

Смолянова Елена Григорьевна
Старший преподаватель кафедры
математического анализа факультета
математики и информационных технологий
ФГБОУ ВО «НИ МГУ им. Н.П. Огарёва»



Сверхспособности или точный расчёт?

Приглашаю читателей статьи стать участниками эксперимента по «запоминанию» большого объёма информации. Замечу, что для этого нам не понадобятся никакие специальные техники и приёмы, помогающие увеличивать объём памяти. Кстати сказать, совокупность этих приёмов составляет основу особой области знаний, которая называется мнемоникой. В рамках её разрабатываются системы особых упражнений и всяких хитроумных «запоминалок», которые используются, в том числе, для целей демонстрации сверхспособностей человека. Мы будем обсуждать способ «запоминания» раскраски большого количества квадратов, заполняющих треугольную таблицу. Эта таблица может иметь огромные размеры, так как она, вообще говоря, не ограничена ни справа, ни снизу. Почему мы применили кавычки в слове «запоминание»? Потому что ничего специально запоминать не придётся! Нам поможет другая наука – математика! Заранее уточним, что таблицы для проведения эксперимента мы будем

представлять свои. А оттого, что этих таблиц можно приготовить много и все они будут разные и больших размеров, то никто не усомнится в наших «сверхспособностях».

Итак, на рис. 1 представлен треугольник, составленный из квадратов, окрашенных в разные цвета: синий, зелёный и оранжевый. (Треугольную таблицу мы будем и далее называть треугольником). Мне пришлось по понятным причинам ограничить его размеры. Будем их описывать так: $n \times t$ (по количеству строк и столбцов соответственно). На рис. 1 – треугольник 52×25 . Обозначим его через T . Вообще, это мог быть треугольник, например, 152×75 или 1001×500 . Можно с уверенностью утверждать, что нет никаких внешних признаков, которые бы помогли выявить закономерность распределения различных по цвету квадратов в треугольнике T . Любому человеку покажется это распределение совершенно случайным и, следовательно, не возможным для запоминания.

Научимся определять цвет любой клеткой нашей секретной табли-

цы по её «координатам» ($n; m$). Эти координаты нам будет называть ведущий эксперимент, а мы будем

давать ответ, потратив на раздумья всего несколько секунд. Но сначала – теоретическая часть.

