Грацианова Татьяна Юрьевна
Доцент факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова, преподаватель подготовительных курсов.

Что у компьютера вместо пальцев?

«Системы счисления» – раздел информатики, который изучается в школе одним из первых, и к 10–11 классу многие успевают его основательно забыть. В статье предлагается вспомнить правила перевода чисел из одной системы счисления в другую, методы сравнения чисел, представленных в разных системах счисления, рассматриваются основные задачи по этой теме и некоторые способы проверки правильности их решения. Герои статьи обсуждают, какие системы счисления и почему используют люди и компьютеры.

В летние каникулы 10 «А» решил поработать в садоводческом хозяйстве: собирать клубнику.

– Там её есть можно бесплатно, сколько хочешь, а за то, что насобираешь, тебе деньги заплатят, – агитировала всех Лена.

И вот солнечным июньским утром дежурный агроном, хмурая тётка в белом халате, показала им их грядки. Всё оказалось не так просто. Есть клубнику, действительно, можно было сколько хочешь, а вот чтобы заработать деньги, надо было потрудиться. Для того чтобы клубника не теряла товарный вид, она должна быть хорошо упакована.

Ребятам выдали специальные лоточки с отделениями для каждой ягодки, корзинки и коробки.

– Собирать надо только хорошие, крупные ягоды, – наставляла их агрономша. – Каждую кладёте в своё отделение, по 8 в лоточек. Лотки аккуратно в корзинки складываете, 8 штук в каждую. А как 8 корзинок заполните, кладёте в коробку. Грузчики потом пройдут по полю, соберут коробки, в контейнер

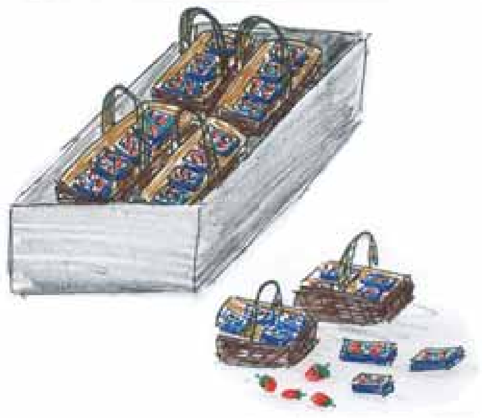
сложат. Да, по 8 коробок в контейнер – что тут смешного? – наше хозяйство патент на такую упаковку за границей купило, в нём всё рассчитано. А 8 контейнеров как раз хорошо в наш грузовичок влезают, мы их по торговым точкам развозим. Смотрите у меня! Чтобы пустых мест не было и лишнего не класть – всё как сказала. Проверять буду!

– Прямо не сельское хозяйство, а сплошная математика, – нахмурилась Катя, – как будто и не каникулы у нас.

– Ну что же, давайте соревноваться, кто первый грузовик клубники соберёт, – решила подбодрить всех Лена.

И вот, руки работают, ягодку за ягодкой складывают: 8 штучек – лоток, 8 лотков – корзинка... И голова тоже работает, думает. Сколько же надо клубничин собрать, чтобы грузовик в магазин уехал? В корзинке $8 \cdot 8 = 64$ ягоды, в коробке $64 \cdot 8 = ?$ В столбик умножать надо, трудно в уме подсчитать. Может, по-другому? $8 \cdot 8 \cdot 8 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^9$, а $2^9 = 512$, это я наизусть помню, нам на информатике велели степени двойки выучить. Итак, в грузовике $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^5 = 2^{15}$ ягод. Такую большую степень двойки, конечно, уже наизусть не заучивали, но можно хоть примерно подсчитать: $2^{10} \cdot 2^5 = 1024 \cdot 32$. Больше 32 тысяч ягод в грузовик помещается!

А сколько уже собрано? Так, посмотрим. 1 коробка, 2 корзинки, 3 лоточка и вот ещё 4 ягоды. Прямо число получается – 1234. Но ведь



это не означает, что я собрала столько ягод. Ягод у меня $4+3 \cdot 8+2 \cdot 64+1 \cdot 512$ (так получается, потому что в каждом лотке их по 8 штук, в корзинках по 64, а в коробках по 512). А по-другому это $4+3 \cdot 8^1+2 \cdot 8^2+1 \cdot 8^3$. Да ведь это формула из информатики! Перевод числа из 8-ричной в 10-чную систему счисления!

