Златопольский Дмитрий Михайлович
Кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры информатики и прикладной математики
Московского городского педагогического университета;
организатор и директор Музея истории
вычислительной техники

Перевод в двоичную систему обыкновенных дробей

В статье впервые описывается методика перевода в двоичную систему счисления ряда обыкновенных дробей без промежуточного преобразования их в десятичные.

Известно, что для перевода в двоичную систему счисления правильных десятичных дробей используется метод последовательного умножения на 2 [1] (результат, как правило, получается приближенным[1]). А если стоит задача перевода обыкновенной дроби? Можно, конечно, сначала представить заданную дробь в виде десятичной, а затем применить указанный метод. Но возможен и другой вариант. Опишем его.

Начнем с дробей, числитель которых равен 1.

Пусть надо перевести в двоичную систему дробь $\frac{1}{7}$.

Оставляя пока за скобками обоснование, можно так описать методику перевода. Знаменатель 7 на *1 меньше третьей* степени двойки (8). Поэтому в двоичной системе указанная дробь является периодической с периодом (001): 0,(001).

$$\left(\frac{1}{7}\right)_{10} = 0{,}001001001001001\ldots_2$$

Аналогично для других значений знаменателей, на 1 меньших степени двойки, имеем:

$$\left(\frac{1}{3}\right)_{10} = 0{,}(01)_2; \quad \left(\frac{1}{15}\right)_{10} = 0{,}(0001)_2 \quad \text{и т.д.}$$

Покажем, что действительно $0{,}001001001001001\ldots_2 = \left(\frac{1}{7}\right)_{10}$.

Десятичное значение периодической дроби 0,001001001001001... можно записать в виде:

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^9}+\ldots$$

[1] Десятичные дроби, равные отрицательной степени числа 2, в двоичную систему переводятся точно.

Используя формулу суммы членов геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим 1, можно получить, что указанная сумма равна $\frac{1}{8}:\frac{1}{1-2^{-3}}=\frac{1}{8}:\frac{7}{8}=\frac{1}{7}$.

Аналогично можно показать справедливость и остальных приведённых двоичных значений.

Приведем (также без доказательства) запись в двоичной системе дроби $\frac{1}{17}$:

$$\left(\frac{1}{17}\right)_{10}=0{,}000011110000111100001111..._2=0{,}(00001111)_2$$

Здесь методику перевода можно описать следующим образом (опять без обоснования). Знаменатель 17 на *1 больше четвертой* степени двойки (16). Поэтому в двоичной системе указанная дробь является периодической с 8-значным периодом такого вида: сначала идут 4 нуля, затем 4 единицы: 0,(00001111).

Аналогично для других значений знаменателей, на 1 больших степени двойки, имеем:

$$\left(\frac{1}{5}\right)_{10}=0{,}(0011)_2; \qquad \left(\frac{1}{9}\right)_{10}=0{,}(000111)_2 \text{ и т.д.}$$

После приведённых примеров перевод дроби $\frac{2}{7}$ в двоичную систему становится достаточно очевидным – для умножения двоичного представления дроби на 2 следует «сместить» запятую на один знак правее:

$$\left(\frac{2}{7}\right)_{10}=0{,}01001001001..._2$$

Аналогично проводится перевод дробей с двумя рассмотренными видами знаменателя, числитель которых является степенью двойки:

$$\left(\frac{8}{17}\right)_{10}=0{,}01111000011110000111 1..._2;$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)_{10}=0{,}011100011100011100011100011100 0111..._2$$

А если числитель не такой? В этих случаях придется рассмотреть два варианта.

Если знаменатель дроби равен $2^n - 1$, где – натуральное число, то задача решается достаточно просто – нужно в двоичном представлении дроби $\frac{1}{2^n-1}$ вместо периодической части записать двоичное представление числителя. Например, для дроби $\frac{5}{7}$:

$$\left(\frac{1}{7}\right)_{10}=0{,}001001001001001..._2; \qquad \left(\frac{5}{7}\right)_{10}=0{,}101101101101..._2$$

Для дроби $\frac{9}{15}$:

$$\left(\frac{1}{15}\right)_{10} = 0{,}000100010001\ldots_2; \qquad \left(\frac{9}{15}\right)_{10} = 0{,}100110011001\ldots_2$$

Когда же знаменатель дроби равен $2^n + 1$, задача усложняется. Для нахождения двоичного представления дроби $\frac{5}{9}$ нельзя, как в рассмотренных выше случаях, заменить какие-то цифры двоичным числом, равным 5:

$$\left(\frac{1}{9}\right)_{10} = 0{,}000111000111000111\ldots_2;$$

$$\left(\frac{5}{9}\right)_{10} \neq 0{,}010111010111010111\ldots_2$$

Как же быть? Здесь нам на помощь приходит прием, предложенный в XIX (!) веке в работе [2]. В ней автор, E. Collignon, вводит понятие отрицательной цифры 1 (обозначая ее: $\overline{1}$).

Рассмотрим двоичное число, состоящее из одних единиц: 1111

Нетрудно увидеть, что это число на 1 меньше двоичного числа 10000. Это значит, что исходное число 1111, используя цифру $\overline{1}$, можно представить следующим образом: $1000\overline{1}$[2].

Можно так сформулировать правило записи цифры $\overline{1}$ в двоичном числе: в группе цифр, состоящей из последовательных единиц:

1) добавить единицу в разряде слева от крайней слева единицы группы;

2) крайнюю справа единицу группы заменить на $\overline{1}$;

3) вместо «промежуточных» единиц записать нули.

