Глинка Надежда Владимировна
Преподаватель информатики школы ЧУ ОО «Европейская гимназия»; преподаватель подготовительных курсов факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова; эксперт ЕГЭ.

Способы решения задач на проверку истинности логического выражения (задача № 18 из ЕГЭ по информатике)

В статье приведены примеры решения двух типов задач на проверку истинности логических выражений, которые вызвали наибольшие трудности при сдаче экзамена ЕГЭ по информатике в 2014 – 2015 учебном году.

Используемые условные обозначения логических операций:

$\overline{A}$ – не А (отрицание, инверсия),

$A \wedge B$ – А и В (логическое умножение, конъюнкция),

$A \vee B$ – А или В (логическое сложение, дизъюнкция),

$A \to B$ – импликация (следование).

Задачи на поиск минимального и максимального числа

Задача 1. Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение: «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наименьшего натурального числа А выражение ДЕЛ(x, A) $\to$ (ДЕЛ(x, 33) $\vee$ ДЕЛ(x, 55)) тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение.

1) Введём обозначения

A_x=ДЕЛ(x, A), B =ДЕЛ(x, 33) ,

C = ДЕЛ(x, 55)

2) В этих обозначениях:

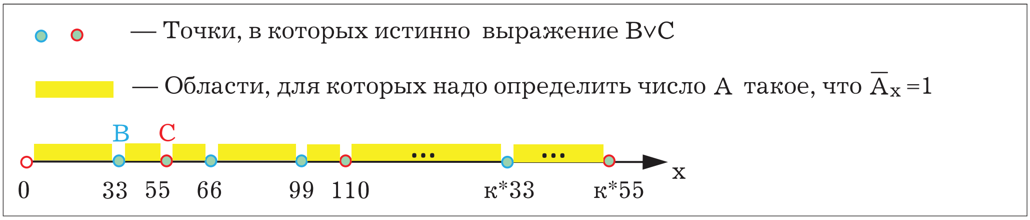
$$A_x \to (B \vee C) = 1$$

3) Раскроем импликацию:

$$A_x \to (B \vee C) = \overline{A}_x \vee B \vee C$$

выражение истинно для всех натуральных чисел X, которые делятся на 33, а также для чисел, которые делятся на 55.

Для наглядности представим условие задачи в графическом виде:



4) Чтобы выражение было тождественно истинно, необходимо, чтобы $\overline{A}_x = 1$, когда $B \vee C = 0 \Rightarrow B = 0$ и $C = 0$, то есть для оставшихся чисел, которые не делятся ни на 33, ни на 55.

5) Заметим, что нам надо определить условие A_x со знаком инверсии, т. е. ответить на вопрос:

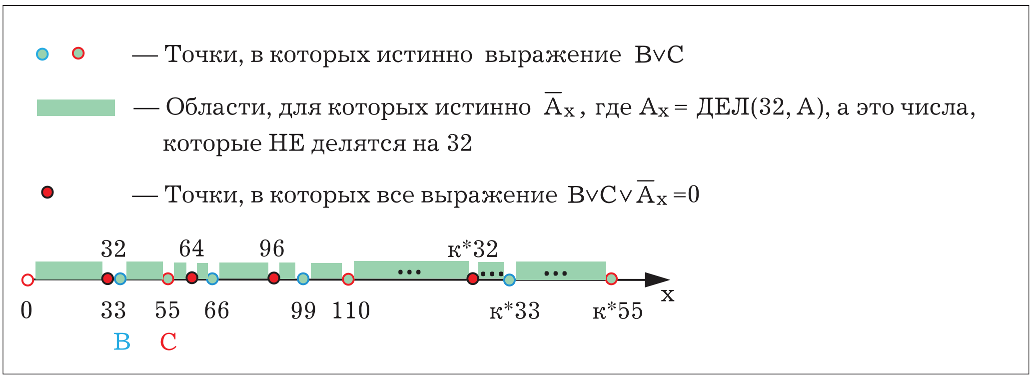
На какое же минимальное число НЕ делятся все остальные числа (закрашено цветом)?