– Ребята, – закричала Лена на всё поле, – мы здесь не просто клубнику собираем, мы числа в 8-ричной системе создаём. Это такая тема есть в информатике – системы счисления. Нам её в следующем году на ЕГЭ сдавать.

– Вот Ленка даёт, и в каникулы про школу забыть не может, – возмутилась Катя. Но Лёша уже заинтересовался:

– А что же это у них в хозяйстве 8-ричная система счисления принята, как-то не по-человечески. С Марса они, что ли, прилетели?

– Ну почему с Марса?

– Потому что все нормальные люди в 10-чной системе считают. 10 – красивое число, удобное. В других системах только компьютерам хорошо.

– Десятичная система тебе кажется удобной просто потому, что ты к ней привык. Выбрана она была потому, что люди считали на пальцах, а их 10. Но ты и сам иногда другой системой счисления пользуешься!

– ???

– У тебя дома есть чайный сервиз? На сколько он персон? Не на 10, а на 12! И вилки-ложки, и платочки принято считать не десятками, а дюжинами. И месяцев в году 12. Это отголоски 12-ричной системы счисления. Она к нам пришла от древних шумеров.

– Ну вот, я и говорю – с Марса прилетели! У них что же, по 12 пальцев было?

– Я не знаю, почему они такую систему выбрали. Знаю только, что ещё у кого-то была 60-ричная система, и 60 пальцев у них никак не было.

– Не знаешь, а всякую ерунду говоришь! Это надо же придумать – 60-ричная! Так и компьютер не посчитает! И мушеров каких-то выдумала!

– Не «мушеры», а шумеры. И не обижай Лену, – вмешалась Наташа. – Она почти всё правильно сказала. Я про этих шумеров реферат по истории писала.

– Ну давай, расскажи, а то уже надоело плейер слушать, ушам в наушниках жарко.

– Это был очень интересный народ. Жили они где-то в Месопотамии (там сейчас Ирак) 5 тысяч лет назад. У них не только письменность была. У них был парламент, считается, что именно они изобрели судебную систему. Они умели обжигать кирпичи и выплавлять металлы. И медицина у них на высоком уровне была.

– Ну что ты всё в одну кучу: парламент, кирпичи, медицина... Давай рассказывай, почему они на 12 пальцах считали.

– Я про их математику не всё поняла, реферат-то был по истории. Но система счисления как раз у них была 60-ричная.

– Ну даёт! Час от часу не легче – уже 60 пальцев откуда-то взялось!

– Пальцы здесь ни при чём. Система счисления у них была очень сложная, можно сказать, с переменным основанием, они использовали основания и 60, и 12, и 6 для разных цифр в числе. Они умели делить и перемножать не только целые числа, но и дроби, возводить в квадрат, извлекать корень. И основание 60 им в этом очень помогало, потому что оно делится чуть ли не на всё на свете: на 2, 3, 4, 5, 6. А у нас 10 только на 2, 5 – ну и на кратные им. А нужна им была такая система, потому что они много астрономией занимались. Именно они изобрели зодиак, и в нём как раз 12 созвездий. И эта их странная система очень хорошо подходила для геометрических вычислений. И мы в геометрии, можно сказать, ею пользуемся.

– Смотри-ка, ведь правда, почему-то круг делим на 360 градусов, а $360 = 60 \cdot 6$. А я всегда думала, кто же и зачем такое «некруглое» число придумал.

– Ну вы уже совсем в дебри залезли: астрономия, геометрия... Вы мне объясните, почему 12, откуда они 12 пальцев взяли, – не унимался Лёша.

– Вот взяли, причём на одной руке! Правда, не целых пальцев. Для счёта «на пальцах» они большим пальцем дотрагивались до фаланги одного из пальцев на той же руке. 4 пальца, на каждом по 3 фаланги, вот и получается 12.

– Ладно, а я уж думал, они к рукам как-то ноги присоединяли!

– Ну и не так уж был неправ. Считается, что европейцы, переняв эту систему у шумеров, как раз использовали для счета 10 пальцев на руках и 2 ноги.

