Ларина Элла Семеновна
Учитель информатики высшей категории МОУ Лицея №2 г. Волгограда.

«Пойдёшь направо – песнь заводишь…», или Пути обхода матрицы

Направление (порядок) обхода элементов двумерного массива может пригодиться в решениях некоторых задач повышенной сложности (например, таких классических задач, как «Магический квадрат», «Скатерть Улама»). Главной трудностью в их решении является организация «нестандартного обхода» элементов массива.

«Пойдёт направо – песнь заводит, налево – сказку говорит…» – что ж, мы очень хорошо понимаем приподнятое настроение сказочного пушкинского Кота! Ведь любой путь, любое путешествие связано с новыми впечатлениями, и путешествие по элементам двумерного массива – не исключение! Ну что интересного может быть при обходе матрицы построчно слева направо или по столбикам сверху вниз? Скука, да и только! А вот обход элементов по спирали, согласитесь, будет более увлекателен! Тут и голову поломать придётся, что уже само по себе может служить целью организации такого обхода. И всё же, что ещё, кроме головоломки, скрыто в задаче обхода элементов двумерного массива по спирали? А вот представьте себе, что есть в этом необходимость – существует ряд задач, решение которых напрямую зависит от того, как мы обходили массив при заполнении! И задачи эти – тоже из разряда «нескучных».

Итак, для начала, погрузимся в историю вопроса, а уж затем рассмотрим алгоритмы решения исторических головоломок (основанные, естественно, на разнообразных методах обхода массива).

Погружение в историю №1: «Магический квадрат»

Есть в математике старинная задача «Магический квадрат» – квадратная таблица целых чисел, в которой суммы элементов всех строк таблицы, всех столбцов и всех диагоналей равны. Родиной задачи считается Древний Китай, позже о магических квадратах узнали в Индии, затем в Японии. Европейцев с магическими квадратами познакомил в XV веке византийский писатель Э. Мосхопулос. Столь великая и длительная популярность магических квадратов объяснима тем, что во все времена им приписывали различные мистические свойства. У математиков современности интерес к магическим квадратам вспыхнул с новой силой, ведь появилась возможность поручить компьютеру генерацию великого множества магических квадратов! https://ru.wikipedia.org/wiki (См. в этой и других «историях».)

Один из способов получения магического квадрата называется «методом террас» (ещё его называют индийским методом). Суть его такова.

- Для создания магического квадрата размерностью $n \times n$ (n – нечётное число) необходимо заполнить двумерный массив размерностью $(2n-1)\times(2n-1)$ так, как на рис. 1. (Для получения магического квадрата 5×5 нам потребуется заполнить массив 9×9.)

				5				
			4		10			
		3		9		15		
	2		8		14		20	
1		7		13		19		25
	6		12		18		24	
		11		17		23		
			16		22			
				21				

Рис. 1

- Затем «треугольники», выступающие за пределы жирной рамки, необходимо перенести внутрь таким образом (рис. 2):

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Рис. 2

В полученном двумерном массиве суммы элементов всех строк, всех столбцов и диагоналей равны.

Погружение в историю №2: «Решето Эратосфена»

Приписываемый древнегреческому математику Эратосфену Киренскому метод получения простых чисел (названный в его честь «Решетом Эратосфена») основан на поэтапном исключении из числового ряда составных чисел. Название «решето» метод получил потому, что, согласно легенде, Эратосфен писал числа на дощечке, покрытой воском, и прокалывал дырочки в тех местах, где были написаны составные числа. Поэтому дощечка служила тем решетом, через которое, как сквозь сито, «просеивались» все составные числа, а оставались простые.

Проиллюстрируем этот метод на примере (рис. 3):

Ряд чисел:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**
1 шаг:	1	$\boxed{2}$	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27
2 шаг:	1	2	$\boxed{3}$	-	5	-	7	-	~~9~~	-	11	-	13	-	~~15~~	-	17	-	19	-	~~21~~	-	23	-	25	-	~~27~~
3 шаг:	1	2	3	-	$\boxed{5}$	-	7	-	-	-	11	-	13	-	-	-	17	-	19	-	-	-	23	-	~~25~~	-	-

И т. д.

Рис. 3

Итак, формируем ряд чисел от 1 до n.