6) Простейший ответ, который лежит на поверхности: $A_{xmin} = \min\{B;C\}$.

Действительно: $\overline{B} \vee B \vee C$ – всегда истина и $\overline{C} \vee B \vee C$ – всегда истина. Так как 33< 55, то A_x=B.

Можно задать вопрос: а почему не подходит какое-нибудь число <33, например, 32? Возьмём, например, 32. Тогда: A_{min}=32.

Посмотрим, как это выглядит на рисунке:



Из рисунка видно, что для чисел, которые в общем случае делятся на 32 (и не делятся на 33 и 55), все выражение ЛОЖНО: B – ложь; C – ложь; $\overline{A}_x$ – ложь. Это, например, числа 32; 64; 96.

Аналогичную картинку можно нарисовать для всех натуральных чисел <32.

Ответ. 33.

Задача 2. Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наибольшего натурального числа A выражение

$$\neg ДЕЛ(x,A) \rightarrow (\neg ДЕЛ(x,33) \wedge \neg ДЕЛ(x, 55))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение.

1) Введём обозначения

A_x=ДЕЛ(x,A), B=ДЕЛ(x,33), C=ДЕЛ(x,55).

2) В этих обозначениях:

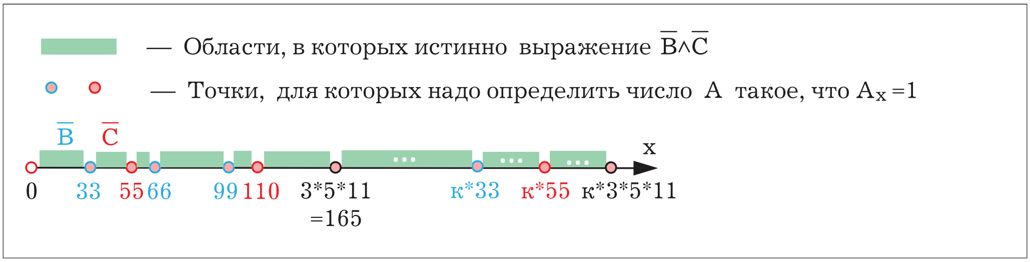
$$\overline{A}_x \to (\overline{B} \wedge \overline{C}) = 1$$

3) Раскроем импликацию:

$$\overline{A}_x \to (\overline{B} \wedge \overline{C}) = A_x \vee \overline{B} \wedge \overline{C}$$

Выражение уже истинно для всех натуральных чисел X, которые не делятся ни на 33, ни на 55 одновременно ($\overline{B} \wedge \overline{C} = 1$, т. е. не делятся на произведение 3*5*11), то есть для таких чисел выражение истинно независимо от A_x. И выражение ложно, если X делится на что-то одно или делится на 3*5*11 (и на 33, и на 55 одновременно).

Представим условие задачи в графическом виде:



4) Чтобы выражение было тождественно истинно, необходимо, чтобы $A_x = 1$, когда $\overline{B} \wedge \overline{C} = 0$.

Применим отрицание к обеим частям и посмотрим, при каких значениях X оно выполняется.

$$B \vee C = 1$$

Это означает: либо X делится на 33 и не делится на 55 (например, 66=2*3*11), либо X делится на 55 и не делится на 33 (например, 110=2*5*11), либо X делится на 33 и на 55 одновременно (например, 165=3*5*11). При таких X: $\overline{B} \wedge \overline{C} = 0$.

5) Заметим, чтобы определить условие A_x, надо ответить на вопрос: на какое же максимальное число делятся оставшиеся числа (точки, закрашенные красным)?