– Да, дела. Руки-ноги для счёта уже никто не использует, а число 12 осталось. У англичан до сих пор в ходу футы и дюймы, а 1 фут равен 12 дюймам.

– Слушайте, а ведь и в том, как по-английски слова-числа образуются видно, что 12-ричная система у них была. Числа от 1 до 12 называются своими собственными словами, а дальше: 13, 14, 15, … уже образованы от 3, 4, 5 и т. д.

– Ну вот, начали с информатики, а уже до английского докатились… И корзинки закончились, собирать больше некуда. Пока ждём, ты давай обрисуй, что ты там про 8-ричную систему говорила, какое она отношение к нашим корзинкам имеет?

– Мы записываем числа с помощью цифр. Основание нашей системы счисления – 10, в ней 10 цифр. Для счёта до 10 хватает одной цифры, если надо считать дальше, то появляются десятки, число уже получается двузначное: на первом место в нём стоит количество десятков, на втором – количество единиц. А 10 десятков составляют сотню, в трёхзначном числе на первом месте стоит количество сотен. И у нас с корзинками-коробками то же самое. Только вместо числа 10 у нас 8. И названия другие: не десяток, а лоток, не сотня, а корзинка, а вместо тысячи – коробка. Если собрана 1 корзинка, 2 лотка и 3 ягоды, то всего ягод $3+2\cdot 8$ (столько в лотках) + $+1\cdot 64$ (столько в корзинке). А число из 8-ричной системы именно так и переводится в 10-чную:

$$1234_8=4\cdot 8^0+3\cdot 8^1+2\cdot 8^2+1\cdot 8^3=4+24+$$
$$+128+512=668.$$

И из любой другой системы в десятичную число переводится по тем же правилам. Пусть наши лотки и корзинки-коробки вмещают по Q ягод:

$$1234_Q=4\cdot Q^0+3\cdot Q^1+2\cdot Q^2+1\cdot Q^3.$$

Поэтому, если взять другие основания, получится:

$$1234_7=4\cdot 7^0+3\cdot 7^1+2\cdot 7^2+1\cdot 7^3=4+21+98+$$
$$+343=466.$$

$$1234_6=4\cdot 6^0+3\cdot 6^1+2\cdot 6^2+1\cdot 6^3=4+18+$$
$$+72+216=310.$$

$$1234_5=4\cdot 5^0+3\cdot 5^1+2\cdot 5^2+1\cdot 5^3=4+15+$$
$$+50+125=195.$$

– И если бы оно было в 16-ричной, так же переводить надо было?

– Ну конечно так же, по той же формуле вместо Q в неё надо 16 подставить. Только я вам сейчас здесь это показывать не буду, уж больно большие числа получатся, надо будет 16 в куб возводить.

– Да, смотрите, чем больше основание, тем большее число получается!

– Тогда давайте маленькие основания брать. Вот я сейчас это число из троичной системы в десятичную переведу!

– Не выйдет!

– Это почему же, думаешь, я уж и циферки складывать не умею?

– Да не обижайся, просто наше число 1234 никак не может быть записано в троичной системе счисления. Ведь у неё основание 3, значит, при записи чисел используются всего 3 цифры: 0, 1 и 2. А у нас тройка и четвёрка есть!

– А мы другой способ проходили, как раз чтобы устно можно было переводить. Ни в какие степени ничего возводить не надо. Берём первую (слева) цифру, умножаем на 8, к результату прибавляем следующую цифру, это 2, опять на 8 умножаем – и так со всем числом:

$$\left(\left(1\cdot 8+2\right)\cdot 8+3\right)\cdot 8+4=83\cdot 8+4=668.$$

– Это ведь то же самое, просто в нашей формуле со степенями общие множители за скобки вынесли:

$$1\cdot Q^3+2\cdot Q^2+3\cdot Q^1+4\cdot Q^0=$$

$$=\left(1\cdot Q^2+2\cdot Q+3\right)\cdot Q+4=\left(\left(1\cdot Q+2\right)\cdot Q+3\right)\cdot Q+4$$

– А давайте теперь дроби переводить!

– Да ну тебя, мы и в школе дроби не проходили. Это слишком сложно.

