Шумакова Елена Васильевна
Учитель информатики
ГБОУ «Школа №504» г. Москвы

Разбор решения задачи №23 из демоверсии ЕГЭ-2019 по информатике

Решение задачи №23 многие считают крайне сложным, только лишь взглянув на него. Однако не так уж оно и страшно, если в нем последовательно разобраться. Для решения такой задачи придётся вспомнить ряд теоретических аспектов, связанных с разделом алгебры логики. Они приведены в приложении к данной статье.

В демоверсии 2019 года было опубликовано следующее **задание**:

Сколько существует различных наборов значений логических переменных $x_1, x_2, \ldots\ x_7$, $y_1, y_2, \ldots\ y_7$, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям:

$$(y_1 \to (y_2 \wedge x_1)) \wedge (x_1 \to x_2) = 1,$$

$$(y_2 \to (y_3 \wedge x_2)) \wedge (x_2 \to x_3) = 1,$$

$$\ldots$$

$$(y_6 \to (y_7 \wedge x_6)) \wedge (x_6 \to x_7) = 1,$$

$$(y_7 \to x_7) = 1?$$

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных $x_1, x_2, \ldots\ x_7$, $y_1, y_2, \ldots\ y_7$, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа вам нужно указать количество таких наборов [1].

Решение методом отображения

Одним из методов решения последних версий данной задачи является метод отображения. Почему он так называется и как его использовать, разберёмся вместе.

Договоримся сразу, что для простоты понимания будем использовать классические знаки умножения и сложения, а значит, наши выражения примут вид:

$$(y_1 \to (y_2 \cdot x_1)) \cdot (x_1 \to x_2) = 1,$$

$$(y_2 \to (y_3 \cdot x_2)) \cdot (x_2 \to x_3) = 1,$$

$$\ldots$$

$$(y_6 \to (y_7 \cdot x_6)) \cdot (x_6 \to x_7) = 1,$$

$$(y_7 \to x_7) = 1.$$

❶ Первое, что необходимо сделать для решения задачи, – это выбрать пары переменных, которые влияют на значения остальных переменных в приведённых выражениях. Для того чтобы их выбрать, выпишем все переменные, встречающиеся в первом выражении. Ниже запишем переменные, встречающиеся во втором выражении (записывая одноименные переменные друг под другом) так, как показано на рис.1.

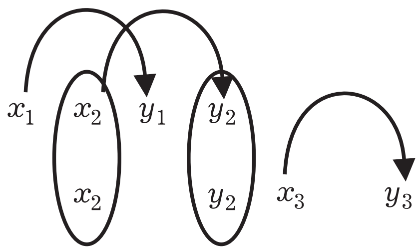

Рис. 1. Переменные двух выражений

Становится очевидно: зная пару переменных (x_1, y_1) для первого уравнения, можно узнать значения переменных (x_2, y_2); зная пару переменных (x_2, y_2) для второго уравнения, можно найти переменные (x_3, y_3) и т.д.

❷ Вторым нашим шагом станет составление правила отображения множества пар. Для этого:

1) Укажем все возможные значения, пар переменных, которые они могут принимать:

x_1	y_1
0	0
0	1
1	0
1	1

x_2	y_2
0	0
0	1
1	0
1	1

В данном примере важно учесть особенность, которую не всегда можно увидеть сразу. Обратите внимание на случай, когда $x_1 = 0$, а $y_1 = 1$:

$$(1 \to (y_2 \cdot 0)) \cdot (0 \to x_2) =$$

$$= (1 \to 0) \cdot (0 \to x_2) = 0 \cdot (0 \to x_2).$$

По законам алгебры логики при умножении на 0 всё выражение становится равно 0, то есть всё первое выражение становится ложным. Значит, данная пара значений переменных нам не подходит.

Поскольку все наши выражения подобны, то этот вывод будет действителен и для последующих равенств (должно быть: $(x_1 \neq 0,\ y_1 \neq 1)$, $(x_2 \neq 0,\ y_2 \neq 1)$, …, $(x_7 \neq 0,\ y_7 \neq 1)$). Следовательно, такие пары необходимо вычеркнуть.