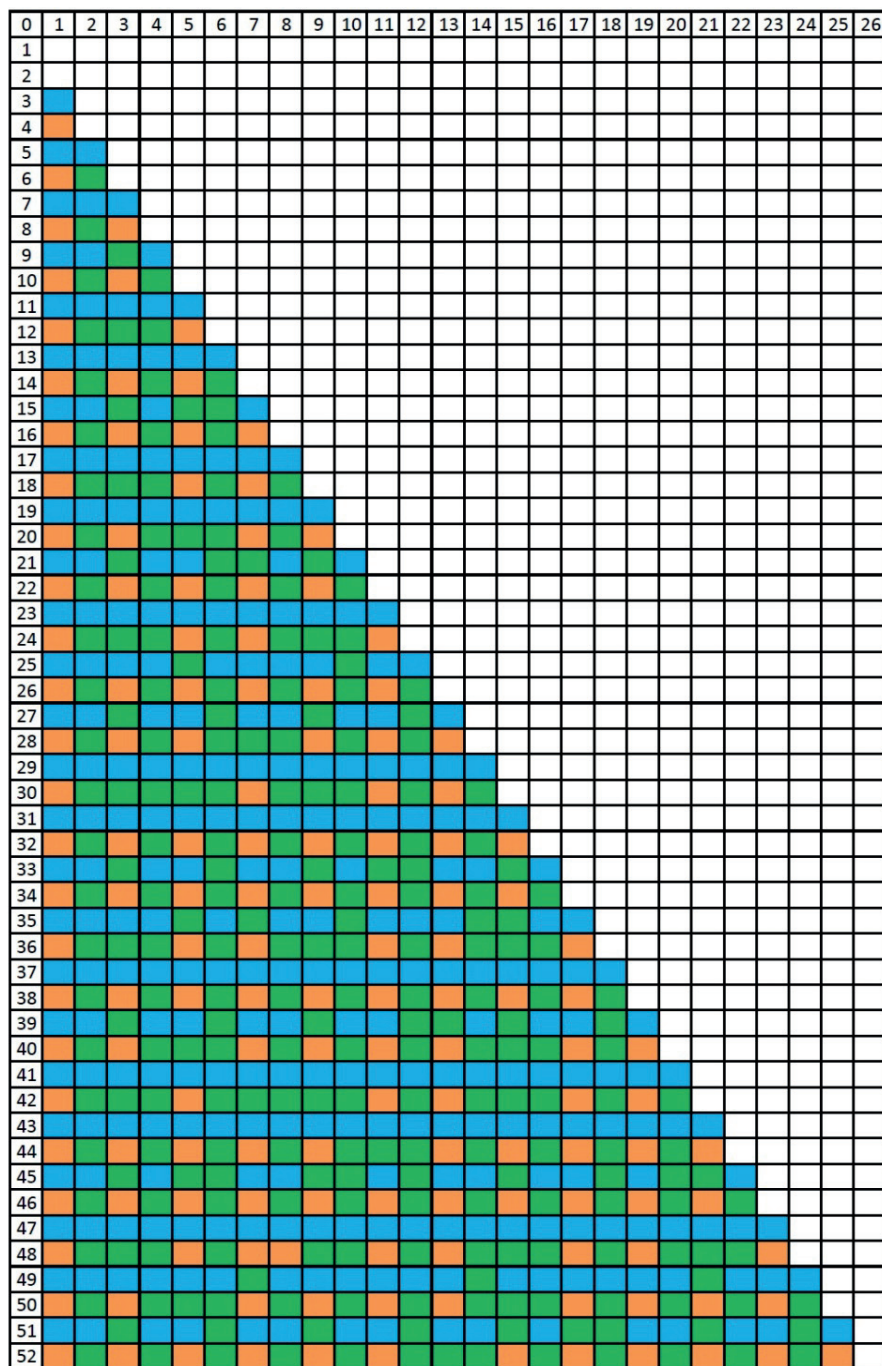


Рис. 1.

Интересные свойства функций

В основе «секрета» нашего фокуса – одно замечательное свойство функции действительной переменной. Напомним, какими особыми свойствами могут обладать некоторые функции. Это свойство чётности (нечётности), свойство периодичности. А ещё какие? При изучении раздела «Квадратные уравнения» школьники узнают о симметрии параболы как графика квадратичной функции относительно оси, содержащей её вершину. Аналитически это свойство выражается следующим тождеством:

$$f\left(-\frac{b}{a}-x\right)=f(x), \quad (x \in R)$$

(при стандартном обозначении коэффициентов квадратного трёхчлена). Как известно, функция $\varphi(x)$ такая, что $f(\varphi(x))=f(x)$ называется **инвариантом** для функции $f(x)$. Следовательно, $\varphi(x)=-\frac{b}{a}-x$ является инвариантом квадратичной функции.

Обсудим ещё одно особое свойство некоторых функций, которое тоже связано с симметрией графика. А именно, если

$$y=f(x) \Leftrightarrow x=f(y)$$

или, что то же,

$$f(f(x))=x$$

при всех допустимых значениях аргумента, то говорят, что функция $f(x)$ – **инволюция**. Графики инволюций симметричны относительно 1-го и 3-его координатных углов. В классе линейных функций таким свойством обладают функции вида

$$y(x)=a-x, \quad (a \in R).$$

В классе дробно-рациональных функций – функции вида

$$y(x)=\frac{ax+b}{cx-a}, \quad (a, b, c \in R, c \neq 0).$$

В классе квадратичных функций таких нет, потому что парабола не симметрична относительно биссектрисы координатных углов.

Правила формирования таблицы

Для примера рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{2x-1}{2x-2}, \quad (x \neq 1).$$

Нам будут интересны только положительные значения $f(x)$. Заме-

тим, что $f(x) > 0$ на интервале $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Тогда, с учётом симметрии графика и его непрерывности получаем, что множество соответствующих значений $f(x)$ есть тот же интервал $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Теперь можно начинать формировать таблицу для нашего экспе-

римента. Строки и столбцы занумеруем от 1 до произвольного натурального N . В таблице из рис. 1 $N=52$. Заполняются цветом (раскрашиваются) клетки таблицы – по строкам – по правилу: слева направо, сверху-вниз. Напомним, что клетке $(n; m)$ соответствует

дробь $x=\frac{m}{n}$. Поскольку по преды-

дущему $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, то

$$\frac{m}{n} < \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Формула связи «граничных» n и m :

$$m = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & \text{если } n - \text{нечётное число,} \\ \frac{n-2}{2}, & \text{если } n - \text{чётное число.} \end{cases}$$

Последствия такого рода связи – особый ступенчатый вид правого края треугольника T .