– Совсем нет, там правило точно такое же, только как бы «в обратную сторону». Надо цифры, которые стоят после запятой, делить на основание системы счисления в 1, 2, 3 и т. д. степени:

$$0{,}1234_Q=\frac{1}{Q^1}+\frac{2}{Q^2}+\frac{3}{Q^3}+\frac{4}{Q^4}=$$

$$=\frac{1\cdot Q^3+2\cdot Q^2+3\cdot Q^1+4\cdot Q^0}{Q^4}.$$

$$0{,}1234_8=\frac{1}{8^1}+\frac{2}{8^2}+\frac{3}{8^3}+\frac{4}{8^4}=$$

$$=\frac{1\cdot 8^3+2\cdot 8^2+3\cdot 8+4}{8^4}=\frac{668}{8^4}.$$

– Смотрите, наверху число получилось такое же, как у нас уже было. Да и формула такая же! Значит, можно эту другую формулу и не запоминать? Можно те цифры, что стоят в дробной части, записать как число и перевести по обычным правилам. А потом поделить на основание в степени... В какой степени? А... в такой, сколько цифр в дробной части.

– Ну да, а оно всегда так будет?

– Конечно, всегда. Вон она, формула, по ней всё и получается. Все степени одинаковые, что у целого числа, что у дробного.

– Ага, а давайте возьмём число с нулями в начале:

$$0{,}0012=\frac{0}{8^1}+\frac{0}{8^2}+\frac{1}{8^3}+\frac{2}{8^4}=$$

$$=\frac{1\cdot 8+2}{8^4}=\frac{10}{8^4}.$$

И опять всё правильно получилось. Только здесь важно не забыть, что делить надо на восьмерку в 4 степени, а не во второй.

– А ну-ка я что-нибудь простенькое переведу:

$$12_3=1\cdot 3+2=5,\ \text{значит,}\ 0{,}12_3=\frac{5}{9},$$

и это получится... а ведь не делится. Что же получится?

– Что значит – не делится? Делится, только дробь получается бесконечная. Увы, разделится «до конца» всегда, только если основание системы счисления кратно 2 или 5.

– Ну что же мы так долго ждём, когда же они наконец нам эти корзинки принесут? Давайте пока посмотрим, кто собрал больше всех. Как там числа в этой вашей восьмеричной системе сравнивать? У меня вот 2 коробки, 2 корзинки и 4 лотка. Получается число 224_8.

– Неправильно! Получается 2240_8. Ты забыл, что отдельных клубничин у тебя нет, надо на последнее место ноль поставить. А сравниваются числа так же, как и в десятичной (да и в любой другой) системе. У меня вот 4 коробки и 7 лотков. Получается число 4070_8. Я между «7» и «4» ноль ставлю, потому что ни одной корзинки у меня нет. У меня коробок больше, всё остальное можно и не сравнивать. 4070 > 2240, можно даже основание системы счисления не писать, для любой из них (в которой числа можно так записать) правильно будет.

– Ну ты даешь, всё время говорила, рассказывала, а сколько насобирала. А у тебя, Вика, сколько? Где вообще твои коробки?

– Их забрали. Дяденька какой-то пришёл и унёс.

– А сколько их было?

– Я не помню.

– Да как же так! Нам ведь сказали запоминать, сколько собрали.

– А я и запомнила. Только я не коробками, я ягодами считала. Мне так удобнее: как новая ягодка, сразу счёт увеличивается, а то пока эту коробку наберёшь.

– И сколько же у тебя получилось?

– 2250 штук!

– Что-то ты неправильно посчитала!

– Да откуда ты можешь знать? Ты же всех моих ягод не видишь, коробки-то унесли, а я точно помню, мне ещё понравилось, что я на таком круглом числе остановилась.

– Да мне и ни к чему коробки, чтобы знать, что ты ошиблась. У тебя 3 корзинки стоят и один лоток, отдельных ягод нет. Значит, твоё число должно делиться на 8. А оно не делится.

– И как это ты так быстро поделила?

– А я и не делила. Если число делится на 8, оно делится и на 4. Признак делимости на 4 мы знаем: число, составленное из последних двух цифр заданного числа, должно делиться на 4. А 50 на 4 не делится!

– А откуда ты взяла, что число моих ягод должно делиться на 8?

