



Златопольский Дмитрий Михайлович

Кандидат технических наук, доцент.

*Доцент кафедры информатики и прикладной математики
Московского городского педагогического университета;
организатор и директор Музея истории
вычислительной техники.*

Рекуррентные соотношения

В статье описываются методы вычисления значений элементов числовых последовательностей, заданных так называемым «рекуррентным соотношением», средствами программирования.

И в математике, и в информатике часто встречаются последовательности чисел, в которых каждый последующий член выражается через предыдущие. Например, такими последовательностями являются прогрессии: арифметическая и геометрическая. В первой из них, как известно, каждый последующий член равен предыдущему, увеличенному на разность прогрессии: $a_i = a_{i-1} + d$, во второй – предыдущему, умноженному на знаменатель прогрессии: $a_i = a_{i-1} \times k$.

Формулы, выражающие очередной член последовательности через один или несколько предыдущих членов, называют «рекуррентными соотношениями».

Как вычислить n -й член последовательности, заданной рекуррентным соотношением? Иногда для расчета n -го члена есть простая формула. Например, для арифметической про-

грессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$. Чаще, однако, такой простой формулы нет или она неизвестна. В этом случае члены последовательности вычисляют по рекуррентному соотношению один за другим от $i = 1$ до $i = n$.

Возможны два способа таких вычислений с помощью программы:

- 1) с использованием массивов;
- 2) без использования массивов.

Первый способ проиллюстрируем на примере следующей последовательности: 2, 3, 5, 9, 17, ..., задаваемой рекуррентным соотношением $a_i = 2 \times a_{i-1} - 1$, $a_1 = 2$.

Составим программу для расчета n -го члена такой последовательности. Используем при её описании школьный алгоритмический язык (система КуМир). Его русский синтаксис делает программу максимально понятной и легко переносимой на любой другой язык программирования.

Так как номер искомого члена последовательности заранее неизвестен, то массив, в котором будут храниться вычисляемые значения, следует описать, так сказать, с запасом, например, на 100 элементов (то есть принимаем, что $n \leq 100$).

```

цел k          | константа – размер массива
k:=100
алг Расчет1
нач цел таб a[1:k], цел i, n
вывод нс, "Задайте номер искомого члена последовательности"
ввод n
a[1]:=2          | Первый член последовательности
нц для i от 2 до n
    a[i]:=2*a[i-1]-1 | Очередные члены последовательности
кц
вывод нс, "Искомый член последовательности равен ", a[n]
кон

```

Недостатком такого способа является то, что, хотя нас интересует лишь n -й член последовательности, в процессе выполнения программы компьютер вычисляет и хранит в памяти все члены последовательности от 1-го до n -го. Кроме того, в памяти выделяется место для большого количества неиспользуемых элементов массива, описанного, как указывалось, с запасом.

Перечисленных недостатков лишен второй метод вычислений – без использования массивов. Действительно, если для вычисления сле-

будем вычислять члены последовательности по заданному рекуррентному соотношению один за другим от $i = 1$ до $i = n$, запоминая значение i -го члена такой последовательности в элементе $a[i]$ массива a :

дующего члена последовательности нужно знать только значение предыдущего, то можно не запоминать все члены последовательности в массиве, а иметь одну величину a , и при увеличении номера i изменять ее значение; для рассмотренного примера: $a_i = 2 \times a_{i-1} - 1$. Другими словами, рекуррентное соотношение $a_i = 2 \times a_{i-1} - 1$ можно заменить соотношением $a_{\text{новое}} = 2 \times a_{\text{старое}} - 1$, которое записывается в виде оператора присваивания $a := 2 \times a - 1$. Соответствующая программа:

```

алг Расчет2
нач цел a, i, n
вывод нс, "Задайте номер искомого члена последовательности"
ввод n
a:=2          | Первый член последовательности
нц для i от 2 до n
    a:=2*a-1
кц
вывод нс, "Искомый член последовательности равен ", a
кон

```

В рассмотренных примерах (прогрессии и др.) очередной член последовательности выражается только через один предыдущий элемент. Часто число элементов, от которых зависит очередной член последовательности, больше 1. Рассмотрим, например, последовательность чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Конечно, вы уже установили закон, по которому она строится – каждый следующий член последовательности, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Знаете вы, наверное, и о том, что такую последовательность называют последовательностью Фибоначчи [1]. Для нее рекуррентное соотношение имеет вид: $a_i = a_{i-2} + a_{i-1}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.