Последнее равенство в системе логических выражений $(y_7 \to x_7) = 1$ как раз обращает наше внимание на данный случай:

x_1	y_1
0	0
$\cancel{0}$	$\cancel{1}$
1	0
1	1

x_2	y_2
0	0
$\cancel{0}$	$\cancel{1}$
1	0
1	1

2) Подставив в первое уравнение значения переменных $x_1 = 0$ и $y_1 = 0$, определяем значения пары переменных (x_2, y_2), чтобы выражение принимало значение «истина», как требуется по условию (рис.2), и соединяем их стрелкой (рис.3).

должно быть = 1 должно быть = 1

$$(0\to(y_2\cdot 0))\cdot(0\to x_2)=1,$$
$$(0\to(\mathbf{0}\cdot 0)\cdot(0\to\mathbf{0})=1,$$
$$(0\to(\mathbf{0}\cdot 0)\cdot(0\to\mathbf{1})=1,$$
$$(0\to(\mathbf{1}\cdot 0)\cdot(0\to\mathbf{1})=1.$$

Рис. 2. Процесс подстановки

Для того чтобы всё выражение приняло значение «истина», необходимо чтобы первая скобка $(y_1\to(y_2\cdot x_1))$ принимала значение «истина» **и** вторая скобка $(x_1\to x_2)$ также принимала значение «истина».

Подставив $x_1=0$ и $y_1=0$, получим $(0\to(y_2\cdot 0))\cdot(0\to x_2)$. Данное выражение принимает значение «истина» при парах (0, 0), (1, 0), (1, 1) (рис. 3).

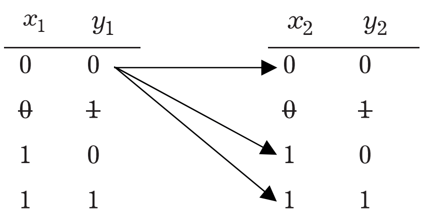

Рис. 3. Результат подстановки $x_1=0$ и $y_1=0$

3) Аналогично пункту 2) подставим теперь $x_1=1$ и $y_1=0$. При подстановке видно, что выражение принимает значение «истина» в парах (1, 0), (1,1) (рис. 4).

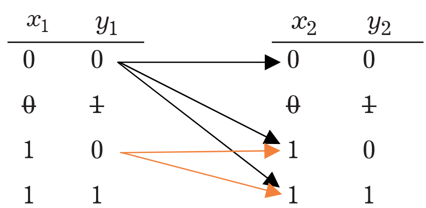

Рис. 4. Результат подстановки $x_1=1$ и $y_1=0$

4) Наконец подставив в первое уравнение значения переменных $x_1=1$ и $y_1=0$, получим только одну пару (1, 1) (рис.5).

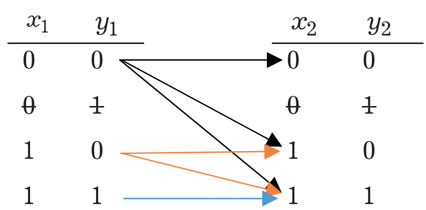

Рис. 5. Результат подстановки $x_1=1$ и $y_1=1$

❸Третьим шагом будет составление таблицы всех решений заданной системы уравнений.

Таблица 1. Решения системы равенств

	$x_1\ y_1$	$x_2\ y_2$	$x_3\ y_3$	$x_4\ y_4$	$x_5\ y_5$	$x_6\ y_6$	$x_7\ y_7$
00	1	1	1	1	1	1	1
01	0	0	0	0	0	0	0
10	1	2 (1+1)	3 (2+1)	4 (3+1)	5 (4+1)	6 (5+1)	7 (6+1)
11	1	3 (1+1+1)	6 (1+2+3)	10 (1+3+6)	15 (1+4+10)	21 (1+5+15)	28 (1+6+21)

Для подсчета общего количества решений необходимо сложить полученные в последнем столбце числа:

$$1+7+28=36.$$

36 наборов переменных x_1, x_2, ..., x_7, y_1, y_2, ..., y_7 существует, полностью удовлетворяющих приведённой системе выражений.