Представим последовательные этапы раскрашивания клеток таблицы. Обращаем внимание на тот факт, что подготовка таблицы требует времени и усилий (механических, в основном), но зато последующий процесс отгадывания цвета клетки будет происходить достаточно быстро. (Как вариант – этапы построения треугольника можно запрограммировать).

1) Дробь $\frac{1}{2}$ не удовлетворяет условию (1). Поэтому начинаем с клетки (3; 1), которая соответствует дроби $x = \frac{1}{3}$. Поскольку последняя несократима, то закрашиваем её в синий цвет (иначе мы бы покрасили её в зелёный цвет). Теперь **запомним**: после появления очередной синей клетки $(n; m)$, обязательно вычисляем значение функции в точке $x = \frac{m}{n}$ и закрашиваем новую клетку в оранжевый цвет. Например, поскольку $f(x) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}$, то клетку (4; 1) закрашиваем в оранжевый цвет. Обязательное условие: результат вычисления значения функции представлять несократимой дробью.

2) Возвращаемся на исходную позицию (3; 1) и переходим к ближайшей справа клетке на той же

строке. Но для клетки (3; 2) и всех последующих на третьей строке условие (1) – не выполняется. Поэтому спускаемся на строку ниже.

3) Очередная клетка (4; 1) уже закрашена. К клетке (4; 2) – не переходим: не выполняется условие (1). Спускаемся на строку ниже.

4) Неокрашенную клетку (5; 1) закрашиваем в синий цвет, поскольку дробь $\frac{1}{5}$ – несократима. Вычисляем, как договаривались в пункте 1), значение функции $f(x)$ в точке $\frac{1}{5}$.

Имеем: $f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{8}$. Находим и закра-

шиваем соответствующую клетку (8; 3) в оранжевый цвет. Далее – неокрашенная клетка (5; 2). Закрашиваем её в синий цвет, а поскольку $f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{6}$, то клетку (6; 1) закрашиваем в оранжевый цвет. (**Запоминаем**: оранжевый цвет появляется только в связи с расчётом значения функции $f(x)$). Клетка (5; 3) – не обсуждается. Спускаемся ниже.

5) Очередная клетка – (6; 2), т.к. (6; 1) – уже закрашена. **Запоминаем**: в случае сократимой дроби $\frac{m}{n}$ закрашиваем соответствующую клетку в зелёный цвет. Поэтому клетка (6; 2) становится зелёной и т. д.

Итак, основные правила закрашивания клеток нашей таблицы указаны в пунктах 1) – 5). Треугольник T построен именно по этому алгоритму.

Замечание 1. Как несложно проверить, квадратное уравнение $f(x) = x$ не имеет рациональных

решений. Следовательно, не случится такой ситуации, чтобы синюю клетку на шаге 1) пришлось бы перекрашивать в оранжевый цвет.

Замечание 2. Значению функции $f(x)$ в точке $x = \frac{m}{n}$ можно придать следующий вид:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{(n-2m)}{n+(n-2m)}.$$

Это значительно сократит время на вычисления. Например,

$$f\left(\frac{7}{23}\right) = \frac{(23-14)}{23+(23-14)} = \frac{9}{23+9} = \frac{9}{32}.$$

Можно даже как-то назвать разность $(n-2m)$. Например, весом клетки $(n; m)$: $r = (n-2m)$. Тогда надо сначала рассчитать вес r , а затем вычислять значение функции по формуле

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{r}{n+r}.$$

Показываем фокус: только математический расчет

Как же мы будем отгадывать цвета клеток по её координатам? Очень просто! Например, нам называют номер n строки и номер m столбца, т.е. координаты клетки.