- *1 шаг:* берём «2», отмечаем серым цветом. Вычёркиваем во всём ряду числа, кратные двум.
- *2 шаг:* берём следующее за «2» не вычеркнутое число («3»), и отмечаем его серым цветом. Вычеркиваем все числа, кратные трём.
- И т. д.

В «решете» остаются невычеркнутые числа – это простые числа.

Задача 1. Напишите программу поиска всех простых чисел методом «Решето Эратосфена» (до N).

Идея решения: В задаче нам потребуется каким-либо образом отмечать элементы, удовлетворяющие условию. Для этого зарезервируем дополнительный массив Flag, элементы которого будем заполнять единицами, если соответствующие элементы исходного массива удовлетворяет условию (кратности). Данный метод решения был рассмотрен на страницах прошлых выпусков журнала. Итак:

Заполняем одномерный массив A подряд идущими числами до N включительно. Например, $N = 22$ (рис. 4):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

Рис. 4

Заполняем элементы массива Flag флажками-единицами, если соответствующие элементы массива A кратны «2» (рис. 5):

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Flag				**1**		**1**		**1**		**1**		**1**		**1**		**1**		**1**		**1**		**1**

Рис. 5

Затем заполняем элементы массива Flag флажками-единицами, если соответствующие элементы массива A кратны «3» (рис. 6). При этом просматривать элементы массива A будем уже с элемента, следующего за элементом, содержащим «3», и т. д.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Flag				1		**1**		1	**1**	1		**1**		1	**1**	1		**1**		1	**1**	1

Рис. 6

В «решете» (массиве A) остались числа (рис. 7), отмеченные серым цветом (на них «указывают» НЕ «единичные» значения элементов массива Flag – см. рис. 6):

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Flag				1		1		1	1	1		1		1	1	1		1		1	1	1

Рис. 7

Для сокращения количества шагов достаточно перебирать элементы массива A до половины (так как максимальный делитель n – это $n/2$).

Решение задачи на Паскале:

```
    Program pr;
    Var  a,flag:array [1..100] of integer;
         i,j,n:integer;
    begin
         writeln ('n='); readln (n);
         for i:=1 to n do a[i]:=i;
         for i:=2 to n div 2 do
              if flag[i]=0 then
                   for j:=i+1 to n do
                        if (a[j] mod a[i]=0) then flag[j]:=1;
         for i:=1 to n do
              if flag[i]=0 then writeln (a[i]);
end.
```

Тест:

Дано:	100
Результат:	1 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 97

Погружение в историю №3: «Скатерть Улама»

Скатерть Улама – спираль чисел натурального ряда, на которой отмечены клетки, соответствующие простым числам. История создания Скатерти Улама такова: математик Станислав Мартин Улам во время прослушивания очень длинного и скучного доклада стал нумеровать клетки разлинованного по вертикали и горизонтали листа: в центре листа поставил единицу, а затем, двигаясь по спирали, двойку, тройку и т. д. При этом он отмечал простые числа. Оказалось, что простые числа стали выстраиваться вдоль диагональных прямых. Причудливый узор получил название в честь своего автора – Улама. При желании вы можете найти массу изображений скатерти Улама в Интернете – найдите их!

Метод вложенных матриц

А теперь настало время приступить к изучению метода организации нестандартных обходов элементов двумерного массива, который нам пригодится в решении ранее рассмотренных задач.

Назовём такой метод «методом вложенных матриц». А его суть изучим на примерах.

Задача 2. Заполните массив размерностью $N \times N$, как показано на рис. 8.

	1	**2**	**3**	**4**
1	1	2	4	7
2	3	5	8	
3	6	9		
4	10			

Рис. 8

Идея решения. Мысленно «разберём» двумерный массив на четыре «вложенных» в исходный (рис. 9). В каждом из них нужно заполнить *побочную диагональ* (опираясь на типовой алгоритм обработки квадратного массива относительно диагоналей):

	1
1	1

	1	2
1		2
2	3	

	1	2	3
1			4
2		5	
3	6		

	1	2	3	4
1				7
2			8	
3		9		
4	10			

```
k = 1
…
for i:=1 to k do
a [i, k-i+1]=…
```

```
k = 2
…
for i:=1 to k do
a [i, k-i+1]=…
```

```
k = 3
…
for i:=1 to k do
a [i, k-i+1]=…
```

```
k = 4
…
for i:=1 to k do
a [i, k-i+1]=…
```