Ответ: 36

Данный метод укладывается в три этапа. Ключевыми моментами являются: выделение пар переменных, составление правил отображения и составление таблицы всех решений. Самым ответственным из них, пожалуй, является второй этап, третий требует лишь внимательного счёта. Он не предполагает больших преобразований, длинных упрощений, а значит, потребует гораздо меньше времени в ответственный момент на экзамене. Однако важно знание логических операций с их таблицами истинности.

Решение путём преобразования и упрощения системы равенств

Для тех, кому довольно сложно всё же даётся понимание рассмотренного решения, попробуем более подробный способ. Начнём с упрощения первого выражения (преобразование импликации и дизъюнкцию – см. Приложение):

$$(y_1 \to (y_2 \cdot x_1)) \cdot (x_1 \to x_2) =$$

$$= \left(\overline{y_1} + (y_2 \cdot x_1)\right) \cdot (x_1 \to x_2).$$

Теперь стоит вспомнить распределительные законы алгебры логики (см. Приложение) и применить их к полученному выражению $\left(\overline{y_1} + y_2\right) \cdot \left(\overline{y_1} + x_1\right) \cdot (x_1 \to x_2)$. Вновь используем правило преобразования импликации к первым двум скобкам, получим $(y_1 \to y_2) \cdot (y_1 \to x_1) \cdot (x_1 \to x_2)$. Поскольку выражения в нашей системе подобны, можно их переписать аналогичным образом в следующем виде: $(y_1 \to y_2) \cdot (y_1 \to x_1) \cdot (x_1 \to x_2) = 1$,

$$(y_2 \to y_3) \cdot (y_2 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_3) = 1,$$

$$(y_3 \to y_4) \cdot (y_3 \to x_3) \cdot (x_3 \to x_4) = 1,$$

$$(y_4 \to y_5) \cdot (y_4 \to x_4) \cdot (x_4 \to x_5) = 1,$$

$$(y_5 \to y_6) \cdot (y_5 \to x_5) \cdot (x_5 \to x_6) = 1,$$

$$(y_6 \to y_7) \cdot (y_6 \to x_6) \cdot (x_6 \to x_7) = 1,$$

$$(y_7 \to x_7) = 1.$$

Между всеми скобками находится знак логического умножения. Можно сделать вывод о том, что каждая скобка должна принимать значение «истина». И поскольку от перемены мест множителей произведение не изменяется, все скобки можно менять местами как угодно, важно чтобы они были истинными. Вы будете абсолютно правы, если скажете, что можно их все записать в одно выражение и приравнять к 1, и это тоже будет верно. Однако для наглядности мы перегруппируем наши скобки по именам переменных (по столбцам скобок) в три следующих выражения:

$$(y_1 \to y_2)\cdot(y_2 \to y_3)\cdot(y_3 \to y_4)\cdot(y_4 \to y_5)\cdot(y_5 \to y_6)\cdot(y_6 \to y_7)=1,$$

$$(x_1 \to x_2)\cdot(x_2 \to x_3)\cdot(x_3 \to x_4)\cdot(x_4 \to x_5)\cdot(x_5 \to x_6)\cdot(x_6 \to x_7)=1,$$

$$(y_1 \to x_1)\cdot(y_2 \to x_2)\cdot(y_3 \to x_3)\cdot(y_4 \to x_4)\cdot(y_5 \to x_5)\cdot(y_6 \to x_6)\cdot(y_7 \to x_7)=1.$$

Не трудно заметить, что первые два уравнения одинаковы и отличаются лишь названием переменных, это значит, что наборы значений у них будут одинаковы. Последнее выражение служит для объединения этих наборов. Построим наборы решений для первых двух выражений. Для этого:

1) Выпишем переменные y_n в столбик (их 7). И выпишем также все значения y_n, при которых первое выражение будет истинно. Возникает вопрос «Как их выписать?». Вспомним, что следствие ложно только в одном случае, когда из 1 следует 0. Значит, нельзя допустить случаи последовательностей 1 и 0. И все наши наборы y_n будут иметь следующий вид:

y_1	1	0	0	0	0	0	0	0
y_2	1	1	0	0	0	0	0	0
y_3	1	1	1	0	0	0	0	0
y_4	1	1	1	1	0	0	0	0
y_5	1	1	1	1	1	0	0	0
y_6	1	1	1	1	1	1	0	0
y_7	1	1	1	1	1	1	1	0

