгоритм путешествия может быть представлен следующим образом. Путешественник стартует из точки I, имея 3 837,5 л горючего. Этого количества топлива достаточно, чтобы постепенно перевезти 3 500 л к точке H и оказаться там. Используя 3 500 л топлива в точке H, можно обеспечить наличие 3 000 л в точке, отстоящей от старта на $22{,}4 + \frac{500}{13}$ км. Последующие перевозки приведут путешественника к точке, отстоящей от старта на $22{,}4 + \frac{500}{13} + \frac{500}{11}$ км, где будет 2 500 л топлива.

Продолжая таким образом, он продвигается вперёд и вскоре окажется у отметки $500\left(1 - \frac{1}{3}\right)$ км с 1000 л горючего. Отсюда путешественник доставит 500 л в точку B, которые и позволят ему успешно достичь цели. Рисунок 3 иллюстрирует весь этот процесс.

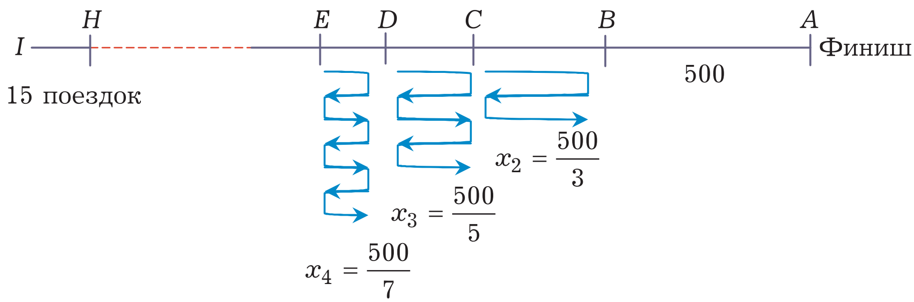

Рис. 3

Возникает вопрос, можно ли проехать 1 000 км, затратив меньше чем 3 837,5 л горючего. Оказывается, что нельзя. Доказательство этого факта довольно сложно. Однако можно высказать следующий, довольно убедительный, довод. Очевидно, что мы действовали наилучшим образом при выборе последнего перед финишем хранилища (см. также задание 3 для самостоятельной работы). Для следующего хранилища мы использовали наш план для последнего хранилища и «ввели в действие» второй бак горючего для того, чтобы оказаться как можно дальше от точки B. Исходная предпосылка при выборе следующих хранилищ заключается в том, что мы знаем, как действовать наилучшим образом для хранилищ «впереди», и отодвигаемся как можно дальше назад с помощью дополнительного бака.

Задания для самостоятельной работы

1. При постановке задачи в начале статьи говорилось о необходимости определения объёмов каждого из хранилищ. Определите эти объёмы.

2. Определите общее расстояние, которое должен проехать путешественник, чтобы пересечь пустыню шириной 1 000 м.

3. В проведённом анализе принято, что последнее перед финишем хранилище должно находиться на расстоянии 500 км до окончания пустыни. Покажите, что размещение этого хранилища на более близком расстоянии (например, на 300 км от финиша) нерационально.

4. Разработайте программу (на языке программирования, которым вы владеете) для решения задачи о джипе в общем случае – при любой ширине пустыни, любом объёме топливного бака и любом расходе топлива на 1 км пути. Такая задача всегда имеет теоретическое решение, так как значение выражения в скобках для рассмотренного варианта имеет вид

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)}$$

и в общем случае будет являться возрастающим при увеличении значения n (как говорят в математике в таких случаях, «ряд является расходящимся»).

5. Решите рассмотренную задачу для случая, когда путешественнику после прибытия в точку A надо вернуться в точку старта.

В заключение заметим, что метод разработки алгоритма решения задачи, который мы использовали, – анализ и принятие решения начинается «от конца» цели, после чего он проводится по направлению к начальной постановке задачи (в рассмотренном случае – к ситуации на старте), а затем, если эти действия обратимы, происходит движение обратно от постановки к цели, – и называется «метод отрабатывания назад» [1]. Можно также сказать, что метод отрабатывания назад основан на предположении, что «следующая» частная задача уже решена, и состоит в последовательном определении условий, при которых это решение может быть получено [2]. Этот метод положен в основу динамического программирования – способа решения сложных задач, разработанного Ричардом Беллманом в 1950-х годах (см., например, статью «Кирпичи и динамическое программирование» в нашем журнале № 9 за 2012 год).

Литература

1. *Гудман С., Хидетниеми С.* Введение в разработку и анализ алгоритмов. – М.: Мир. – 1981.

2. *Крук Е.А., Овчинников А.А.* Методы программирования и прикладные алгоритмы: Учебное пособие. – СПб., Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2007.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Нужны ли способности?

Л.Д. Ландау принадлежит такой «сильный» довод в пользу изучения иностранного языка:

– Иностранные языки, увы, необходимы. Не забывайте, что для усвоения их, несомненно, не нужно особых способностей, поскольку английским языком неплохо владеют и очень тупые англичане.