Итак, чтобы общее выражение при этом продолжало оставаться истинным, число A должно быть общим делителем чисел 33 и 55 плюс условие A – max. То есть

$$A = \text{НОД}(33, 55) = 11$$

Ответ. 11.

Задача 3. Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наименьшего натурального числа A выражение

$$(\text{ДЕЛ}(x, 15) \wedge \neg\text{ДЕЛ}(x, 39)) \to$$
$$\to (\neg\text{ДЕЛ}(x, A) \vee \neg\text{ДЕЛ}(x, 15))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение.

1) Введём обозначения:

A_x = ДЕЛ(x, A), B = ДЕЛ(x, 15), C = ДЕЛ(x, 39).

2) В этих обозначениях:

$$(B \wedge \overline{C}) \to (\overline{A}_x \vee \overline{B}) = 1$$

3) Раскроем импликацию:

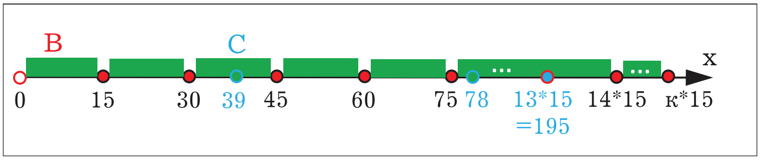
$$(\overline{B} \vee C) \vee (\overline{A}_x \vee \overline{B}) = 1$$

и преобразуем выражение:

$$\overline{B} \vee C \vee \overline{A}_x = 1$$

Выражение уже истинно, когда число не делится на 15 ($\overline{B} = 1$) независимо от C и $\overline{A}_x$.

Представим условие задачи в графическом виде:



4) Осталось обеспечить истинность выражения для чисел вида K*15, где K – натуральное число.

5) Для оставшихся чисел: когда число K делится на 13, числа вида K*15 всегда делятся на 39, и всё выражение будет опять истинным.

6) Заметим, что нам осталось определить условие A_x со знаком инверсии, т.е. ответить на вопрос: на какое же минимальное число НЕ делятся оставшиеся числа (точки, закрашенные красным)?

7) Необходимо, чтобы $\overline{A_x} = 1$, когда $\overline{B} + C = 0$, т. е. $\overline{A_x} = \overline{(\overline{B} \vee C)} = B \wedge \overline{C}$

Сформулируем словами: число делится на 15 и не делится на 39.

Заметим, что:

$15 = 5*3$, $39 = 13*3$

Если обозначить: C_5 – число делится на 5; C_3 – число делится на 3; C_{13} – число делится на 13, то эти слова можно записать так:

$$C_3 \wedge C_5 \wedge \overline{(C_5 \wedge C_{13})} = C_3 \wedge C_5 \wedge (\overline{C_5} \vee \overline{C_{13}}) =$$

$$= C_3 \wedge C_5 \wedge \overline{C_{13}} = 1$$

Итак, оставшиеся числа НЕ делятся на 13 ($\overline{C_{13}} = 1$).

8) Таким образом, $A_{max} = 13$.

Ответ. 13.

Совет: Отображайте уже известные данные на числовой оси. Наглядность позволит быстрее найти ответ.

Задачи на поразрядные операции

Задача 1. Введём выражение M & K, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное **десятичное** число A такое, что выражение

$$(X \,\&\, 102 <> 0) \to ((X \,\&\, 6 = 0) \to$$
$$\to (X \,\&\, A <> 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X). Ответ запишите в десятичной системе.

Решение.

1) Обозначим

$$P = (X \,\&\, 102 = 0),\ Q = (X \,\&\, 6 = 0),$$
$$A_x = (X \,\&\, A = 0)$$

Обращаю ваше внимание, что лучше обозначать выражения единообразно, т. е. я рекомендую не обозначать, например: P = (X & 102 = 0) – со знаком “=”, а Q = (X & 6 <> 0) – со знаком “<>”

2) Перепишем и преобразуем исходное выражение, используя законы логики:

$$A \to B = \overline{A} \vee B \text{ (импликация)},$$

$$\overline{A} \vee \overline{B} = \overline{A \wedge B} \text{ (закон де Моргана)}:$$

$$\overline{P} \to (Q \to \overline{A_x}) = P \vee (Q \to \overline{A_x}) =$$

$$= P \vee \overline{Q} \vee \overline{A_x} = 1$$

3) Теперь определимся, что значит X & 102 = 0 и что значит X & 102 <> 0.