2) Для второго выражения, как уже сказано выше, наборы значений будут такими же, поскольку (отличие только в названии переменной).

x_1	1	0	0	0	0	0	0	0
x_2	1	1	0	0	0	0	0	0
x_3	1	1	1	0	0	0	0	0
x_3	1	1	1	1	0	0	0	0
x_4	1	1	1	1	1	0	0	0
x_5	1	1	1	1	1	1	0	0
x_6	1	1	1	1	1	1	1	0

3) Если бы в нашей системе отсутствовало третье выражение, то любому набору y_n соответствовал бы любой набор из x_n. Тогда количество решений было бы 8×8=64. Однако учитывать третье выражение обязательно. Посмотрим, как же оно повлияет на количество решений.

Рассмотрим первый набор y_n (1111111). Подставим в третье выражение единицы вместо y_n. Для его истинности необходимо, чтобы все x_n принимали значение «истина». Следовательно, первому набору y_n соответствует только <u>один</u> набор x_n.

Рассмотрим второй набор (0111111). Подставиляем в третье выражение соответствующие y_n. Заметим, что – важно, чтобы значения x_2, ..., x_7 были истинны, а x_1 может принимать любое значение. Среди наборов x_n только <u>два</u> имеют значения x_2, ..., x_7 равными 1: (1111111, 0111111).

Аналогично определяем количество соответствующих наборов x_n для остальных y_n. Их получается соответственно: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Для вычисления общего количества решений необходимо полученные числа сложить:

$$1+2+3+4+5+6+7+8=$$
$$=1+10+10+10+5=36$$

Ответ: 36.

Надеюсь, для абсолютного большинства читателей стало очевидно, на сколько быстрее и практичнее для экзамена первый способ решения представленной задачи. В методе отображений не используется большое количество преобразований и рассуждений, однако требуется хорошее понимание таблиц истинности для построения схемы отображения решений. Второй способ более подробный и подходит для случаев, когда есть время на полное погружение в технологию решения задач алгебры логики. Какому методу следовать – решать вам.

Литература

1. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2019 года по информатике и ИКТ от 10 ноября 2018 года.
2. Коллекция видеокурса «Информатик БУ» на портале YouTube https://www.youtube.com/channel/UCmUcjDHUkIMhfqBfyHYXYuA
3. Сайт К.Ю. Полякова в разделе школа – подраздел ЕГЭ https://polyakov.spb.ru/school/ege.htm

Приложение

Логические операции по порядку их выполнения в логических выражениях:

1. *Инверсия* (логическое отрицание)

Обозначается: $\bar{A}, \neg A$, не A, *not* A.

Таблица истинности:

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

2. *Конъюнкция* (логическое умножение)

Обозначается: $A \wedge B$, $A \cdot B$, $A \,\&\, B$, A и B, A *and* B.

Таблица истинности:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. *Дизъюнкция* (логическое сложение)
Обозначается: $A \vee B, A + B, A \mid B$, A или B, $A\,or\,B$.
Таблица истинности:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4. *Импликация* (логическое следование/следствие)
Обозначается: $A \to B$, $A \Rightarrow B$.

Таблица истинности:

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5. *Эквиваленция* (логическая равносильность/равнозначность)
Обозначается: $A \equiv B$, $A \leftrightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$.

Таблица истинности:

A	B	$A \equiv B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Операцию «импликация» можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:
$A \to B = \bar{A} \vee B$ или другими обозначениями: $A \to B = \bar{A} + B$.
Операцию «эквиваленция» также можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:
$A \leftrightarrow B = \bar{A} \wedge \bar{B} \vee A \wedge B$ или другими обозначениями $A \leftrightarrow B = \bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B$.

И обязательно необходимо знать законы преобразования логических выражений (законы алгебры логики):

Закон	Для «И»	Для «ИЛИ»
Двойного отрицания	$\bar{\bar{A}} = A$	
Исключения третьего	$A \cdot \bar{A} = 0$	$A + \bar{A} = 1$
Исключения констант	$A \cdot 1 = A; \cdot A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1; \cdot A + 0 = A$
Повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
Поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
Переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
Сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
Распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$	$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$