– У тебя нет неполного лотка, а во всей таре, если она полная, число ягод делится на 8. Если бы у тебя лотков не было, только корзинки, твое число делилось бы на 64, ведь в корзинках 64 ягоды. А если эти числа записывать, то получается, если отдельных ягод нет – число на 0 заканчивается, на 8 обязательно делится; если ни лотков, ни ягод нет – число на 00 заканчивается, на 64 делится. И это верно для любой системы счисления. Если число оканчивается на K нулей, то оно делится на Q^K. Вот в десятичной системе, например, 12000 делится на $1000 = 10^3$, а в двоичной, если число оканчивается на 0, то делится на 2.

– Вспомнила! У меня еще 2 штуки было, так я их, пока вы тут разговаривали, съела.

– Что же это такое! А ну-ка, кончайте есть! Так мы никаких денег не получим!

– Да успокойся ты, мы только те, что не упакованы, из неполных лотков едим, другие не трогаем. Давайте считать, на каком месте Вика. У нее 2248 ягод. Но это ведь в десятичной системе. Как число в десятичной системе сравнить с числом в восьмеричной?

– Как-как! Переводить надо, считать. Развели тут бухгалтерию.

– Да не сердись, Лёш. Всё равно, пока ждём, делать нечего. Поговорим, мозги потренируем. Кстати, не всегда обязательно надо «переводить», то есть представлять оба числа в какой-то одной системе счисления (мы уже знаем, что в какой – всё равно, сравнение везде происходит одинаково).

– Как это – не всегда переводить, что же ты – километры с метрами сравнивать будешь, коробки с корзинками?

– Ну и километры с метрами можно иногда сравнить. Ясно ведь, что 5000 километров больше 3 метров, а вот если наоборот, если надо сравнить 3 километра и 5000 метров – уже что-то одно в другое переводить надо.

– Помните, мы переводили число 1234 в десятичную систему из разных систем счисления? У нас получилось, что чем больше основание системы, тем большее десятичное число получается. Поэтому, если есть два числа, первое больше второго и основание системы счисления первого больше, чем у второго, переводить ничего не надо – первое число однозначно больше.

– Ну тогда у нас всё ясно, надо сравнить числа 4070_8, 2240_8 и 2248_{10}. Можно сразу сказать, что $2248_{10} > 2240_8$. Оно и само больше, и основание его системы счисления больше. А 4070_8 и 2248_{10} надо сравнивать как-то по-другому.

– Конечно, надо их «привести» к одной системе счисления, как дроби к одному знаменателю.

$$4070_8 = 7 \cdot 8 + 4 \cdot 512 = 56 + 2048 = 2104_{10};$$

$$2240_8 < 4070_8 = 2104_{10} < 2248_{10}.$$

– А давайте ещё что-нибудь собирать устроимся! Яблоки какие-нибудь... Вдруг их надо по 16 или по 32 штуки в корзинку класть – вот и узнаем про 16-ричную и 32-ричную систему. Они нужные, в них компьютер считает.

– Откуда же ты такое взял – про компьютер?

– Да вроде бы чего-то проходили, что в компьютерах раньше использовалась двоичная система, давно, когда они совсем плохие были. А потом они стали лучше, стали использовать 8-ричную, потом 16-ричную, а скоро начнут и 32-ричную (ох и словечко – не выговоришь).

– Ну вот, числа ты запомнил, но ничего не понял. В компьютерах используется двоичная система счисления. Ты ведь не думаешь, что там у него внутри, в памяти числа чернилами написаны? Да ещё твоим корявым почерком, что «6» от «8» не отличишь. В компьютере всё четко должно быть. Свет на фотоэлемент попадает или нет, ток идёт или не идёт, магнитное поле есть или нет – вот и получается всего 2 состояния, 2 цифры.

– А почему бы нельзя 3 или 4: ток большой, средний и маленький, или ток идёт туда, обратно или вообще не идёт? Ну или вообще заставить его в десятичной системе работать: напряжение 1 вольт – цифра 1, 2 вольта – цифра 2, ну и дальше так же?

– Да ведь напряжение измерять придётся. И как его, разное, на диск записать? Это тебе не ягодки считать. Медленно получается и слишком сложно. А с двоичной системой проще: всего два состояния, различаются легко.

– А как же восьмеричная система? Как в ней компьютеры работают?