Для этого переведём число 102 в двоичную систему $102 = 1100110_2$ и будем говорить, что у числа 102 в двоичном виде биты, соответствующие 1, 2, 5, 6 степени двойки (в дальнейшем 2, 4, 32 и 64 **разряд**), равны 1.

4) теперь, рассмотрим побитовое умножение двоичного числа 102 на число X.

номер разряда		128	64	32	16	8	4	2	1
102	=		1	1	0	0	1	1	0
X	=		X_6	X_5	X_4	X_3	X_2	X_1	X_0
X&102	=		X_6	X_5	0	0	X_2	X_1	0

После выполнения побитового умножения остаются только те биты числа X, для которых соответствующие разряды числа 102 равны 1, остальные = 0, поэтому:

1) условие X & 102 = 0 означает, что разряды {2, 4, 32, 64} числа X должны быть **нулевые**;

2) условие X & 102 <> 0 означает, что среди разрядов {2, 4, 32, 64} числа X есть хоть один ненулевой (при побитовом умножении не должен получиться 0 в результате).

Итак, условие P означает, что разряды {2, 4, 32, 64} двоичного числа X – **нулевые**, т.е. для двоичных чисел вида:

номер разряда		128	64	32	16	8	4	2	1
X	=	*	0	0	*	*	0	0	*

Или, по-другому, для чисел вида:

*…*00**00*

исходное выражение истинно (* – обозначает, что на этом месте может стоять либо 1, либо 0).

А нам надо, чтобы выражение было истинным для любого X. Посмотрим, что добавит условие $\overline{Q}$ = (X & 6 <> 0). Для этого переведём число 6 в двоичную систему $6 = 110_2$, условие $\overline{Q}$ означает, что среди разрядов {2, 4} есть **ненулевые**, т. е. возможны следующие варианты числа X, когда всё исходное выражение истинно:

*…*01*
*…*10*
*…*11*

Итак, условие $\overline{Q}$ означает, что исходное выражение будет истинным для всех X, кроме тех, двоичный вид которых следующий: *…*00*, но условие P означает, что разряды {2, 4} все же могут быть **нулевыми**, не нарушая истинности всего выражения, при условии, что разряды {32, 64} числа X – **нулевые**.

*…*****01*
*…*****10*
*…*****11*
*…*00**00*

Зададимся вопросом, какие же числа X всё ещё делают исходное выражение ложным? Вот они:

*…*10**00*
*…*01**00*
*…*11**00*

Это можно охарактеризовать так: выражение ложно, когда среди разрядов {32, 64} есть ненулевые, а разряды {2, 4} при этом нулевые. Например:

$$1000000_2 = 64,\ 100000_2 = 32,\ 1100000 = 96_2 \text{ и т. д.} \qquad (1)$$

По условию задачи надо найти такое натуральное наименьшее A, что условие $\overline{A}_x$ = (X & A <> 0) сведёт исходное выражение к истине при любых X, то есть чтобы при указанных выше числах (1) исходное выражение стало бы истинным. Речь идёт о разрядах {32, 64}, когда хоть один из них ненулевой (см.(1)), все выражение **может** оказаться ложным (когда, например, разряды {2, 4} нулевые).

Поэтому, наименьшее натуральное А должно быть равно $96_{10} = 1100000_2$ (заметим, что если бы искали максимальное число, то это $1...1111111_2$).

