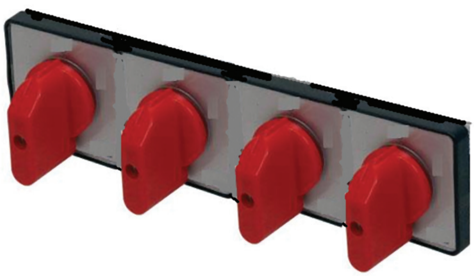
Златопольский Дмитрий Михайлович
Кандидат технических наук, доцент кафедры информатики и прикладной математики Московского городского педагогического университета.

Открываем сейф, или Код Грея

В статье описывается так называемый «двоичный отражённый (рефлексный) код Грея» и приводятся примеры его использования.

Представьте, что вам нужно открыть сейф, в котором имеются четыре переключателя, каждый из которых может находиться в одном из двух положений – вертикальном или горизонтальном:



Сейф откроется при каком-то одном сочетании положений переключателей. В исходном состоянии все переключатели вертикальны. Предложите последовательность перебора *всех*[1] возможных вариантов состояния, для которой общее число переключений из одного положения переключателей в другое будет минимальным. Например, если сначала повернуть в горизонтальное положение 1-й и 4-й переключатель (1-е состояние), а затем вернуть 1-й переключатель в вертикальное положение, а горизонтально расположить 3-й переключатель (2-е состояние), то общее число переключений в этот момент станет равно четырём (2 + 2).

Ясно, что идеальным вариантом будет такая последовательность переключений, в которой при изменении состояния меняет положение только один из переключателей. Но как её получить? Здесь на помощь может прийти двоичная система счисления. Если вертикальному положению переключателя сопоставить цифру 0, а горизонтальному – 1, то некоторое состояние всех переключателей можно смоделировать как 4-разрядное двоичное число (например, 0110). Тогда задача сводится к нахождению такой последовательности шестнадцати 4-разрядных двоичных чисел, в которой два соседних числа отличаются только одной цифрой. Получить же такую последовательность можно, используя, например, так называемый «код Грея». Код Грея – такой способ кодирования чисел, при котором зако-

[1] Ясно, что сейф может быть открыт и при некотором не последнем варианте (общее число различных вариантов состояния переключателей – 16).

дированное число и число, следующее за ним, отличаются только в одном разряде. В нашем случае понадобится один из вариантов кода Грея – «двоичный отражённый (рефлексный) код Грея».

Отражённый двоичный код Грея длины n строится следующим образом. Начнём со строк 0 и 1, которые представляют собой соответственно целые числа 0 и 1:

0
1

Добавим к ним «отражение» этих строк относительно горизонтальной оси:

0
1
1
0

и припишем 1 слева от новых записей списка, а слева от уже имеющихся разместим 0:

00
01
11
10

Таким образом мы получили отражённый код для $n = 2$.

Чтобы получить код для $n = 3$, повторим описанную процедуру и получим:

000
001
011
010
110
111
101
100

Соответствующие числа кода Грея длины 4, которые и можно (нужно) использовать для открытия сейфа, предлагаю читателям определить самостоятельно.

Можно доказать, что:

1) при указанном способе построения каждая из 2^n комбинаций в списке появляется, причём только один раз;

2) при переходе от одного элемента списка к рядом (ниже) стоящему изменяется только один разряд (только одна цифра);

3) только один разряд (только одна цифра) изменяется при переходе от последнего элемента списка к первому. Поэтому отражённый код Грея называют также «циклическим».

Коды Грея получили своё название по имени Франка Грея, физика из фирмы Bell Telephone Laboratories, который в 1930-х годах изобрёл метод, использовавшийся для передачи цветного телевизионного сигнала, совместимого с существовавшими методами передачи и получения чёрно-белого сигнала, то есть когда при получении цветного сигнала чёрно-белым приёмником изображение выводится оттенками серого цвета.

Свойство кодов Грея, заключающееся в том, что каждая последующая комбинация цифр отличается от предыдущей значением только одного разряда, используется, в частности, при применении кода Грея в датчиках линейного перемещения или угла поворота. Представим себе полосу материала, которая разделена на проводящие и непроводящие области, соответствующие нулям и единицам элементов кода Грея:

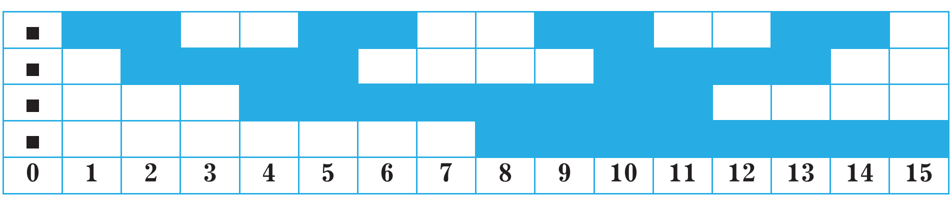


Рис. 1. Датчик линейного перемещения

Каждая полоса контактирует с токопроводящей щёткой (обозначенной в виде ■). Нетрудно убедиться, что при перемещении полосы в электрической цепи будет невозможно одновременное переключение нескольких единиц на нули и/или наоборот (одновременное переключение многих элементов создаёт такие токовые импульсы в цепях питания схем, которые могут вызвать сбои в работе схемы).

Полоса материала может быть серией концентрических круговых дорожек, как показано на рис. 2. В этом случае будет получен датчик углового положения. При этом, очевидно, требуется применение циклического кода Грея.