Если $\text{НОД}(n; m) > 1$, то наш ответ: эта клетка **зелёного** цвета.

Если $\text{НОД}(n; m) = 1$, выполняем (в уме) следующие арифметические расчёты:

$$1) r = n - 2m,$$

$$2) f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{r}{n+r} = \frac{m^*}{n^*},$$

где $\frac{m^*}{n^*}$ — результат сокращения дроби $\frac{r}{n+r}$ (если это сокращение вообще понадобилось).

Тогда в случае $n^* > n$, т.е. если строка с номером n^* — ниже строки с номером n , наш ответ будет таким: эта клетка **синего** цвета. А если окажется, что $n^* < n$, т.е. строка с номером n^* — выше строки с номером n , то наш ответ: эта клетка **оранжевого** цвета. Вот и весь секрет!

Перейдём к тренировкам.

а) Пусть нас просят отгадать цвет клетки на пересечении 23-й строки и 7-го столбца. Мы это понимаем как задание пары $(n; m) = (23; 7)$. Так как дробь $\frac{7}{23}$ несократимая, то клетка точно не зелёная. Вес клетки:

$$r = 23 - 14 = 9.$$

$$\text{Следовательно, } f\left(\frac{7}{23}\right) = \frac{9}{23+9} = \frac{9}{32}$$

и поскольку $n^* = 32 > 23 = n$, то мы отвечаем, что клетка — синяя!

б) Пусть нас просят отгадать цвет клетки на пересечении 44-й строки и 13-го столбца. Дробь $\frac{13}{44}$ — несократимая. Так как $r = 44 - 26 = 18$, то $f\left(\frac{13}{44}\right) = \frac{18}{44+18} = \frac{18}{62} = \frac{9}{31}$ (заметим, что понадобилось сокращение дроби). А поскольку $n^* = 31 < 44 = n$, то цвет клетки — оранжевый!

с) Пусть нас просят отгадать цвет клетки на пересечении 52-й

строки и 18-го столбца. Это элементарно, поскольку соответствующая дробь – сократима. Ответ: эта клетка зелёного цвета!

Совершенно очевидно, что при определённом навыке ответы на подобные вопросы будут даваться достаточно стремительно.

Замечание 3. Выбор

$$f(x) = \frac{4x-3}{2x-4}, (x \neq 2)$$

реализовался бы в треугольник, изображённый на рис. 2. При этом

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{3n-4m}{4n-2m}.$$

Отгадываем, например, цвет клетки (29, 18). Так как

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{3 \cdot 29 - 4 \cdot 18}{4 \cdot 29 - 2 \cdot 18} = \frac{15}{80} = \frac{3}{16}$$

и при этом $16 < 29$, то отвечаем, что цвет – оранжевый.

Ясно, что в этом случае мы не смогли преобразовать формулу для вычисления $f\left(\frac{m}{n}\right)$ так удачно, как в

случае функции $f(x) = \frac{2x-1}{2x-2}$. По-

этому сначала надо подобрать подходящую функцию и только потом готовить соответствующую таблицу.

Замечание 4. В треугольнике на рис.1 все строки с простыми номерами n окрашены в синий цвет, а на рис. 2 на каждой такой строке есть и оранжевые клетки. Вопрос для любознательных: если продолжать построение треугольной таблицы, соответствующей функции $f(x) = \frac{2x-1}{2x-2}$, встретим ли мы когда-нибудь на «простой» строке оранжевую клетку?

В заключение обратим внимание на то неочевидное обстоятельство, что раскрашивание треугольной таблицы T (рис. 1) непосредственно связано с последовательной «расстановкой» пифагоровых дробей. Так называют рациональные положительные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} a+b+c=1; \\ a^2+b^2=c^2. \end{cases} \quad (2)$$

Например, синяя клетка (3; 1) связана с оранжевой клеткой (4; 1), потому что $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}$. Соответствующая тройка пифагоровых дробей

$$(a, b, c) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12}\right) = \left(\frac{4}{12}, \frac{3}{12}, \frac{5}{12}\right)$$

однозначно определяет пифагорову тройку (4,3,5). (Тройки (4,3,5) и (3,4,5) – не различаем. Поэтому клетка (4; 1) закрашивается в цвет, отличный от синего цвета). Объяснение этому «кроется» в системе зависимостей (2), которая равносильна такой:

$$\begin{cases} a=t; \\ b=\frac{2t-1}{2t-2}; \\ c=1-(a+b), \end{cases}$$

где $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Функциональная зависимость $b(t)$ и есть та самая $f(t)$. Таким образом, треугольник T связан ещё с одной математической задачей. Об этом можно рассказать уже в рамках другой статьи.