Очевидно, что если для расчета n -го члена последовательности Фибоначчи не использовать массивы, то в процессе вычислений надо хранить значения не одного, а двух предшествующих элементов. Разработаем соответствующую программу.

```
алг Последовательность_Фибоначчи
нач цел n, очер, пред, предпред, i
вывод нс, "Задайте номер искомого члена последовательности"
ввод n
пред:=1
предпред:=1
нц для i от 1 до n-2
    очер:=пред+предпред
    предпред:=пред      |Внимание! Именно
    пред:=очер          |в таком порядке
кц
вывод нс, "Искомый член последовательности равен ", очер
кон
```

В заключение рассмотрим интересный пример использования рекуррентных соотношений [2]. Пусть, например, требуется вычислить общее сопротивление гирлян-

Используем в ней следующие основные величины:

n – номер искомого члена последовательности;

очер – очередной рассчитываемый элемент последовательности;

пред – элемент, предшествующий очередному элементу;

предпред – элемент, предшествующий элементу *пред*.

Сначала имеем:

пред=1; предпред=1

Затем рассчитываем очередной (третий) элемент:

след=пред+предпред

после чего «готовимся» к расчёту следующего элемента:

предпред=пред

пред=след

и определяем его:

очер=пред+предпред

и т.д.

Ясно, что для определения n -го члена последовательности необходимо провести $(n-2)$ повторений описанных действий:

ды из n параллельно соединенных лампочек (каждая сопротивлением R_2), если соединительные провода имеют сопротивление R_1 каждый (рис. 1):

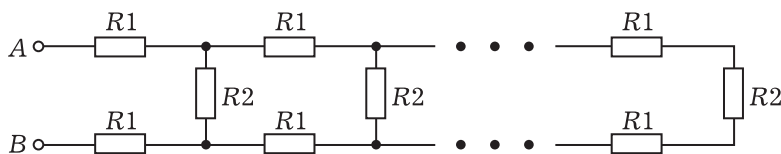


Рис. 1

Гирлянда с одной лампочкой выглядит так, как показано на рис. 2, а её сопротивление (элементы соединены последовательно) равно:

$$a_1 = 2R_1 + R_2.$$

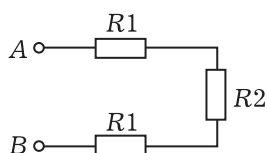


Рис. 2

Гирлянду с двумя лампочками (рис. 3):

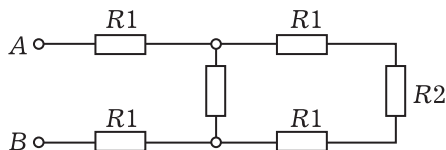


Рис. 3

можно представить по-другому (рис. 4):

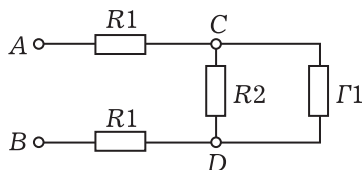


Рис. 4

где \$G_1\$ – гирлянда с одной лампочкой.