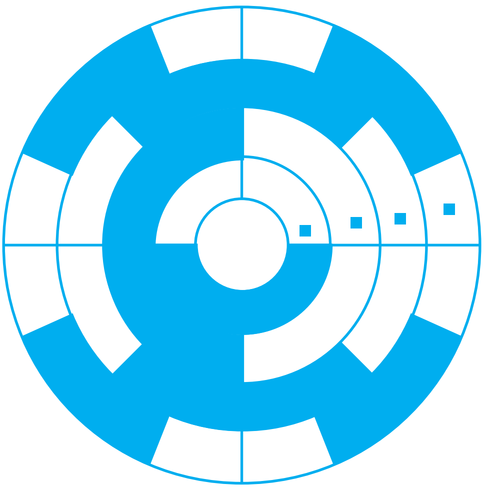


Рис. 2. Датчик углового перемещения

Интересно, что код Грея может быть использован для решения головоломки «Ханойские башни». Ее автором принято считать французского математика Э. Люка, создавшего головоломку на основе древних легенд. В русской литературе она впервые появилась в 1902 году в книге Е. Игнатьева «В царстве смекалки».

Если вы возьмете детскую пирамиду (диски располагаются в порядке возрастания: верхний – самый маленький, а нижний – самый большой) и ещё два стержня от таких же детских пирамид, то головоломка уже у вас в руках (рис. 3).

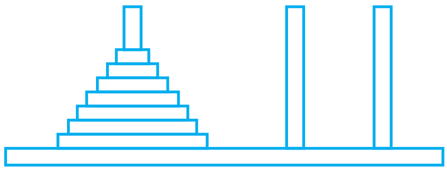


Рис. 3

Пронумеруем стержни: тот, на котором находятся диски, получит номер I, другие – номера II и III. Задача состоит в том, чтобы перенести диски со стержня I на стержень III, используя стержень II как промежуточный. При этом должны соблюдаться три условия:

1) за один ход можно переносить лишь один диск;

2) нельзя класть больший диск на меньший;

3) снятый диск нельзя отложить в сторону – он должен быть надет на один из стержней.

Согласно легенде, в древнем Ханое стоял храм, в котором на одном из трёх стержней были надеты 64 золотых диска, и монахи без устали, сменяя друг друга, переносят диски с одного стержня на другой в соответствии с описанными правилами. «Когда жрецы перенесут все диски с первого стержня на третий, – гласит легенда, – наступит конец света».

Для конкретного и небольшого числа дисков задачу «в натуре» (используя, например, монеты разного размера) решить несложно. А какой должна быть последовательность перекладываний в общем случае – при n дисках? Ответ такой – если выписать номера разрядов, в которых появляется «новая» цифра в каждом очередном элементе кода

Грея длины n, то можно получить следующие последовательности:

– при $n = 2$: 1, **2**, 1;

– при $n = 3$: 1, 2, 1, **3**, 1, 2, 1;

– при $n = 4$: 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, **4**, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1;

...

Числа этих последовательностей соответствуют номерам дисков, которые должны перекладываться на том или ином этапе решения головоломки при заданном количестве дисков (если их пронумеровать, начиная с самого маленького, – 1, 2, 3, ...).

Дополнение (не относящееся к коду Грея, а связанное с концом света ☺)

Давайте разберёмся, скоро ли наступит обещанный по легенде конец света.

Если бы в пирамиде был только один диск, то решение задачи очевидно – перенесём его на третий стержень, и дело с концом. Мы выполнили требуемое задание за один ход. А если бы было два диска? Тогда положим сначала меньший диск на второй стержень, затем положим второй диск на третий стержень, затем перенесём и меньший диск на третий стержень, положив его поверх второго. Всё. За три действия мы смогли переложить оба диска на третий стержень. Отметим, что $1 = 2^1 - 1$, а $3 = 2^2 - 1$. При трёх дисках мы можем сначала перенести два верхних на второй стержень (такую задачу мы решили только что), потом оставшийся нижний (самый большой) диск – на третий стержень, после чего на него же можно перенести те два диска, которые находятся на втором стержне.

Теперь предположим, что мы умеем перекладывать на третий стержень пирамиду из n дисков за $2^n - 1$ действие. Покажем, что в таком случае можно перенести на третий стержень и пирамиду из $n + 1$ дисков, притом за $2^{n+1} - 1$ действие.

Пусть на пирамиде лежит $n + 1$ дисков. Сначала мы можем перенести n верхних дисков с первого стержня на второй, произведя $2n - 1$ действие. На первом стержне остался лишь один диск. Перенесём его на свободный третий стержень. Теперь у нас на втором стержне лежит n дисков, первый – свободен, а на третьем лежит самый большой диск. Осталось перенести со второго стержня на третий n дисков (используя первый стержень как вспомогательный), что мы умеем делать за $2^n - 1$ операцию. Всё. Мы собрали на третьем стержне все $n + 1$ дисков, совершив $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$ действие.

Отсюда, в соответствии с принципом математической индукции, вытекает, что для любого натурального числа k можно, имея пирамиду с k дисками, перенести их с первого стержня на третий, соблюдая правила, за $2^k - 1$ действие. Нетрудно показать, что меньше чем за $2^k - 1$ действие перенести k дисков с первого стержня на третий невозможно. Поэтому легендарным жрецам понадобится $2^{64} - 1$ действие, чтобы исполнить свою работу. Если тратить на каждое действие лишь по одной секунде, то понадобится 18 446 744 073 709 551 615 с, то есть более 500 миллиардов лет (!). Так что волноваться не надо ☺.

Литература

1. *Савин А.П.* Ханойская башня. // Квант, 1991, № 11.

2. *Уоррен Г.* Алгоритмические трюки для программистов. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003.