Действительно, условие $\bar{A}_x = (X \ \&\ 96 <> 0)$ принимает значение истины при X вида (1), а также $\bar{A}_x$ принимает значение истины для чисел вида:

*...*10*****
*...*01*****
*...*11*****

Другими словами, $\bar{A}_x$ принимает значение истины, когда в числе X среди разрядов {32, 64} есть ненулевой. При побитовом умножении числа 96 на любое из таких чисел, будет не 0.

Ответ. $A = 96$.

Формальное (быстрое) решение. Если шаблон логического выражения, к которому свелась задача, выглядит так:

$$P \vee \bar{Q} \vee \bar{A}_x = 1,$$

и надо найти A_{min} (это уже число), то формальное и быстрое решение может выглядеть следующим образом:

номер разряда	128	64	32	16	8	4	2	1	
	...	1	1	0	0	1	1	0	Пишем двоичное число, соответствующее условию P(102)
	...	0	0	0	0	1	1	0	Пишем двоичное число, соответствующее условию Q(6)
	...	1	1	0	0	0	0	0	Ответом является число, соответствующее поразрядной операции: $P \wedge \bar{Q}$

Задача 2. Введём выражение M & K, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наибольшее натуральное **десятичное** число А такое, что выражение:

$$(X \ \&\ A <> 0) \to ((X \ \&\ 18 = 0) \to$$
$$\to (X \ \&\ 3 <> 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X).

Решение.

1) Обозначим:

$$P = (X \ \&\ 18 = 0), Q = (X \ \&\ 3 = 0),$$
$$A_x = (X \ \&\ A = 0)$$

2) Перепишем и преобразуем исходное выражение, используя законы логики:

$$A \to B = \bar{A} \vee B \text{ (импликация)},$$
$$\bar{A} \vee \bar{B} = \overline{A \wedge B} \text{ (закон де Моргана)}:$$
$$\bar{A}_x \to (P \to \bar{Q}) = A_x \vee (P \to \bar{Q}) =$$
$$= A_x \vee \bar{P} \vee \bar{Q} = A_x \vee \overline{P \wedge Q} = 1$$

Получаем, что A_x должно быть истиной, когда $\overline{P \wedge Q} = 0$, значит $A_x = P \wedge Q$.

3) Переведем число 18 в двоичную систему: $18 = 10010_2$,

4) Теперь рассмотрим побитовое умножение двоичного числа 18 на число X:

номер разряда		64	32	16	8	4	2	1
18	=	...	0	1	0	0	1	0
X	=	...	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	x_0
X&18	=	...	0	x_4	0	0	x_1	0

Итак, условие P= (X & 18=0) означает, что у числа X разряды {2,16} должны быть нулевые.

5) Переведём теперь число 3 в двоичную систему: $3 = 11_2$,

6) Теперь рассмотрим побитовое умножение двоичного числа 3 на число X:

номер разряда		64	32	16	8	4	2	1
3	=	...	0	0	0	0	1	1
X	=	...	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	x_0
X&3	=	...	0	0	0	0	x_1	x_0

Условие Q означает, что у числа X разряды {1, 2} должны быть нулевые;

$P \wedge Q = 1$ (означает, что P = = (X & 18 = 0) и Q = (X & 3 = 0) должны выполняться одновременно), т. е. числа X, удовлетворяющие условию $P \wedge Q = 1$, должны иметь нули во всех столбцах, где у числа 18 ИЛИ у числа 3 в двоичном виде стоят 1.

номер разряда		64	32	16	8	4	2	1
18	=	...	0	1	0	0	1	0
3	=	...	0	0	0	0	1	1
P∧Q	=	...	0	1	0	0	1	1
X		...	x_5	0	x_3	x_2	0	0

7) Итак, ищем такое A (далее A_{max}), которое при побитовом умножении на предложенные X даст 0:

$$(X \,\&\, A_{max} = 0).$$

8) $A_{max} = 10011_2$ (заметим, что если бы искали *минимальное* натуральное число, то это 1_2).