Итого:

```
for k:=1 to n do
     for i:=1 to k do
           a [i,k-i+1]=…
```

Рис. 9

Полное решение задачи на Паскале:

```
program pr;
const m=10;
var  a: array [1..m, 1..m] of byte;
     x, n, k, i: integer;
begin
     writeln ('n='); readln (n);
     x:=1;
     for k:=1 to n do
          for i:=1 to k
               begin
               a [i,k-i+1]:=x; x:=x+1;
               end;
     {======================}
     for i:=1 to n do
          begin
          for j:=1 to n do write (a [i,j]);
          writeln;
          end;
end.
```

Задача 3. Заполните массив, как показано на рис. 10.

1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	2	1
1	2	3	3	2	1
1	2	3	3	2	1
1	2	2	2	2	1
1	1	1	1	1	1

Рис. 10

Идея решения: Разложим исходную матрицу на «вложенные» (см. рис. 11):

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1

2	3	4	5
2	2	2	2
2	2	2	2
2	2	2	2
2	2	2	2

	3	4
3	3	3
4	3	3

```
k=1
…
for i:=1 to 6 do
 for j:=1 to 6 do
   a [i,j]:=1
```

```
k=2
…
for i:=2 to 5 do
 for j:=2 to 5 do
   a [i,j]:=2
```

```
k=3
…
for i:=3 to 4 do
 for j:=3 to 4 do
   a [i,j]:=3
```

Рис. 11

Решение задачи на Паскале:

```
program pr;
const m=10;
var  a: array [1..m, 1..m] of byte;
     x, n, k, I, j: integer;
begin
     writeln ('n=');
     readln (n);
     for k:=1 to (n div 2 +1) do
          for i:=k to n -k+1 do
               for j:=k to n -k+1 do
                    a [i,j]:= k;
     {======вывод=========}
     for i:=1 to n do
          begin
          for j:=1 to n do write (a [i,j]);
          writeln;
          end;
end.
```

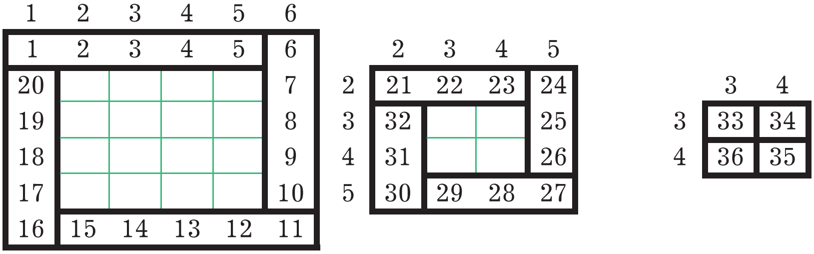
Задача 4. Заполните массив, как показано на рис. 12.

Идея решения. Разложим исходную матрицу на «вложенные». Каждую из «вложенных» матриц необходимо заполнить по периметру (рис. 13).

Заполнение начинаем с элемента [1; 1] и, двигаясь по часовой стрелке, по спирали заполняем массив числами натурального ряда. Формирование натурального ряда чисел необходимо осуществлять в программном счётчике (увеличивая в теле цикла значение переменной *x* на 1).

1	2	3	4	5	6
20	21	22	23	24	7
19	32	33	34	25	8
18	31	36	35	26	9
17	30	29	28	27	10
16	15	14	13	12	11

Рис. 12




```
k = 1
for i:=1 to 5
  a[1,i]:=….

for i:=1 to 5
  a[i,5]:=….

for i:=6 downto 2
  a[6, i]:=...

for i:=6 downto 2
  a[i,1]:=….
```

```
k = 2
for i:=2 to 4
  a[1,i]:=….

for i:=2 to 4
  a[i,5]:=….

for i:=6 downto 2
  a[6, i]:=...

for i:=6 downto 2
  a[i,1]:=….
```

```
k = 3
for i:=3 to 3
  a[1,i]:=….

for i:=1 to 5
  a[i,5]:=….

for i:=6 downto 2
  a[6, i]:=...

for i:=6 downto 2
  a[i,1]:=….
```