– Да говорят тебе, в двоичной они работают. Только в двоичной. Но в двоичной системе счисления числа получаются очень длинные. Вот смотри, число 64 в десятичной системе всего двумя цифрами представляется, а в двоичной $64 = 2^6 = 1000000_2$ – целых 7 цифр! Компьютеру-то всё равно, а человеку неудобно. И писать долго, и читать сложно: от ноликов в глазах рябит. Вот и придумали для удобства писать числа не в двоичной, а в 8-ричной системе. Дело в том, что если для оснований систем счисления выполняется соотношение $Q = R^n$, для перевода из одной в другую не надо ничего складывать, в степень возводить. Надо взять N цифр числа в системе с основанием R и записать вместо них одну цифру числа с основанием Q.

– Что? Вместо N цифр записать одну? Любую?

– Ну не любую, конечно. Надо составить таблицу, где каждой цифре Q-системы соответствуют N цифр R-системы, это несложно, ведь цифр всего Q. Восьмеричная и двоичная система как раз подходят под это правило, $8=2^3$. Таблица выглядит так:

8-ричная система	2-ичная система
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

– Но здесь написано, как первые 8 чисел переводятся из 10-чной системы в двоичную.

– Да, потому что в 8-ричной системе числа от 0 до 7 выглядят так же, как в десятичной.

– Ну теперь я легко переведу $64 = 1000000_2$ =... Значит так: вместо 100 ставим 4, вместо следующих трех нулей 0 и... А куда лишний ноль девать? Тоже на 0 заменить? 400 получится? Неправильный твой способ! Годится только для чисел, в которых число цифр кратно трём! А с остальными непонятно что делать.

– Конечно, число цифр должно быть кратно трём. Но этого очень просто добиться: надо к числу недостающие нули приписать. Только обязательно не справа, а слева, чтобы число не изменилось. Получаем $64=001000000_2$. Теперь первые три цифры 001 заменяем на 1, а оставшиеся тройки на 0, получаем 100_8.

На самом деле всё можно делать даже проще, не надо пересчитывать цифры в числе и думать, делится ли их количество на 3. Просто надо разделить число на тройки, причём начать надо справа. Кстати, и дробная часть числа переводится из двоичной системы в восьмеричную этим же способом, только делить на тройки уже надо слева направо.

– Запутаешься тут, где слева, где справа...

– Не запутаешься, если запомнишь, что и целую, и дробную части надо делить на тройки, начиная от запятой.

$100101110{,}1110101_2 = 456{,}724_8$.

– А почему в конце 4? Там же 1?

– Остаётся одна единица, а нам надо 3 цифры. К дробной части незначащие нули надо приписывать справа.

Обратно, из 8-ричной в 2-ичную переводить тоже просто: каждую цифру в восьмеричной системе заменяем на 3 в двоичной. Только не надо забывать, что именно на 3, то есть даже нолик надо заменить на 3 цифры, на 000.

$1234{,}567_8 = 1010011100{,}101110111_2$.

– А почему ты первую цифру всего на одну единицу заменила?

– Она тоже на 3 цифры заменяется, на 001, только первые два нуля незначащие, их можно не писать.

И с 16-ричной системой то же самое. Ведь $16 = 2^4$, поэтому для перевода из двоичной в 16-ричную надо заменять 4 цифры на одну. Числа получаются ещё короче:

$1010\ 0001\ 1100{,}0111\ 0000\ 1001_2 = A1C{,}709_{16}$, вот её и используют для удобства записи.

– Эй, заканчивайте треп, вон корзинки везут!

– Давайте от информатики к сельскому хозяйству переходить. По грядкам!

– Ну вот, я только что-то понимать начал, а вы меня опять на грядку... Мне теперь вместо клубничин будут нолики и единички мерещиться. А главное, вы ведь так и не прояснили, как же компьютеры в этой самой нечеловеческой системе считают.

– Проясним. Насобираем ягод, вечером надо будет подсчитывать, сколько их всего – вот и придется заняться сложением в 8-ричной системе. А сейчас давай на поле пойдем, чтобы вечером было что складывать!

*Рисунки к статье подготовила **Елизавета Грацианова**, ученица 7а класса Измайловской гимназии 1508.*