Ответ. $A_{max} = 19$.

Формальное (быстрое) решение

Если шаблон логического выражения, к которому свелась задача, выглядит так:

$$A_x \vee \overline{P \wedge Q} = 1$$

и надо найти A_{max} (это уже число), то формальное и быстрое решение может выглядеть так:

номер разряда	64	32	16	8	4	2	1	
	...	0	1	0	0	1	0	Пишем двоичное число, соответствующее условию P(18)
	...	0	0	0	0	1	1	Пишем двоичное число, соответствующее условию Q(3)
	...	0	1	0	0	1	1	Ответом является число, соответствующее поразрядной операции: P∨Q

Есть различные способы объяснения решения таких задач. Объединяет их то, что приходится строго и логично рассуждать в каждом отдельном случае и нет формального способа, который приводит к успешному их решению (то есть делай раз, делай два, … получим ответ). Тем, у кого каждый балл на счету, придётся строго и аккуратно рассуждать, так как вы не можете позволить себе ошибиться в задаче, ход решения которой известен. Радует то, что такая задача только одна.

Схемы задач

Зададимся вопросом, а какие существуют варианты именно такой задачи? Для этого рассмотрим различные схемы и попытаемся понять реальность появления таких задач.

Что я называю схемой, покажу на примере. Пусть

$$P = (X \,\&\, 18 = 0),\ Q = (X \,\&\, 3 = 0),$$
$$A_x = (X \,\&\, A = 0).$$

Схема	Ищем число		результат	Ищем число		результат
$P \vee \overline{Q} \vee \overline{A_x} = 1$	1)	$A_{min}(A_x \neq 0)$	$P \wedge \overline{Q} = 10000_2$ (побитовая операция)	2)	$A_{max}(A_x \neq 0)$	$=1…1_2$
$P \vee \overline{Q} \vee A_x = 1$	3)	$A_{min}(A_x = 0)$	$A_{min} = 1$ (это только в данном случае, т. к. для X=1 истинно $\overline{Q}$, правильнее A=0, но по условию A должно быть натуральное)	4)	$A_{max}(A_x = 0)$	$=Q=11_2$

номер разряда		64	32	16	8	4	2	1
18	=	…	0	1	0	0	1	0
X&18 = 0			x_5	0	x_3	x_2	0	x_0
3	=	…	0	0	0	0	1	1
X&3 ≠ 0		…	x_5	x_4	x_3	x_2	0	1
		…	x_5	x_4	x_3	x_2	1	0
		…	x_5	x_4	x_3	x_2	1	1

Перечислим все значения X, при которых $P \vee \overline{Q} = 0$

*…*10000

*…*10100

*…*11000

*…*11100

Сформулируем словами, что мы ищем:

1) A_{min}, при побитовом умножении на указанные X результат должен быть ≠ 0.

Ответ. $10000_2 = P \wedge \overline{Q}$ *(разобрано в статье).*

2) A_{max}, при побитовом умножении на указанные *X*, результат должен быть ≠ 0.

Ответ. $1..1_2$ *(сказано в статье)*

3) A_{min}, при побитовом умножении на указанные X результат должен быть = 0.

Ответ. 1_2 (0).

4) A_{max}, при побитовом умножении на указанные X результат должен быть = 0.