Рис. 13

Решение задачи на Паскале:

```
program pr;
const    m=10;
var  a: array [1..m, 1..m] of byte;
     x, n, k, i, j: integer;
begin
     writeln ('n='); readln (n);
     x:=1;
     for k:=1 to n div 2 do
          begin
          for i:=k to n-k do
               begin
               a [k, i]:=x; x:=x+1;
               end;
          for i:=k to n-k do
               begin
               a [i, n-k+1]:=x; x:=x+1;
               end
          for i:=k to n-k do
               begin
               a [n-k+1, n-i+1]:=x; x:=x+1;
               end ;
          for i:=k to n-k do
               begin
               a [n-i+1, k]:=x; x:=x+1;
```

```
                    end;
               end;
          {=======вывод========}
          for i:=1 to n do
               begin
               for j:=1 to n do write (a[i,j]);
               writeln;
               end;
     end.
```

На данном заполнении массива базируется задача «Скатерть Улама». Правда, в той задаче заполнение квадратного массива по спирали идёт не «вовнутрь», как в этом примере, а «изнутри» массива (что вы с лёгкостью исправите!).

Затем «вычёркиваются» все составные числа — их «вычеркнуть» нам поможет рассмотренный ранее алгоритм получения простых чисел «Решето Эратосфена». Оставшиеся на своих местах простые числа образуют причудливый узор — уже знакомую нам «Скатерть Улама».

Задача 5. Заполните матрицу, как показано на рис. 14. Вооружившись алгоритмом такого заполнения массива, мы сможем с лёгкостью решить рассмотренную выше задачу «Магический квадрат».

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1					1				
2				2		6			
3			3		7		11		
4		4		8		12		16	
5	5		9		13		17		21
6		10		14		18		22	
7			15		19		23		
8				20		24			
9					25				

Рис. 14

Идея решения. Разбиваем исходную матрицу на «вложенные». В каждой из них заполняем побочную диагональ (рис. 15).

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1					1				
2				2		6			
3			3		7		11		
4		4		8		12		16	
5	5		9		13		17		21
6		10		14		18		22	
7			15		19		23		
8				20		24			
9					25				

Рис. 15

Дальнейшее решение уже очевидно.

Задача 6. Самостоятельно заполните матрицу по образцу (рис. 16).

1	2	6	7	15	16	28
3	5	8	14	17	27	
4	9	13	18	26		
10	12	19	25			
11	20	24				
21	23					
22						

Рис. 16

Задача 7. Самостоятельно заполните матрицу по образцу (рис. 17).

22	16	11	7	4	2	1
	23	17	12	8	5	3
		24	18	13	9	6
			25	19	14	10
				26	20	15
					27	21
						28

Рис. 17

Итак, мы в очередной раз погрузились в удивительный мир старинных задач. Для их решения великим мыслителям требовались причудливые инструменты, как, например, Эратосфену дощечка, покрытая воском, в которой он прокалывал дырочки, либо временные затраты, как Уламу, мелким числовым бисером раскручивающим спираль своей будущей «Скатерти». При разгадывании интересных головоломок современным математикам повезло с инструментом больше – наш верный компьютер, как всегда, поможет нам сэкономить и время, и силы. Конечно, при одном условии – если рассмотренный в данной статье метод обхода двумерных массивов вам пришёлся по душе! На что мы, конечно же, надеемся.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Микроминиатюрные экспонаты

Удивительные экспонаты созданы для «музея» на Международной космической станции. Это 10 самых маленьких в мире «картин» и увеличительное стекло, закреплённое на пластине. «Картины» посвящены космонавтике, рассмотреть их можно только при сильном увеличении. Вся экспозиция умещается на ладони (рис. 1), и её прозвали «музеем на ладошке».

Рис. 1

Автор уникальных микроминиатюр – современный Левша – доктор физико-математических наук В. Анискин. Журналистам он сообщил, что работал над этим «музеем» 4 года. «Сложнее всего, – сказал он, – мне дались акварельные миниатюры: на срезах яблочных зёрнышек я нарисовал портрет конструктора Сергея Королёва (рис. 2), а также Белку и Стрелку (рис. 3).

Рис. 2

Рис. 3

Вместо кисти использовал беличий волосок. Работал долго, но всё же удалось добиться портретного сходства. Для миниатюр использовал драгоценные металлы, зёрнышки, цветную пыль. Автографы космонавтов я сделал из ворсинок, которые выдернул из лент медалей “Золотая звезда”. Нарезал их и сложил факсимиле.»