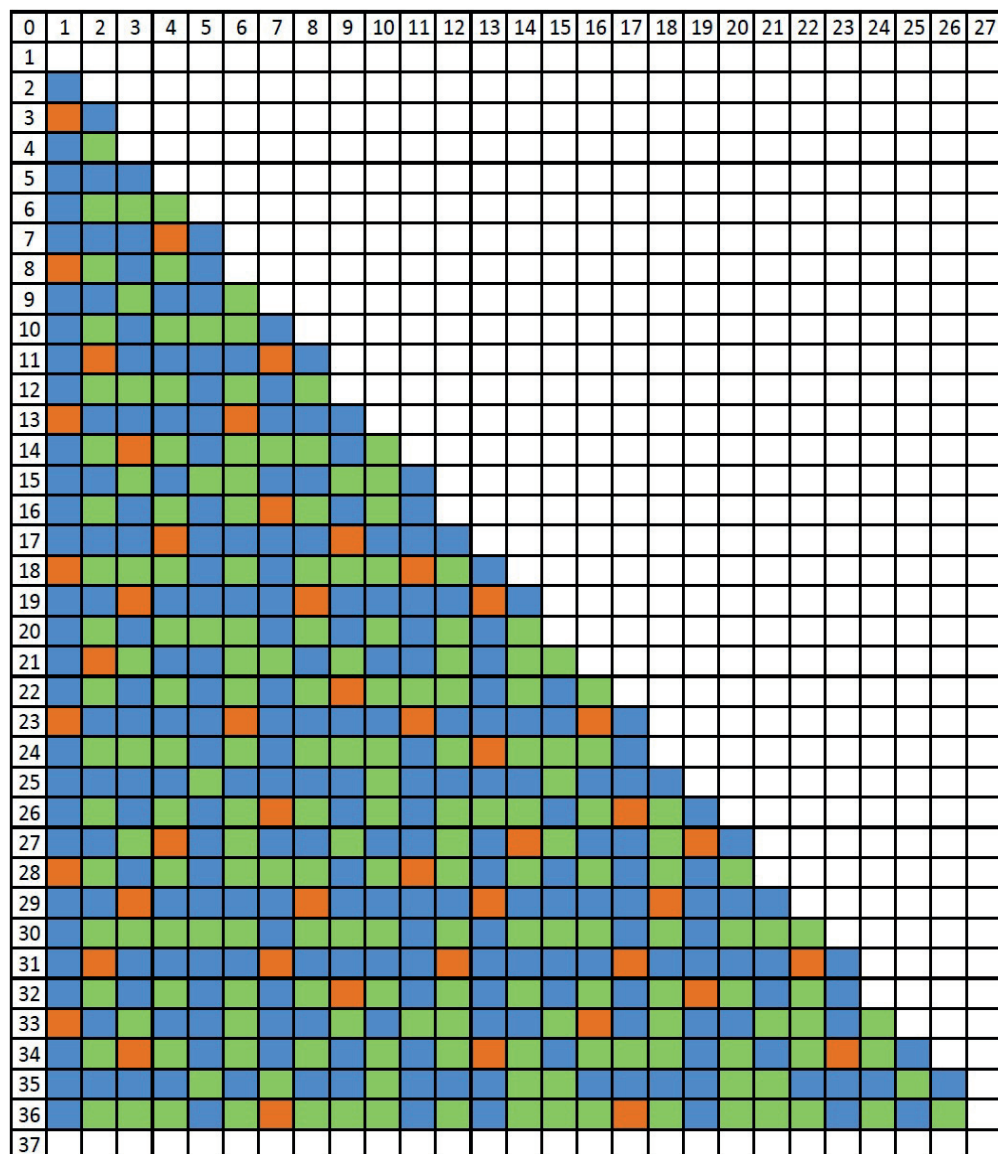


Рис. 2.