Ответ. 11_2 = Q

Схема		Ищем число	результат		Ищем число	результат
$\overline{P}\vee\overline{Q}\vee\overline{A_x}=1$	1)	$A_{min}(A_x\neq 0)$	$1\ldots101100_2$	2)	$A_{max}(A_x\neq 0)$	$1\ldots1_2$
$\overline{P}\vee\overline{Q}\vee A_x=1$	3)	$A_{min}(A_x=0)$	A=min{P, Q} (правильнее A=*0*, но по условию, A- натуральное)	4)	$A_{max}(A_x=0)$	$P\vee Q=10011_2$ (побитовая операция)

номер разряда		64	32	16	8	4	2	1
18	=	…	0	1	0	0	1	0
3	=	…	0	0	0	0	1	1
		…	x_5	0	x_3	x_2	0	0

Перечислим все числа *X*, при которых:
$\overline{P}\vee\overline{Q}=0$ или $P\wedge Q=1$.
Они должны иметь нули во всех столбцах, где у числа 18 или у числа 3 в двоичном виде стоят 1:
*…*0**00

Сформулируем словами, что мы ищем:

1) A_{min}, при побитовом умножении на указанные X результат должен быть ≠ 0.

Ответ. $1\ldots101100_2$.

2) A_{max}, при побитовом умножении на указанные X результат должен быть ≠ 0.

Ответ. $1..1_2$.

3) A_{min}, при побитовом умножении на указанные X результат должен быть = 0.

Ответ. 1_2 (0) *(сказано в статье).*

4) A_{max}, при побитовом умножении на указанные *X*, результат должен быть = 0.

Ответ. $10011_2 = P\vee Q$ *(разобрано в статье).*

Схема		Ищем число	результат		Ищем число	результат
$P\vee Q\vee\overline{A_x}=1$	1)	$A_{min}(A_x\neq 0)$	A=min{P, Q} =11_2 (правильнее A=0, но по условию A-натуральное)	2)	$A_{max}(A_x\neq 0)$	$1\ldots1_2$
$P\vee Q\vee A=1$	3)	$A_{min}(A_x=0)$	НЕ СУЩЕСТВУЕТ (кроме 0)	4)	$A_{max}(A_x=0)$	НЕ СУЩЕСТВУЕТ (кроме 0)

номер разряда		64	32	16	8	4	2	1
18	=	…	0	1	0	0	1	0
3	=	…	0	0	0	0	1	1
		…	x_5	0	x_3	x_2	1	0
		…	x_5	0	x_3	x_2	1	1
		…	x_5	1	x_3	x_2	1	0
		…	x_5	1	x_3	x_2	1	1
		…	x_5	1	x_3	x_2	0	1

Перечислим все числа X, при которых:
$P\vee Q=0$ или $\overline{P}\wedge\overline{Q}=1$.
Они имеют хоть одну 1 в столбцах, где у двоичного вида числа 18 стоят 1, и одновременно имеют хоть одну 1 в столбцах, где у двоичного вида числа 3 стоят 1:

*…*10
*…*11
*…*1**10
*…*1**11
*…*1**01

Сформулируем словами, что мы ищем:

1) A_{min}, при побитовом умножении на указанные X результат должен быть $\neq 0$.

Ответ. $\min\{P, Q\} = 11_2$.

2) A_{max}, при побитовом умножении на указанные X результат должен быть $\neq 0$

Ответ. $1...1_2$.

3) A_{min}, при побитовом умножении на указанные X результат должен быть $= 0$.

Ответ. НЕ СУЩЕСТВУЕТ.

4) A_{max}, при побитовом умножении на указанные X результат должен быть $= 0$.

Ответ. НЕ СУЩЕСТВУЕТ.

Примечание. Схемы, выделенные зелёным, использовались в реальном экзамене ЕГЭ. По рассуждениям выше есть ощущение, что из разобранных задач только они и имеют смысл.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Ключ от сердца

Как-то дочка выдающегося российского физика (создателя советской научной школы) Абрама Фёдоровича Иоффе захотела увидеть, чем он занимается в институте. Приведя её в одну из лабораторий, Иоффе включил какой-то неведомый ей прибор. Девочка увидела на экране ритмично пульсирующее сердце и ключ (тот лежал в нагрудном кармане Абрама Федоровича). Именно он-то и привлёк её внимание.

– Что это за ключ? – с любопытством спросила дочка.

– Ключ от моего сердца, – ответил ей отец.