Тогда общее сопротивление схемы на рис. 4 можно определить следующим образом. На участке CD параллельно соединены сопротивления \$R_2\$ и \$a_1\$, где \$a_1\$ – сопротивление

гирлянды с одной лампочкой, то есть общее сопротивление участка CD равно:

$$a_{CD} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{a_1}} = \frac{a_1 \cdot R_2}{a_1 + R_2}.$$

Так как участки AC, CD и DB соединены последовательно, то общее сопротивление схемы с двумя лампочками равно:

$$a_2 = R_1 + R_1 + a_{CD} = 2R_1 + \frac{a_1 \cdot R_2}{a_1 + R_2}.$$

Рассуждая аналогично, схему с \$i\$ лампочками можно рассматривать в виде:

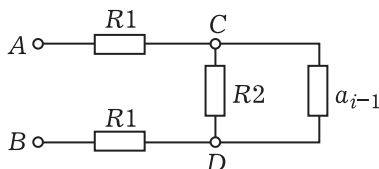


Рис. 5

где \$a_{i-1}\$, где \$a_{i-1}\$ – сопротивление гирлянды с \$(i-1)\$ лампочками, а общее сопротивление схемы на рис. 4 определить как:

$$a_i = 2R_1 + \frac{a_{i-1} \cdot R_2}{a_{i-1} + R_2}.$$

Таким образом, мы получили рекуррентное соотношение для расчета сопротивления исходной схемы. Программу для определения общего сопротивления схемы при любом количестве лампочек подготовьте самостоятельно.

Другие задания для самостоятельной работы

1. В приведённой программе расчёта n -го члена последовательности Фибоначчи последние вычисленные значения величин *предпред* и *пред* не используются, что не совсем рационально. Изменить программу таким образом, чтобы эти значения использовались для определения очередной искомой величины.

2. Начав тренировки, лыжник в первый день пробежал 10 км. Каждый следующий день он увеличивал пробег на 10 % от пробега предыдущего дня. Определить, какой суммарный путь он пробежал за первые 7 дней тренировок.

3. В некотором году (назовем его условно первым) на участке в 100 гектар средняя урожайность ячменя составила 20 центнеров с гектара. После этого каждый год площадь участка увеличивалась на 5 %, а средняя урожайность на 2 %. Определить, какой урожай будет собран за первые шесть лет.

4. Последовательность чисел $a_0, a_1, a_2, \dots$ образуется по закону: $a_0 = 1$; $a_k = a_{k-1} + 1/k$ ($k = 1, 2, \dots$). Дано натуральное число n ($n \geq 2$). Получить a_n .

5. Последовательность чисел $v_1, v_2, v_3, \dots$ образуется по закону:
 $v_1 = v_2 = 0$; $v_3 = 1,5$

$$v_i = \frac{i+1}{i^2+1} v_{i-1} - v_{i-2} v_{i-3}, \quad i = 4, 5, \dots$$

Дано натуральное число n ($n \geq 4$).
Получить v_n .

6. Составить программу вычисления суммы:

$$1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!},$$

где $k! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k$ (так называемый «факториал числа k »). При расчетах операцию возведения в степень и функцию для расчета факториала числа k не использовать.

7. Найти 10-й член последовательности, начинающейся с числа 2,5, в которой каждый следующий член равен сумме обратных величин всех предыдущих.

8. При положительном a рекуррентное соотношение

$$x_i = \frac{x_{i-1}}{2} + \frac{a}{2x_{i-1}}$$

можно использовать для вычисления $\sqrt{a}$, т.к. элементы последовательности, построенной на таком соотношении, при увеличении i очень быстро приближаются к $\sqrt{a}$. Вот, например, как выглядит начало этой последовательности при $a = 2$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1; \\ x_2 &= 1,5; \\ x_3 &= 1,4166666667; \\ x_4 &= 1,4142156863; \\ x_5 &= 1,4142135624; \\ x_6 &= 1,4142155624; \\ &\dots \end{aligned}$$

Составить программу для определения $\sqrt{a}$ при заданном a и заданной погрешности ϵ (расчеты должны выполняться, пока рассчитываемое значение не изменится на величину, меньшую ϵ , – см. приведенные чуть выше значения членов последовательности). Принять $x_1 = 1$ (это может быть любое число).

Литература

1. Златопольский Д.М. Числа Фибоначчи – не только кролики ☺. // «Потенциал», 2014, № 9.
2. Кушниренко А.Г., Лебедев А.Г., Зайдельман Я.Н. Информатика 7–9: Учебник для общеобразовательных учебных заведений. – М.: Дрофа, 2000.