Это правило применимо ко всем цепочкам из одних единиц, в том числе и расположенных в дробной части двоичного числа:

$$1001110011110 = 10100\overline{1}01000\overline{1}0$$

$$0{,}01110\,01110 = 0{,}100\overline{1}0100\overline{1}0$$

Вернемся к переводу дробей. Вспомним, что:

$$\left(\frac{1}{9}\right)_{10} = 0{,}000111000111000111\ldots_2$$

---

[2] Несколько отвлекаясь, заметим, что двоичное число, в котором имеются отрицательные единицы, переводится в десятичную систему так же, как и «обычное» двоичное число, за исключением того, что на весомость того или иного разряда в ряде разрядов умножается −1:

$$100\overline{1}01_2 = 1 \times 32 + -1 \times 4 + 1 \times 1 = 29_{10},$$

то есть при расчетах используется алгебраическая сумма.

Заменим все цепочки из единиц – получим:

$$\left(\frac{1}{9}\right)_{10} = 0{,}00100\bar{1}00100\bar{1}00100\bar{1}\ldots$$

А теперь для нахождения двоичного представления дроби $\frac{5}{9}$ только что полученную дробь можно умножать на 5, используя двоичное число 101:

$$\left(\frac{5}{9}\right)_{10} = 0{,}101\bar{1}0\bar{1}101\bar{1}0\bar{1}101\bar{1}0\bar{1}\ldots$$

Но нас интересует, естественно, «обычное» двоичное число. Как получить его? Для этого надо научиться исключать из двоичной записи чисел цифру $\bar{1}$. Сделаем это.

Для цепочек вида $1\bar{1}$, $10\bar{1}$, $100\bar{1}$, $1000\bar{1}$, $10000\bar{1}$ и т.п. методика исключения достаточно очевидна: 01, 011, 0111, 01111, 011111, ...

Сложный случай исключения имеет вид:

$101\bar{1}0\bar{1}0$ (две цифры $\bar{1}$ разделены нулем)

Для него задача решается в два этапа:

1) избавляемся от первой слева цифры $\bar{1}$: $10010\bar{1}0$;

2) после этого можно исключить и оставшуюся (см. выше пример для цепочки $10\bar{1}$): 1000110

(Проверьте, что $101\bar{1}0\bar{1}0 = 1000110 = 70$!)

И теперь можем получить искомый ответ для дроби $\frac{5}{9}$:

$$\left(\frac{5}{9}\right)_{10} = 0{,}101\bar{1}0\bar{1}101\bar{1}0\bar{1}101\bar{1}0\bar{1}\ldots = 0{,}10010\bar{1}10010\bar{1}10010\bar{1}\ldots =$$
$$= 0{,}100011100011100011\ldots = 0{,}(100011).$$

На первый взгляд, описанная методика перевода является громоздкой и трудоемкой. Чтобы убедиться, что это не так, предлагаем читателям сравнить время, требуемое для перевода в двоичную систему счисления дроби $\frac{15}{63}$ двумя методами – описанным и с промежуточным преобразованием в десятичную дробь[3].

Кроме того, читатель может возразить, что методика применима только к обыкновенным дробям, знаменатели которых равны $2^n - 1$ или $2^n + 1$. Во-первых, это не совсем так – вот, например, результат перевода дроби $\left(\frac{1}{89}\right)$, полученный описанным методом[4]: 0,00000010111000000010111...

---

[3] Или предложите это сделать своим ученикам.

[4] Обоснование результата этого примера и других автор оставляет за рамками статьи.

Во-вторых, и в демонстрационных вариантах ЕГЭ по информатике и ИКТ задания на определение количества нулей и количества единиц в двоичном числе также, как правило, связаны со значениями $2^n - 1$ и $2^n + 1$…

Задания для самостоятельной работы учащихся

Получите двоичное представление дробей:

1) $\frac{1}{63}$; 2) $\frac{1}{33}$; 3) $\frac{5}{31}$; 4) $\frac{8}{65}$; 5) $\frac{3}{35}$.

Литература

1. *Андреева Е.В.*, *Босова Л.Л.*, *Фалина И.Н.* Математические основы информатики. – М.: Бином. Лабораториязнаний, 2005.

2. Note sur l'arithmetiquebinaire. // Journal de mathematiqueselementaires, 1897, pp. 148–151.

Новости Новости Новости Новости

Российская сборная заняла второе место на Международной математической олимпиаде

Российская сборная заняла второе место в главном математическом соревновании школьников — Международной математической олимпиаде IMO 2021, опередив сборные Кореи и США. Первое место — у сборной Китая.

В масштабном событии приняли участие представители 107 стран — 619 школьников боролись за призовые места, демонстрируя знания в разных областях математики. Россия второй год подряд являлась страной-организатором IMO. Международная олимпиада проходила в Санкт-Петербурге в онлайн-формате и стартовала 18 июля. Конкурс включал в себя два тура по три задания в каждом. На их решение участникам было дано по 4,5 часа.

Результаты команды России подтверждают высокий уровень математического образования в стране. Россию на олимпиаде представляли:

Иван Бахарев (10 класс, Санкт-Петербург) — золотая медаль;

Айдар Ибрагимов (11 класс, Казань / Москва) — золотая медаль;

Матвей Исупов (11 класс, Ижевск) — золотая медаль;

Андрей Шевцов (11 класс, Москва) — серебряная медаль;

Данил Сибгатуллин (11 класс, Казань / Москва) — золотая медаль;

Максим Туревский (10 класс, Санкт-Петербург) — золотая медаль, абсолютное второе место в общем рейтинге.

Источник: https://mipt.ru/news